АКАДЕМИЯ НАУК СССР
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА

Ю. В. ЛИННИК

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ
ОТДЕЛЕНИЕ
1980

Ю. В. ЛИННИК

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

L-ФУНКЦИИ И ДИСПЕРСИОННЫЙ МЕТОД

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ
ОТДЕЛЕНИЕ
1980

УДК 511

Избранные труды. Теория чисел. *L*-функции и дисперсионный метод. Ю. В. Линник. Л., «Наука», 1980. 374 с.

Настоящее издание вместе с вышедшим сборником «Избранные труды. Теория чисел. Эргодический метод и *L*-функции» содержит почти все основные теоретико-числовые работы выдающегося советского математика академика Ю. В. Линника. В предлагаемый том вошли работы по теории *L*-функций Дирихле, не попавшие в предыдущий сборник, и по дисперсионному методу, в частности работы, содержащие решение известной проблемы Харди—Литтлвуда. Издание рассчитано на широкие круги математиков. Лит. — 289 назв.

СОСТАВИТЕЛЬ ТОМА

доктор физ.-мат. наук А. В. МАЛЫШЕВ

Л $\frac{20203\text{-}561}{055(02)\text{-}80}$ БЗ-93-79-79. 1702030000.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

ДАН СССР, 1945, т. 47, № 1, с. 7—8

§ 1. При современном состоянии теории простых чисел большой интерес представляют формулы распределения их, дающие степенные понижения, т. е. такие, где остаточный член не превосходит главного в некоторой степени $c_0 < 1$. Одну из таких формул дает с помощью метода тригонометрических сумм И. М. Виноградов [1].

Число T дробей формы $\{bp^\alpha\}$, $p \leqslant N$, простое, $\alpha < 1$ с условием

$$0 \leqslant \{bp^\alpha\} \leqslant \lambda, \tag{1}$$

выражается формулой

$$T = \lambda\pi(N) + O(N^{1+\eta}\Delta), \quad \Delta = \{bN^{\alpha-1} + b^{-1}N^{-\alpha} + N^{-(2/3)\alpha}\}^{1/5}. \tag{2}$$

Я хочу здесь показать, что формулы этого типа являются также следствием классической формулы Мангольдта и теоремы Хогейзеля [2] о нулях $\zeta(s)$ и в основе их лежат факты «густоты» нулей $\zeta(s)$ в $\sigma > 1/2$, т. е. теоремы типа Бора—Ландау.

Я изложу здесь, в частности, доказательство формулы

$$Q(N) = \sum_{x=1}^{\sqrt{N}} \left\{\psi\{(x+1)^2\} - 2\psi\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\} + \psi(x^2)\right\} \ll N^{63/64} \tag{3}$$

(ψ — функция Чебышева); (3) отвечает $b = 1$, $\lambda = 1/2$ в формулах (1) и (2). Общий случай трактуется совершенно аналогично.

§ 2. Очевидно, достаточно доказать оценку (3) для функции $Q_1(N) = Q(N) - Q(N/4)$.

Формула Мангольдта [2] дает

$$\psi(y+h) - \psi(y) = h - \sum_{|\rho| \leqslant T} \frac{(y+h)^\rho - y^\rho}{\rho} + O\left(\frac{h}{y^2} + \frac{y}{T}\ln^2 y + \ln y\right). \tag{4}$$

Полагая $T = N^{17/32}$, находим из (4)

$$|Q_1(N)| \ll \left| \sum_{x=\sqrt{N/4}}^{\sqrt{N}} \sum_{|\rho| \leqslant N^{17/32}} \frac{(x+1)^{2\rho} - 2(x+1/2)^{2\rho} + x^{2\rho}}{\rho} \right| + \\ + N^{31/32} \ln^2 N. \qquad (5)$$

Далее, используя теоремы типа ван дер Корпута, именно теоремы 1 и 2 из работы Б. И. Сегала [3], находим леммы 1 и 2.

Лемма 1. *При* $N^{15/32} \leqslant t_1 \leqslant N^{1/2}/10$, $\rho = \beta_1 + it_1$ *имеем*

$$\left| \sum_{x=\sqrt{N/4}}^{\sqrt{N}} \frac{x^{2\rho}}{\rho} \right| < c_1 \frac{N^{\beta_1 + 1/32}}{|\rho|}. \qquad (6)$$

Лемма 2. *При тех же условиях, но* $N^{1/2}/10 \leqslant t_1 \leqslant N^{17/32}$ *имеем*

$$\left| \sum_{x=\sqrt{N/4}}^{\sqrt{N}} \frac{x^{2\rho}}{\rho} \right| < c_2 \frac{N^{\beta_1}}{\sqrt{|\rho|}}. \qquad (7)$$

Разбиваем прямоугольник $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $N^{1/2}/10 \leqslant t \leqslant N^{17/32}$ на $\ll \ln^2 N$ узких прямоугольников вида $\beta \leqslant \sigma \leqslant \beta + 1/\ln N$, $N_0 \leqslant t \leqslant \leqslant 2N_0$. Число нулей в отдельном таком прямоугольнике, по теореме Г. Хогейзеля [2], не превосходит $N_0^{1-(2\beta-1)^2} \ln^7 N$. Поэтому сумма выражений (7) по всем ρ в одном нашем прямоугольнике не превосходит

$$c_3 N^{\beta + 17/32 \cdot (1/2 - (2\beta-1)^2)} \ln^7 N. \qquad (8)$$

Экспонента достигает максимума при $\beta = 25/34$ и равна тогда 861/1088. Поэтому сумма (7) во всем большом прямоугольнике $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $N^{1/2}/10 \leqslant t \leqslant N^{17/32}$ не превосходит

$$c_4 N^{861/1088} \ln^{10} N. \qquad (9)$$

Совершенно аналогично, разбивая прямоугольник $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $N^{15/32} \leqslant t \leqslant N^{1/2}/10$ на $\ll \ln^2 N$ прямоугольников вида $\beta \leqslant \sigma \leqslant \beta + 1/\ln N$, $N_0 \leqslant t \leqslant 2N_0$ и пользуясь (6), найдем, что сумма выражений (6) не превосходит

$$N^{319/480} \ln^{10} N.$$

Пользуясь симметрией нулей $\zeta(s)$ относительно $\sigma = 1/2$ и $t = 0$, найдем отсюда:

$$Q_1(N) \ll \left| \sum_{|\rho| \leqslant N^{15/32}} \sum_{x=\sqrt{N/4}}^{\sqrt{N}} \frac{(x+1)^{2\rho} - 2(x+1/2)^{2\rho} + x^{2\rho}}{\rho} \right| + \\ + N^{31/32} \ln^2 N. \qquad (10)$$

Для разбора оставшейся суммы по $|\rho| \leqslant N^{15/32}$ заметим, что в ней будет $|2\rho/x| \leqslant N^{-1/32}$. Отсюда, разлагая по биному Ньютона, найдем:

$$\frac{\varphi(x, \rho)}{\rho} = \frac{(x+1)^{2\rho} - 2(x+1/2)^{2\rho} + x^{2\rho}}{\rho} = \frac{x^{2\rho}}{\rho}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2\rho} - \right.$$

$$\left. - 2\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2\rho} + 1\right\} = \frac{x^{2\rho}}{\rho}\sum_{r=2}^{32}\frac{P_r(\rho)}{x^r} + \theta\frac{B}{N},$$

где $|\theta| \leqslant 1$, B — константа, а $P_r(\rho)$ — полином степени r от ρ с фиксированными коэффициентами.

Применив теорему 1 из работы Б. И. Сегала [3], докажем следующую лемму.

Лемма 3. *При* $\rho = \beta + it$, $r \geqslant 2$, $t < N^{15/32}$ *имеем*:

$$\left|\sum_{x=\sqrt{N/4}}^{\sqrt{N}} x^{2\rho - r}\right| < c_4 \frac{N^{\beta - (r-1)/2}}{|\rho|}.$$

Суммируя по этой формуле выражение $\varphi(x, \rho)/\rho$ и учитывая, что число нулей ρ при условии $|\rho| \leqslant N^{15/32}$ будет $O(N^{15/32}\ln N)$, получим, что наша сумма не превосходит $N^{31/32}\ln N$. Присоединяя сюда (10), найдем $Q_1(N) \ll N^{31/32}\ln^2 N$, откуда наверное

$$Q(N) = \sum_{x=1}^{\sqrt{N}} \{\psi\{(x+1)^2\} - 2\psi\{(x+1/2)^2\} + \psi(x^2)\} \ll N^{63/64}.$$

Литература

1. Виноградов И. М. — Мат. сб., 1940, т. 7, вып. 2, с. 365—372.
2. Hoheisel G. — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1930, S. 72—82.
3. Сегал Б. И. — Труды Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1933, т. 4, с. 37—48.

О ВОЗМОЖНОСТИ ЕДИНОГО МЕТОДА В НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ «АДДИТИВНОЙ» И «ДИСТРИБУТИВНОЙ» ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

ДАН СССР, 1945, т. 49, № 1, с. 3—7

§ 1. Если назвать «дистрибутивной» теорией простых чисел круг вопросов, относящихся к распределению их на различных отрезках и последовательностях числового ряда, то основным методом этой теории следует признать метод L-функций Дирихле и процесс Римана—Адамара комплексного интегрирования и последующего суммирования по нулям и полюсам этих функций.

Что касается до современной «аддитивной» теории простых чисел, то наиболее прекрасным ее достижением является теорема

Гольдбаха—Виноградова о трех простых числах. Решение проблемы Гольдбаха по И. М. Виноградову имеет неоднородную структуру. Оно требует рассечения сегмента [0, 1] на интервалы «первого» и «второго» класса, тесно связанные с «большими» и «малыми дугами» Харди—Литтлвуда. В то время как «большие дуги» трактуются в основном с помощью метода Римана—Адамара, «малые дуги», составляющие главную трудность проблемы, изучаются с помощью метода «тригонометрического решета» И. М. Виноградова. Этот метод «тригонометрического решета» и является основным в аддитивной теории простых чисел. Занимаясь исследованиями по теории характеров Дирихле, я пришел к убеждению, что многие аддитивные проблемы теории простых чисел могут быть полностью трактованы методом Римана—Адамара, если присоединить к нему теоремы Карлсона—Хогейзеля о густоте нулей L-функций в различных прямоугольниках критической полосы.

В настоящей работе, в частности, я излагаю решение проблемы Гольдбаха—Виноградова с помощью метода Римана—Адамара прямого суммирования по нулям L-функций.

Доказательство протекает с помощью идей Харди—Литтлвуда [1], к которым присоединен ряд лемм типа Карлсона—Хогейзеля—Титчмарша о густоте нулей $L(w, \chi)$ и одна теорема, доказанная мной в работе [2]. Таким образом, классический метод L-рядов, применяемый для вывода закона простых чисел в прогрессиях, дает также и теорему Гольдбаха—Виноградова. Этот же метод решает и некоторые другие задачи, ранее трактовавшиеся лишь с помощью «тригонометрического решета» [3], а также приводит к совершенно новым результатам. Он может явиться единым методом во многих вопросах теории простых чисел.

§ 2. Пусть N — большое нечетное число, которое мы желаем представить суммой 3 простых чисел. Мы будем исследовать сумму

$$S(N, \vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, e^{-n/N} e^{-2\pi i\vartheta n}.$$

Имеем

$$S(N, \vartheta)=\sum_{p\geqslant 2} \ln p\cdot e^{-p/N} e^{-2\pi i\vartheta p}+O(N^{1/2}\ln^2 N).$$

Поэтому $S(N, \vartheta)$ можно применять и к решению проблемы Гольдбаха, именно:

$$Q(N)=e\int_0^1 S(N, \vartheta)^3 e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta+O(N^{3/2+\varepsilon}),$$

где

$$Q(N)=\sum_{p+p'+p''=N} \ln p \ln p' \ln p''.$$

§ 3. Мы полагаем $w=\sigma+it$; $\beta\in[1/2, 1]$ — реальное число, $\nu=\beta-1/2$.

Лемма 1. *Для* $-1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \geqslant 1$ *имеем:*

$$|\Gamma(\sigma + it)| < c_1 t^{\sigma - 1/2} e^{-(\pi/2)|t|}. \tag{1}$$

Лемма 2. *Пусть* χ — *примитивный характер* (mod q); $L(w, \chi)$ — *принадлежащий к нему* L-*ряд и* $T \geqslant 1$. *Число нулей* $L(w, \chi)$ *в прямоугольнике* $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$ *будет*

$$\ll T \ln(qT). \tag{2}$$

Доказательство этих лемм общеизвестно.

Лемма 3 (Карлсон—Хогейзель—Титчмарш). *Число нулей* ζ-*функции в прямоугольнике* $1 \geqslant \sigma \geqslant \beta$, $|t| \leqslant T$ *имеет оценку:*

$$Q(\beta, T) < \min\left(c_2(\varepsilon)\, T^{1-(2\beta-1)/(3-2\beta)+\varepsilon},\ c_3 T^{1-(2\beta-1)^2} \ln^7 T\right).$$

Так как $\beta = 1/2 + \nu$, то можно написать:

$$Q(\beta, T) < \min\left(c_2(\varepsilon)\, T^{1-\nu/(1-\nu)+\varepsilon},\ c_3 T^{1-4\nu^2} \ln^7 T\right). \tag{3}$$

По поводу доказательств см. [3] и [4].

Лемма 4 (обобщение). *Если* $L(w, \chi)$ — *ряд леммы* 2 *и* $T \geqslant q^{10}$, *то число нулей* $L(w, \chi)$ *в прямоугольнике* $1 \geqslant \sigma \geqslant \beta$; $|t| \leqslant T$ *будет*

$$Q_L(\beta, T) < \min\left\{c_2(\varepsilon)\, q^4 T^{1-\nu/(1-\nu)+\varepsilon},\ c_4 q^4 T^{1-4\nu^2} \ln^7 T\right\}. \tag{4}$$

Лемма 5. *В условиях леммы* 4

$$Q_L(\beta, T) < c_3(\varepsilon)\, T^{1-\nu+\varepsilon}. \tag{5}$$

Леммы 4 и 5, из коих особенно важна лемма 5, доказаны мной в работе «О густоте нулей L-рядов». Важную роль играет лемма 6. Она является следствием результатов работ [2] и [5], посвященных выводу некоторых оценок типа И. М. Виноградова из теорем о густоте нулей L-рядов.

Лемма 6. *Существует абсолютная константа* $\gamma_0 \in (0, 1)$, *такая, что если зафиксировать любое* $\lambda > 0$ *и если* q — *любое целое число при условии* $\exp((\ln N)^\lambda) \leqslant q \leqslant N^{\gamma_0}$, *то при* $\vartheta = a/q + M/N$, $|M| < q^{100}$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, e^{-n/N} e^{-2\pi i \vartheta n}\right| \ll \frac{N}{q^{0.4}}. \tag{6}$$

Лемма 7 (Пейдж—Титчмарш [6]). *Если* σ_1 — *наибольший реальный нуль, который имеют* L-*функции* (mod q) *и* $(q, l) = 1$, *то*

$$\pi(m, q, l) = \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^m \frac{du}{\ln u} + O\left(m e^{-A\sqrt{\ln m}}\right) + O\left(\frac{m^{\sigma_1}}{\varphi(q) \ln m}\right). \tag{7}$$

Лемма 8 (Пейдж [6]). *Если $\xi \geqslant 2$, то из всех L-рядов с примитивным характером и модулем $q \leqslant \xi$ существует не более одного, который бы имел реальный нуль в $\sigma > 1 - c_4/\ln \xi$.*

§ 4. Выберем $\gamma_1 = \min\{\gamma_0, 1/10^{10}\}$, $\tau_1 = N^{\gamma_1}$ (γ_0 число из леммы 6). Пусть $H = \exp((\ln N)^{1/3})$, $H_1 = H^3$. Каждое $\vartheta \in [0, 1]$ разлагается в непрерывную дробь

$$\vartheta = \frac{a}{q} + \alpha, \quad |\alpha| \leqslant \frac{1}{q\tau_1}, \quad q \leqslant \tau_1. \tag{8}$$

Множество $\mathfrak{M}$ чисел ϑ, для коих $q \leqslant H$, $|\alpha| \leqslant H_1/N = H^3/N$, составляет числа типа «большие дуги». Поведение $S(N, \vartheta)$ на $\mathfrak{M}$, как известно, может быть изучено классическим путем с помощью лемм 7 и 8. Остальные числа объединяем в множество $\mathfrak{m}$. Пусть $\vartheta \in \mathfrak{m}$, $\vartheta = a/q + \alpha$. Если $|\alpha| \leqslant q^{10}/N$, то имеет место (6). Такое множество чисел обозначим $\mathfrak{m}_1$. Для оставшихся чисел $\vartheta \in \mathfrak{m}_2$ получим

$$\vartheta = \frac{a}{q} + \alpha, \quad \frac{1}{q\tau_1} \geqslant |\alpha| \geqslant \frac{q^{100}}{N}. \tag{9}$$

§ 5. Пусть χ — примитивный характер $(\operatorname{mod} q)$, где q удовлетворяет (8), $E(\chi) = 1$, если χ — главный, и равно 0 в противоположном случае, а ρ пробегает критические нули $L(w, \chi)$. Если x — число с $\operatorname{Re} x > 0$, то получим, согласно Литтлвуду [3], если $L(0, \chi) \neq 0$,

$$S(N, \alpha, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) e^{-nx} = E(\chi) x^{-1} - \sum_{\rho} x^{-\rho} \Gamma(\rho) -$$
$$- \frac{L'}{L}(0, \chi) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2 - i\infty}^{-1/2 + i\infty} x^{-w} \left(- \frac{L'}{L}(w, \chi) \right) \Gamma(w)\, dw.$$

Если $L(0, \chi) = 0$, надлежит внести несущественные изменения.

Пусть $x = 1/N + 2\pi i \alpha$, где α удовлетворяет (9). Имеем $|x| < 1$. Для оценки остаточного члена

$$R = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2 - i\infty}^{-1/2 + i\infty} x^{-w} \left(- \frac{L'}{L}(w, \chi) \right) \Gamma(w)\, dw$$

заметим, что на $\sigma = -1/2$ $\frac{L'}{L}(w, \chi) \ll \ln q(|t| + 2)$, $x^{-w} = e^{-w \ln|x| - iw \operatorname{arc} x}$, $|e^{-w \ln|x|}| < 1$, $|e^{-iw \operatorname{arc} x}| \leqslant e^{|t| \operatorname{arc} x}$, $\Gamma(w) \ll e^{-(\pi/2)|t|} |t|$. Полагая $\eta = \pi/2 - \operatorname{arc} x = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\pi N \alpha}\right)$, получим

$$R \ll \int_{2}^{\infty} e^{(\operatorname{arc} x - \pi/2)|t|} \frac{\ln qt}{t}\, dt \ll \frac{1}{\eta \ln(1/\eta)}.$$

Так как $N\alpha$ велико для $\vartheta \in \mathfrak{m}_2$, то $\operatorname{arctg} 1/2\pi N\alpha \sim 1/2\pi N\alpha$ и $R \ll N\alpha \ln (N\alpha)$. Далее, $\frac{L'}{L}(0, \chi) \ll q$, $x^{-1} \ll \alpha^{-1}$. Отсюда

$$S(N, \alpha, x) \ll \alpha^{-1} + N\alpha \ln (N\alpha) + \left| \sum_{\rho} x^{-\rho} \Gamma(\rho) \right|. \tag{10}$$

§ 6. Пусть $\nu_0 = \gamma_1^2$. Для оценки $\left|\sum x^{-\rho}\Gamma(\rho)\right|$ разбиваем критическую полосу σ на полосу σ_0: $0 \leqslant \sigma \leqslant 1/2 + \nu_0 = \beta_0$ и ряд полос σ_β: $\beta \leqslant \sigma \leqslant \beta + 1/\ln N$, $\beta \geqslant 1/2 + \nu_0$. Пусть $\alpha > 0$ и $N_0 \geqslant N\alpha$ — число нулей $L(w, \chi)$ в прямоугольнике $0 \leqslant \sigma \leqslant \beta_0$; $|t| \leqslant N_0$; согласно (2), $Q_L(\beta, N_0) \ll N_0 \ln (qN_0)$; $|x| \sim 2\pi\alpha$ и, если $\rho_k = \beta_k + it_k$, имеем, в силу (1),

$$\left| \sum_{\rho_k \in \sigma_{\beta_0}} x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k) \right| \ll \alpha^{-\beta_0} \sum_{\rho_k \in \sigma_{\beta_0}} e^{(\operatorname{arc} x - \pi/2)\, |t_k|} |t_k|^{\beta_k - 1/2} \ll$$

$$\ll \alpha^{-\beta_0} \sum_{\rho_k \in \sigma_{\beta_0}} e^{-|t_k|/2\pi n\alpha} |t_k|^{\beta_0 - 1/2} \ll \alpha^{-\beta_0} N\alpha \ln (N\alpha) (N\alpha)^{\nu_0} \ll \alpha^{1/2 - \nu_0} N^{2\nu_0} N.$$

В силу (9) ($\alpha \leqslant 1/q\tau_1$) наше выражение

$$\ll \frac{NN^{2\nu_0}}{q^{1/2-\nu_0}\tau_1^{1/2-\nu_0}} \ll N \frac{N^{2\nu_0}}{q^{1/2-\nu_0} N^{(1/2)\gamma_1 - \nu_0\gamma_1}} \ll N \frac{1}{q^{1/2} N^{(1/2)\gamma_1 - 3\gamma_1^2}} \ll \frac{N}{q^{1/2} N^{(1/4)\gamma_1}}. \tag{11}$$

§ 7. Для $1/2 + \nu_0 \leqslant \beta \leqslant 0.6$, т. е. $\nu_0 \leqslant \nu \leqslant 0.1$, применяем лемму 5.

Важно, что $N_0 \geqslant N\alpha > q^{100}$. Имеем $Q_L(\beta, N_0) \ll c_3(\varepsilon) N_0^{1-\nu+\varepsilon}$. Отсюда

$$\left| \sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k) \right| \ll \alpha^{-1/2-\nu} \sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} e^{-|t_k|/2\pi N\alpha} |t_k|^{\nu} \ll$$

$$\ll c_3(\varepsilon) (N\alpha)^{1-\nu+\varepsilon} (N\alpha)^{\nu} \alpha^{-1/2-\nu} \ll c_3(\varepsilon) N^{1+\varepsilon} \alpha^{0.4} \ll$$

$$\ll c_3(\varepsilon) N \frac{N^{\varepsilon}}{q^{0.4}\tau_1^{0.4}} \ll \frac{N}{q^{1/2}\tau_1^{0.2}}. \tag{12}$$

§ 8. Для $0.1 \leqslant \nu \leqslant 1/3$ применяем лемму 4 в виде: $Q_L(\beta, N_0) \ll c_2(\varepsilon) q^4 N_0^{1-\nu/(1-\nu)+\varepsilon}$. Отсюда

$$\left| \sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k) \right| \ll c_2(\varepsilon) q^4 \alpha^{-1/2-\nu} (N\alpha)^{1-\nu/(1-\nu)+\varepsilon} (N\alpha)^{\nu} \ll$$

$$\ll N^{1-\nu^2} \alpha^{3/2 - 1/(1-\nu)} \ll N^{1-\nu^2} \ll N^{1-0.01}. \tag{13}$$

В самом деле, $\alpha < 1$ и $\nu \leqslant 1/3$, так что $3/2 - 1/(1-\nu) \geqslant 0$. Для $1/3 < \nu \leqslant 0.499$ применяем ту же оценку. Здесь уже $3/2 - 1/(1 - \nu) < 0$ и максимум оценки будет при наименьшем $\alpha \geqslant q^{100}/N$. Искомая величина

$$\ll c_3(\varepsilon) N^{1-\nu^2/(1-\nu)+\varepsilon} \left(\frac{N}{q^{100}}\right)^{1/(1-\nu)-3/2} \ll c_3(\varepsilon) \frac{N^{1/2+\nu+\varepsilon} q^4}{q^{100(1/(1-\nu)-3/2)}} \ll N^{1-10^{-3}} q^4. \tag{14}$$

§ 9. Для $0.499 < \nu \leqslant 1$ применяем оценку $Q_L(\beta, N_0) \ll N^{1-4\nu^2} q^4 \times \times \ln^7 N_0$. Это дает нам

$$\Big| \sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} x^{-\rho_k} \Gamma(\rho_k) \Big| \ll (Na)^{1-4\nu^2} (Na)^\nu a^{-1/2-\nu} q^4 \ln^7 N \ll q^4 \ln^7 N \cdot N^{1+\nu-4\nu^2} a^{1/2-4\nu^2}.$$

Оценка максимальна при наименьшем α, имеем $\alpha > q^{100}/N$; если $q^{100} < H$, то для исследуемых $\vartheta \in \mathfrak{m}_2$ $\alpha > H^3/N$. Итак, $\alpha > H/N$. Отсюда максимальная оценка будет:

$$\ll q^4 \ln^7 N \cdot N^{1+\nu-4\nu^2} \min \left\{ \frac{N^{4\nu^2-1/2}}{H^{4\nu^2-1/2}}, \frac{N^{4\nu^2-1/2}}{q^{100(4\nu^2-1/2)}} \right\} \ll$$

$$\ll q^4 \ln^7 N \cdot N^{1+\nu-4\nu^2} \frac{N^{4\nu^2-1/2}}{H^{2\nu^2-1/4} q^{100(2\nu^2-1/4)}}.$$

Так как при $\nu \in [0.499, 1/2]$ $2\nu^2 - 1/4 > 0.2$, то наша оценка

$$\ll N^{1/2+\nu} \ln^7 N \frac{1}{q^{15} H^{0.2}} \ll \frac{N}{q H^{0.1}}. \tag{15}$$

§ 10. Если $\vartheta \in \mathfrak{m}_2$, $\vartheta = a/q + \alpha$, то, собирая (10)—(15), найдем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) e^{-n/N} e^{-2\pi i a n} \ll |\alpha|^{-1} + N\alpha \ln |N\alpha| +$$
$$+ \frac{N}{q^{1/2} N^{1/4\gamma_1}} + \frac{N}{q^{1/2} \tau_1^{0.2}} + \frac{N}{N^{0.01}} + q^4 N^{1-10^{-4}}. \tag{16}$$

Отсюда, очевидно, получим для достаточно малой $c_5 > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) e^{-n/N} e^{-2\pi i a n} \ll \frac{N}{q^{1/2+c_5} H^{0.1}}. \tag{17}$$

§ 11. Отсюда имеем: при $\vartheta = a/q + \alpha$, $\vartheta \in \mathfrak{m}_2$

$$S(N, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-n/N} e^{2\pi i \vartheta n} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-n/N} e^{-2\pi i (a/q+\alpha) n} =$$

$$= \sum_{\substack{(l, q)=1 \\ \mathrm{mod}\ q}} e^{-2\pi i (a/q) l} \sum_{n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, q)} \Lambda(n) e^{-n/N} e^{-2\pi i a n} + O(q^\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \left(\sum_{l} \bar{\chi}(l) e^{-2\pi i (a/q) l} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) e^{-n/N} e^{-2\pi i a n} + O(q^\varepsilon).$$

Учитывая $\sum_{l} \bar{\chi}(l) e^{-2\pi i (a/q) l} \ll q^{1/2+\varepsilon}$ и подставляя (17), найдем

$$S(N, \vartheta) \ll \frac{q^{1/2} \varphi(q)}{\varphi(q)} \frac{q^\varepsilon}{q^{1/2+c_5} H^{0.1}} N \ll \frac{N}{H^{0.1}}.$$

Этого и (6) достаточно для решения проблемы Гольдбаха.

Литература

1. Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie. Bd II. Leipzig, 1927. 308 S.
2. Линник Ю. В. — Мат. сб., 1944, т. 15, вып. 1, с. 3—12.
3. Titchmarsh E. C. The zeta-function of Riemann. Cambridge, 1930.
4. Hoheisel G. — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1930, S. 72—82.
5. Линник Ю. В. — ДАН СССР, 1943, т. 41, № 4, с. 152—154.
6. Page A. — Proc. London Math. Soc., 1935, vol. 39, p. 116—141.

О ГУСТОТЕ НУЛЕЙ L-РЯДОВ

Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, т. 10, № 1, с. 35—46

§ 1. В настоящей статье я даю подробное доказательство одной теоремы, из которой довольно просто выводится теорема Гольдбаха—Виноградова [1, 2] тем же путем контурного интегрирования, что и закон простых чисел.

Теорема. *Пусть* $q \geqslant 1$ — *целое число*, $\chi(n)$ — *примитивный характер* (mod q), $L(w, \chi)$ — *его* L-*ряд*; *пусть* $w = \sigma + it$, $T \geqslant q^{50}$, $\beta \geqslant 1/2$, $\nu = \beta - 1/2 \geqslant 0$. *Тогда число нулей ряда* $L(w, \chi)$ *в прямоугольнике* $\beta \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$ *будет*

$$Q(\beta, T) < c_1 q^{2\nu} T^{1-\nu/(1-\nu)} \ln^{10} T + c_2 q^{30}, \tag{1}$$

где c_1, c_2 — *абсолютные константы.*

§ 2. Вывод (1) не будет заключать каких-либо существенно новых идей, а будет лишь представлять собой модификацию и уточнение известного вывода Е. К. Титчмарша [3] для ζ-функции. И подобно тому как Е. К. Титчмарш использует знаменитое приближенное функциональное уравнение для ζ-функции, так и мы должны будем вывести и использовать приближенное функциональное уравнение для L-рядов с переменным модулем q.

З. Суетуна в своей работе [4] дал удобный способ вывода такого уравнения. Но его вывод относился к фиксированному модулю q и не охватывал всех нужных случаев. Поэтому мы используем его вывод в несколько измененной форме.

§ 3. Мы должны будем вывести следующую теорему о приближенном функциональном уравнении для L-рядов.

Пусть χ — примитивный характер (mod q), $q \geqslant 1$, $s = \sigma + it$, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| > c_3$, $x > c_3 q$, $y \geqslant c_3$, $2\pi xy = qt$.
Тогда

$$L(s, \chi) = \sum_{n<x} \chi(n) n^{-s} + 2(2\pi)^{s-1} q^{1/2-s} \varepsilon(\chi) \frac{\sin}{\cos}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \sum_{n<y} \bar{\chi}(n) n^{s-1} + R(q, t, \sigma, x, y), \tag{2}$$

где

$$|R(q, t, \sigma, x, y)| < c_4 q^2 \left(x^{-\sigma} + y^{\sigma-1} t^{1/2-\sigma}\right) \overline{\ln t}. \tag{3}$$

При этом

$$\varepsilon(\chi)\,\frac{\sin}{\cos}\left(\frac{\pi s}{2}\right)=\begin{cases}\dfrac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}}\sin\dfrac{\pi s}{2} & \text{при } \chi(-1)=1,\\ \dfrac{-i\tau(\chi)}{\sqrt{q}}\cos\dfrac{\pi s}{2} & \text{при } \chi(-1)=-1,\end{cases}$$

$$\tau(\chi)=\sum_{l=0}^{q-1}\chi(l)\,e^{2\pi il/q}.$$

Наши начальные преобразования почти не будут отличаться от выкладок З. Суетуны [4]. Мы приведем их для полноты изложения.

При $s>1$ имеем $n^{-s}=(1/\Gamma(s))\int\limits_0^\infty e^{-n\omega}\omega^{s-1}d\omega$; отсюда, если $\xi\geqslant 1$ — какое-либо целое число,

$$L(s,\chi)-\sum_{n<\xi}\chi(n)\,n^{-s}=\sum_{n\geqslant\xi}\chi(n)\,n^{-s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty z^{s-1}\left(\sum_{n\geqslant\xi}\chi(n)\,e^{-nz}\right)dz.$$

Отсюда

$$L(s)-\sum_{n<\xi}\chi(n)\,n^{-s}=\frac{q^{-s}}{\Gamma(s)}\sum_{l=0}^{q-1}\chi(\xi+l)\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(\xi+l)z/q}z^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz. \tag{4}$$

Проведем разрез от 0 до ∞ по положительной реальной оси, и пусть контур C состоит из частей: верхний берег разреза от ∞ до $z=1/2$, окружность $|z|=1/2$, $0\leqslant\arg z\leqslant 2\pi$, и нижний берег отрезка от $z=1/2$ до $z=\infty$. Если положим $\ln(-z)=\ln|-z|+i\arg(-z)=\ln|z|+i\arg z-\pi i$, $(-z)^{s-1}=e^{(s-1)\ln z}$, то получим

$$\int\limits_C\frac{e^{-(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz=-2i\sin\pi s\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(\xi+l)z/q}z^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz.$$

Из последней формулы и (4) получается

$$L(s)-\sum_{n<\xi}\chi(n)\,n^{-s}=\frac{i\Gamma(1-s)}{2\pi q^s}\sum_{l=0}^{q-1}\chi(\xi+l)\int\limits_C\frac{e^{-(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz. \tag{5}$$

Это верно для любого нецелого s. Подынтегральная функция имеет простые полюсы $z=2\pi ni$, $n=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots$ вне контура C. Вокруг каждого такого полюса опишем кружок радиуса $1/t$.

Проведем новый контур: от $\infty+2\pi iy$ горизонтально до $2\pi iy$, оттуда по полукругу $|z|=2\pi y$, $\operatorname{Re} z<0$ до $-2\pi iy$ и затем горизонтально до $\infty-2\pi iy$.

Если этот контур не пересечет наших кружочков, то три его основные части (C_1 — от $\infty+2\pi iy$ до $2\pi iy$; C_3 — полуокружность

$|z|=2\pi y$, $\operatorname{Re} z<0$; C_5 — от $-2\pi iy$ до $\infty-2\pi iy$) смогут служить для вычислений.

Если же он пересечет или коснется двух таких кружочков (симметрично расположенных), то назовем:

C_1 — часть контура от $\infty+2\pi iy$ до точки пересечения с кружочком $|z-2\pi ni|=1/t$;

C_2 — часть окружности кружочка, обращенная к началу координат, до пересечения с $|z|=2\pi y$, $\operatorname{Re} z<0$;

C_3 — часть полуокружности $|z|=2\pi y$, $\operatorname{Re} z<0$ от пересечения с кружочком $|z-2\pi ni|=1/t$ до пересечения с кружочком $|z+2\pi ni|=1/t$;

C_4 — часть окружности $|z+2\pi ni|=1/t$, обращенная к началу координат, от пересечения с C_3 до пересечения с горизонталью $\operatorname{Im} z=-2\pi y$;

C_5 — горизонталь от пересечения с C_4 до $\infty-2\pi iy$.

Совокупность $C_1+C_3+C_5$ или, если есть C_2 и C_4, то $C_1+C_2+ +\ldots+C_5$, назовем C_0.

Между C_0 и C будут расположены полюсы функции $e^{-(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1}/(1-e^{-z})$ в точках $z=2\pi ni$ при условии: n — целое, $0<|n|\leqslant y_1$, где $y_1=[y]-1$ или $[y]$ в зависимости от того, содержит или не содержит контур C_0 части C_2 и C_4.

Подсчет вычетов в полюсах дает из (5):

$$L(s,\chi)=\sum_{n\leqslant\xi}\chi(n)\,n^{-s}+2(2\pi)^{s-1}q^{1/2-s}\varepsilon(\chi)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\times$$
$$\times\sum_{n\leqslant y_1}\bar{\chi}(n)\,n^{s-1}+iq^{-s}\Gamma(1-s)\sum_{l=0}^{q-1}\chi(\xi+l)\int_{C_0}\frac{e^{-(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz.$$

Заметим, что для $|t|>1$

$$\left|2(2\pi)^{s-1}q^{1/2-s}\varepsilon(\chi)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\right|<c_5q^{1/2-\sigma}t^{1/2-\sigma}. \tag{6}$$

Отсюда видно, что если во второй сумме правой части добавить член, отвечающий $n=y_1+1$, то получим ошибку, не превышающую $2c_5q^{1/2-\sigma}t^{1/2-\sigma}y^{\sigma-1}$. Поэтому можно написать:

$$L(s,\chi)=\sum_{n\leqslant\xi}\chi(n)\,n^{-s}+2(2\pi)^{s-1}q^{1/2-s}\varepsilon(\chi)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\times$$
$$\times\sum_{n<y}\bar{\chi}(n)\,n^{s-1}+iq^{-s}\Gamma(1-s)\sum_{l=0}^{q-1}\chi(\xi+l)\int_{C_0}\frac{e^{-(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz+$$
$$+Bqt^{1/2-\sigma}y^{\sigma-1}, \tag{7}$$

где $|B|<c_5$. Вообще B, не всегда одно и то же, будет обозначать абсолютно ограниченную величину.

Теперь для вывода (2) нам нужно будет оценить

$$\int\limits_{C_0} \frac{e^{-(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz.$$

§ 4. Рассмотрим сперва интеграл $\int\limits_{C_5}$. Полагая $z=u+iv$ и учитывая, что в начале C_5 $|1-e^{-z}|>\frac{c_6}{u+1/t}$, получим $(t>0)$:

$$\left|\int\limits_{C_5} \frac{e^{-(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz\right| < c_7 \int\limits_0^1 y^{\sigma-1}e^{-(\pi/2)t-(\xi+l)u/q}\frac{du}{u+1/t}+$$

$$+c_8\int\limits_1^\infty y^{\sigma-1}e^{-(\pi/2)t-(\xi+l)u/q}du < c_9 y^{\sigma-1}e^{(\pi/2)t}. \tag{8}$$

Рассмотрим $\int\limits_{C_4}$ (если C_4 существует). В точке $z=-2\pi i$, где $n=y_1+1$, имеем $|(-z)^{s-1}|\leqslant c_{10}y^{\sigma-1}e^{-(\pi/2)t}$, ибо $\arg(-z)=\pi/2$. Если z' — точка C_4, то

$$|\ln(-z')-\ln(-z)|\leqslant\frac{1}{|z''|}\frac{1}{t}<\frac{1}{ty},$$

$$|(-z')^{s-1}|\leqslant c_{11}y^{\sigma-1}e^{-(\pi/2)t+1/y}<ec_{11}y^{\sigma-1}e^{-(\pi/2)t},$$

$$\left|e^{-(\xi+l)z/q}\right|<e^{(\xi+l)/q\cdot 1/t},$$

длина контура меньше или равна $2\pi/t$, $|e^{-(\xi+l)z/q}|<e^{\xi+l/q\cdot 1/t}$. Если будем считать, что $(\xi+l)/q<t$, то это $<c_{13}$. В результате

$$\left|\int\limits_{C_4}\right|<c_{14}y^{\sigma-1}e^{-(\pi/2)t}. \tag{9}$$

§ 5. Оценим интеграл $\int\limits_{C_3}$. Здесь $-z=2\pi ye^{i\varphi}$, $\varphi\in[-\pi/2,\ \pi/2]$,

$$|(-z)^{s-1}|<c_{15}y^{\sigma-1}e^{-t\varphi},\quad \left|e^{-(\xi+l)z/q}\right|=e^{-\frac{\xi+l}{q}\cos\varphi\cdot 2\pi y},$$

$$|1-e^{-z}|>c_{15}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{y(\pi/2+\varphi)}\right)\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{y}\right)\right),$$

$$|1-e^{-z}|>c_{15}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{y(\pi/2-\varphi)}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{y}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right),$$

$|1-e^{-z}|>c_{15}$ для остальных φ.

Теперь введем x под условием $2\pi xy/q=t$. Предположим, что расстояние x до ближайшего целого числа $\operatorname{dist}(x)>1/4$, а потом снимем это ограничение. Число ξ пусть будет выбрано специально как целое число под условием $x-q<\xi<\xi+q-1<x$ (ближайшее справа от $x-q$). В таком случае

$$t-2\pi\frac{\xi+l}{q}y=y\left(\frac{t}{y}-\frac{2\pi(\xi+l)}{q}\right)=\frac{2\pi y}{q}(x-(\xi+l))\geqslant\frac{2\pi y\operatorname{dist}(x)}{q}>\frac{\pi y}{2q}.$$

Из этих оценок выводим

$$\left|\int\limits_{C_3}\right| < c_{16}y^\sigma \int\limits_0^{\pi/2} e^{t\varphi} e^{-\frac{\xi+l}{q}2\pi y\cos\varphi} \frac{d\varphi}{1/t + y(\pi/2-\varphi)} < c_{17}y^{\sigma-1}e^{(\pi/2)t} q \ln t. \quad (10)$$

§ 6. Интеграл $\left|\int\limits_{C_4}\right|$ оценивается так же, как $\left|\int\limits_{C_2}\right|$, с той лишь разницей, что $\arg(-2\pi yi) = -\pi/2$. Получаем, как в § 4,

$$\left|\int\limits_{C_4}\right| < c_{18}y^{\sigma-1}e^{(\pi/2)t}. \quad (11)$$

Для оценки интеграла $\int\limits_{C_1}$ заметим, следуя остроумной идее З. Суетуна [4], что

$$\frac{e^{-(\xi+l)z/q}(-z^{s-1})}{1-e^{-z}} = e^{-(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1} + \frac{e^{-((\xi+l)/q+1)z}}{1-e^{-z}}(-z)^{s-1}.$$

Первая функция справа не имеет полюсов в $|z|>0$ и допускает удобные деформации контура. Для второй функции

$$\left|e^{-((\xi+l)/q+1)z}\right| < e^{-u/4q-xu/q}.$$

Здесь

$$z = u + 2\pi iy, \quad \frac{\xi+l}{q} + 1 - \frac{x}{q} \geqslant \frac{1}{4q}.$$

Далее,

$$|(-z)^{s-1}| \leqslant y^{\sigma-1}e^{(\pi/2)t}e^{t\,\operatorname{arctg}(u/2\pi y)} \leqslant y^{\sigma-1}e^{(\pi/2)t}e^{xu/q},$$

$$|1-e^{-z}| > \left(\frac{1}{t}+u\right)c_{19} \ (u \leqslant 1), \quad |1-e^{-z}| > c_{19} \ (u > 1).$$

Отсюда

$$\left|\int\limits_{C_1} \frac{e^{-((\xi+l)/q+1)z}(-z)^{s-1}}{1-e^{-z}}\,dz\right| \leqslant c_{20}y^{\sigma-1}e^{(\pi/2)t}\int\limits_0^\infty e^{-u/4q}du +$$

$$+ c_{20}y^{\sigma-1}e^{(\pi/2)t}\int\limits_0^1 \frac{e^{-u/4q}}{1/t+u}\,du < c_{21}qy^{\sigma-1}e^{(\pi/2)t}\ln t. \quad (11a)$$

Остается оценить $\int\limits_{C_1} e^{(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1}\,dz$.

Заменим контур C_1 на контур C_2, затем C_3', являющийся частью $C_3: |z| = 2\pi y$, $\arg z \leqslant \pi$, затем часть отрицательной оси: C_3'' от $-2\pi y$ до 0 и C_3''' от 0 до ∞ по положительной оси. 0 обходится сколь угодно малым кружком, интеграл по коему сколь угодно мал.

Имеем:

$$\left|\int\limits_0^\infty e^{-(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1}\,dz\right| = \left|e^{-\pi i(s-1)}\left(\frac{\xi+l}{q}\right)^{-s}\Gamma(s)\right| < c_{22}e^{(\pi/2)t}x^{-\sigma}t^{\sigma-1/2}, \qquad (12)$$

$$\left|\int\limits_{s=0}^{-2\pi y} e^{-(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1}\,dz\right| < \int\limits_0^{2\pi y} v^{\sigma-1}e^{(\xi+l)v/q}dv <$$

$$< c_{23}\int\limits_0^y r^{\sigma-1}e^{tr/y}dr < c_{24}e^{(\pi/2)t}y^{\sigma-1}. \qquad (13)$$

Наконец, как и в § 5, получим:

$$\left|\int\limits_{C_3'} e^{-(\xi+l)z/q}(-z)^{s-1}\,dz\right| < c_{25}e^{(\pi/2)t}y^{\sigma-1}q. \qquad (14)$$

Собирая теперь оценки (8)—(14), подставляя в (7) и учитывая, что $|\Gamma(1-s)| < c_{26}t^{1/2-\sigma}e^{-(\pi/2)|t|}$, получим (2).

§ 7. Нам нужно избавиться от ограничения $\operatorname{dist}(x) \geqslant 1/4$. Допустим, что $x \geqslant y$. Тогда, так как $2\pi xy/q = t$, то $x \geqslant \sqrt{qt/2\pi}$. Изменение x на $O(1)$ влечет изменение y на величину $< c_{26}$, $qt/x^2 < c_{27}$, что создает ошибку $c_{28}q^{1/2-\sigma}t^{1/2-\sigma}y^{\sigma-1}$. Итак, для $x \geqslant y$ формула (2) доказана. Чтобы доказать ее при $x < y$, заменим s на $1-s$, $L(s,\chi)$ на $L(1-s,\bar\chi)$:

$$L(1-s,\bar\chi) = \sum_{n<x}\bar\chi(n)\,n^{s-1} + 2\,(2\pi)^{-s}q^{s-1/2}\varepsilon(\bar\chi)\,\frac{\cos}{\sin}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\times$$

$$\times\Gamma(s)\sum_{n<y}\chi(n)\,n^{-s} + R(q,\,-t,\,1-\sigma,\,x,\,y).$$

Деля на коэффициент при второй сумме, получим:

$$L(s,\chi) = \sum_{n<y}\chi(n)\,n^{-s} + 2\,(2\pi)^{s-1}\,q^{1/2-s}\,\frac{\sin}{\cos}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\times$$

$$\times\sum_{n<x}\bar\chi(n)\,n^{s-1} + c_4\theta\left(x^{\sigma-1}t^{1/2-\sigma} + y^{-\sigma}\right)\ln t.$$

Здесь уже x и y поменялись ролями; $y < x$, так что формула (2) доказана полностью.

§ 8. Располагая приближенным функциональным уравнением [2], мы начнем вывод (1) по методу Е. К. Титчмарша [3] и Г. Хогейзеля [5].

Для изучения нулей $L(s,\chi)$ вводим функцию Г. Хогейзеля [5]

$$\varphi_z(s) = L(s,\chi)\sum_{n\leqslant z}\chi(n)\,\mu(n)\,n^{-s},$$

где z будет указано в дальнейшем. Она имеет в каждой области не меньше нулей, чем $L(s, \chi)$. Пусть $N(\varphi_z, \sigma_0, T)$ — число ее нулей в $\sigma > \sigma_0$, $2 < t < T$. Если положим $\sigma_0 = 1/2 + \nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1/2$ и введем функцию [5]

$$N^*\left(\varphi_z, \frac{1}{2} + \nu, T\right) = \int_{1/2+\nu}^{\infty} N(\varphi_z, \sigma, T)\, d\sigma,$$

то она допускает удобное интегральное представление. Именно, если определим [5]

$$\arg \varphi_z(\sigma + iT) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \{\arg \varphi_z(\sigma + it + i\varepsilon) + \arg \varphi_z(\sigma + it - i\varepsilon)\},$$

то получим [5]

$$2\pi N^*\left(\varphi_z, \frac{1}{2} + \nu, T\right) = \int_{1/2+\nu}^{\infty} \arg \varphi_z(\sigma + iT)\, d\sigma - \int_{1/2+\nu}^{\infty} \arg \varphi_z(\sigma + 2iT)\, d\sigma + \\ + \int_{2}^{T} \ln \left| \varphi_z\left(\frac{1}{2} + \nu + it\right) \right| dt.$$

§ 9. Как и в [5], по методу Баклунда показываем для $z \leqslant T^2$, $\sigma \geqslant 1/2$

$$|\arg \varphi_z(\sigma + iT)| < c_{27} \ln(qT),$$

и отсюда

$$2\pi N^*\left(\varphi_z, \frac{1}{2} + \nu, T\right) = \int_{2}^{T} \ln \left| \varphi_z\left(\frac{1}{2} + \nu + it\right) \right| dt + R(q, T),$$
$$|R(q, T)| < c_{28} \ln(qT). \tag{15}$$

Пусть $T_0 = q^{20}$, $N(\varphi_z, \sigma_0, T, T_0)_\infty$ — число нулей $\varphi_z(s)$ в $\sigma \geqslant \sigma_0$, $T_0 \leqslant t \leqslant T$,

$$N^*(\varphi_z, \sigma_0, T, T_0) = \int_{1/2+\nu}^{\infty} N(\varphi_z, \sigma, T, T_0)\, d\sigma.$$

Так как число нулей $\varphi_z(s)$ в $\sigma \geqslant \sigma_0$, $2 < t < T_0$ не может превзойти $c_{29} T_0 \ln(qT_0) < c_{29} q^{21}$, то из (15) получим:

$$2\pi N^*\left(\varphi_z, \frac{1}{2} + \nu, T, T_0\right) = \int_{T_0}^{T} \ln \left| \varphi_z\left(\frac{1}{2} + \nu + it\right) \right| dt + R_1(q, T), \tag{16}$$

$$R_1(q, T) < c_{30}(\ln(qT) + q^{21}). \tag{17}$$

Наконец, так как $N(\varphi_z, 1/2 + \nu, T, T_0)$ — невозрастающая функция ν, получим при $\nu \geqslant 1/\ln T$:

$$N\left(\varphi_z, \frac{1}{2} + \nu, T, T_0\right) \leqslant \ln T \cdot N^*\left(\varphi_z, \frac{1}{2} + \nu - \frac{1}{\ln T}, T\right). \tag{18}$$

Далее, из (17) выводим

$$2\pi N^*\left(\varphi_z,\ \frac{1}{2}+\nu,\ T,\ T_0\right)\leqslant\frac{T-T_0}{2}\ln\left(\frac{1}{T-T_0}\int\limits_0^T|\varphi_z|^2\,dt\right)+R_1(q,\ T). \qquad (19)$$

Поэтому для доказательства основной теоремы (1) достаточно показать, что при $T\geqslant q^{50}$ можно подобрать такое $z=z(T)<T^2$, что при $s=1/2+\nu+it$

$$f_z(s)=\varphi_z(s)-1,\quad \int\limits_{T_0}^{T}|f_z(s)|^2\,dt<c_{30}T^{1-\nu/(1-\nu)}\ln^8 T. \qquad (20)$$

§ **10.** Имеем

$$f_z(s)=\varphi_z(s)-1=L(s,\ \chi)\sum_{n\leqslant z}\chi(n)\,\mu(n)\,n^{-s}-1.$$

Используем здесь приближенное функциональное уравнение (2). Полагая

$$F(s,\ \chi)=2\,(2\pi)^{s-1}\,q^{1/2-s}\,\varepsilon(\chi)\,\frac{\sin}{\cos}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s),$$

так что при $t>1$

$$|F(s,\ \chi)|<c_{31}q^{1/2-\sigma}t^{1/2-\sigma}, \qquad (21)$$

получим [3]

$$f_z(s)=\Phi_z(s)+F(s,\ \chi)\,\Psi_z(s)+R(s,\ q,\ x,\ y)\sum_{n\leqslant z}\chi(n)\,\mu(n)\,n^{-s}, \qquad (22)$$

где

$$\Phi_z(s)=\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\,n^{-s}\sum_{n\leqslant z}\chi(n)\,\mu(n)\,n^{-s}-1,$$

$$\Psi_z(s)=\sum_{n\leqslant y}\bar\chi(n)\,n^{s-1}\sum_{n\leqslant z}\chi(n)\,\mu(n)\,n^{-s},$$

$$|R(s,\ q,\ x,\ y)|<c_{32}q^2\left(x^{-\sigma}+y^{\sigma-1}t^{1/2-\sigma}\right)\ln t,\quad 2\pi xy=qt.$$

Предполагаем, что x зависит только от T, но не от t; тогда $y=qt/2\pi x$ есть функция t; z мы выбираем равным x/q. Имеем

$$\Phi_z(s)=\sum_{n=1}^{xz}a_n n^{-s},$$

причем $a_n=0\,(n\leqslant z)$ и $|a_n|\leqslant\tau(n)$ (число делителей n) для $z<n\leqslant xz$. Отсюда

$$\int\limits_{T_0}^{T}|\Phi_z(s)|^2\,dt=(T-T_0)\sum_{n=1}^{xz}a_n^2n^{-2\sigma}+\sum_{m,\ n=z}^{xz}a_m a_n(mn)^{-\sigma}\int\limits_{T_0}^{T}\left(\frac{n}{m}\right)^{it}dt\leqslant$$

$$\leqslant T\sum_{n=z}^{xz}\{\tau(n)\}^2\,n^{-2\sigma}+\sum_{\substack{m<n\leqslant xz\\ m,\ n}}\tau(m)\,\tau(n)\,(mn)^{-\sigma}\left|\ln\left(\frac{n}{m}\right)\right|^{-1}.$$

При $\sigma = 1/2 + \nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1/2$, получим, используя известные оценки С. Рамануджана [6]:

$$\sum_{n=z}^{xz} \{\tau(n)\}^2 n^{-2\sigma} < c_{33} z^{1-2\sigma} \ln^5 (xz) < c_{34} z^{-2\nu} \ln^5 T, \tag{23}$$

$$\sum_{\substack{m,\, n \\ m<n\leqslant xz}} \tau(m)\,\tau(n)\,(mn)^{-\sigma} \left| \ln\left(\frac{n}{m}\right)\right|^{-1} < c_{35}(xz)^{2-2\sigma} \ln^5 (xz) <$$

$$< c_{36}(xz)^{1-2\nu} \ln^5 T, \tag{24}$$

$$\int_{T_0}^{T} |\Phi_z(s)|^2\, dt < c_{37} (Tz^{-2\nu} + (xz)^{1-2\nu}) \ln^5 T. \tag{25}$$

Если $T/2 > T_0$, то это и подавно верно для интеграла $\int\limits_{T/2}^{T}$.

Далее, полагая

$$T_1 = \max\left(T_0,\ \frac{2\pi x m}{q},\ \frac{2\pi x n}{q}\right),\ \ Y = \frac{qT}{2\pi x},$$

получим:

$$\int_{T_0}^{T} |\Psi_z(s)|^2\, dt = \sum_{m<Y} m^{\sigma-1} \sum_{n<Y} n^{\sigma-1} \sum_{\nu\leqslant z} \mu(\nu)\,\nu^{-\sigma} \sum_{r\leqslant z} \mu(r)\, r^{-\sigma} \times$$

$$\times \int_{T_1}^{T} \bar{\chi}(mr)\,\chi(\nu n)\left(\frac{mr}{\nu n}\right)^{it} dt.$$

Пусть Σ_1 — сумма по числам с условием $mr = \nu n$, Σ_2 — сумма по остальным числам, тогда

$$|\Sigma_1| \leqslant T \sum_{mr=n\nu} m^{\sigma-1} n^{\sigma-1} \nu^{-\sigma} r^{-\sigma}.$$

Последняя сумма оценена у Е. К. Титчмарша [3]:

$$|\Sigma_1| \leqslant T \sum_{\nu<Y} \nu^{2\sigma-2} \left\{\tau(\nu)^2 + TY^{4\sigma-2} \sum_{Y\leqslant\nu\leqslant Yz} \nu^{-2\sigma} \{\tau(\nu)\}^2\right\}.$$

Согласно (23), это не превосходит

$$c_{38} T Y^{2\nu} \ln^5 (Yz). \tag{26}$$

Далее [3], как и в (24),

$$|\Sigma_2| \leqslant 2 \sum_{mr\neq n\nu} m^{\sigma-1} n^{\sigma-1} \nu^{-\sigma} r^{-\sigma} \left| \ln \frac{mr}{n\nu}\right|^{-2} <$$

$$< 2Y^{4\nu} \sum_{\substack{\mu,\, \nu<Yz \\ \mu<\nu}} \tau(\mu)\,\tau(\nu)\,(\mu\nu)^{-\sigma} \left|\ln \frac{\mu}{\nu}\right|^{-1} < c_{39} Y^{4\sigma} (Yz)^{1-2\nu} \ln^5 T. \tag{27}$$

Учитывая теперь, что $|F(s,\chi)| < c_{31} q^{1/2-\sigma} t^{1/2-\sigma}$, и рассматривая $\int\limits_{T/2}^{T} + \int\limits_{T/4}^{T/2} + \ldots + \int\limits_{T_0}^{T/2^r}$, получим окончательно:[1)]

$$\int\limits_{T_0}^{T} \{|\Phi_x(s)|^2 + |F(s,\chi)\Psi_x(s)|^2\}\,dt < c_{40} T \ln^6 T \Big(Y^{2\nu} + Y^{4\nu}(Yz)^{1-2\nu}\frac{1}{T} + $$
$$+ z^{-2\nu} + (xz)^{1-2\nu}\frac{1}{T}\Big) q^{-2\nu} T^{-2\nu}. \qquad (28)$$

$\ln^6 T$ вместо $\ln^5 T$ получается от сложения $\int\limits_{T/2}^{T} + \int\limits_{T/4}^{T/2} + \ldots$ Теперь положим $x = T^{1/2(1-\nu)}$, $z = x/q = q^{-1}T^{1/2(1-\nu)}$, $Y = qT/2\pi x$. Тогда оценка (28) не превышает

$$c_{40} q^{2\nu} T^{1-\frac{\nu}{(1-\nu)}} \ln^6 T. \qquad (29)$$

Наконец,

$$\int\limits_{T_0}^{T} \Big|\sum_{n \leqslant z} \chi(n)\mu(n) n^{-s}\Big|^2 |R(s,q,x,y)|^2\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T/2}^{T} + \int\limits_{T/4}^{T/2} + \ldots + \int\limits_{T_0}^{T/2^r} \leqslant c_{40} q^{2\nu} T^{1-\nu/(1-\nu)} \ln^6 T.^{2)} \qquad (30)$$

Формулы (29) и (30) вместе доказывают (20), и тогда, по сказанному в § 9, (18) и (19) доказывают основную теорему (1).

Литература

1. Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie. Bd II. Leipzig, 1927. 308 S.
2. Линник Ю. В. О возможности единого метода в некоторых вопросах «аддитивной» и «дистрибутивной» теории простых чисел. — ДАН СССР, 1945, т. 49, № 1, с. 3—7.
3. Titchmarsh E. C. — Proc. London Math. Soc., 1929, vol. 30, p. 319—321.
4. Suetuna Z. — Japan. J. Math., 1932, vol. 9, N 2, p. 111—116.
5. Hoheisel G. — Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1930, S. 72—82.
6. Ramanujan S. Collected papers. Cambridge, 1927. 355 p.

---

1) Передавая роль T числам $T/2^k$, $0 \leqslant k \leqslant r$.

2) Например, $\int\limits_{T/2}^{T} |\Sigma|^2 |R|^2\,dt \leqslant \sup |R|^2 \int\limits_{T/2}^{T} |\Sigma|^2\,dt$.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ГОЛЬДБАХА—ВИНОГРАДОВА

Мат. сб., 1946, т. 19, вып. 1, с. 3—8

§ 1. В заметке [1] я набросал решение проблемы Гольдбаха чистым методом Римана—Адамара, с помощью L-рядов и контурного интегрирования, присоединив некоторые теоремы о густоте нулей L-рядов. В настоящей работе я изложу подробное доказательство теоремы о трех простых числах методом Римана—Адамара, дополняя, таким образом, условное решение Харди—Литтлвуда.

§ 2. Нашим основным инструментом будет следующая лемма, подробное доказательство которой изложено в моей работе [2].

Фундаментальная лемма. *Пусть* $q \geqslant 1$ — *натуральное число;* $\chi(n)$ — *примитивный характер* $(\bmod q)$, $L(w, \chi)$ — *соответствующий* L-*ряд,*

$$w = \sigma + it, \quad T \geqslant q^{50}, \quad \beta \geqslant 1, \quad \nu = \beta - \frac{1}{2} \geqslant 0.$$

Тогда число нулей $L(w, \chi)$ *в прямоугольнике* $\beta \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$ *будет*

$$Q(\beta, T) < c_1 q^{2\nu} T^{1-\nu/(1-\nu)} \ln^{10} T + c_2 q^{30}, \tag{1}$$

где c_1 *и* c_2 — *абсолютные константы.*

§ 3. Пусть

$$S(N, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\, e^{-n/N} e^{-2\pi i n \vartheta},$$

где N — нечетное число, которое мы желаем разложить на три простых числа. Тогда

$$Q(N) = e \int_0^1 (S(N, \vartheta))^3 e^{2\pi i N \vartheta} d\vartheta + O(N^{3/2+\varepsilon}),$$

где

$$Q(N) = \sum_{p+p'+p''=N} \ln p \ln p' \ln p''.$$

Пусть

$$r = \ln N, \quad \tau = r^{10000}, \quad H_1 = \tau^{100}.$$

Каждое $\alpha \in [0, 1]$ мы аппроксимируем непрерывными дробями

$$\vartheta = \frac{a}{q} + \alpha, \quad |\alpha| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad q \leqslant \tau, \quad \tau = r^{10000}. \tag{2}$$

Числа ϑ, для коих $|\alpha| \leqslant H_1/N = \tau^{1000}/N$, образуют множество $\mathfrak{M}$ типа major arcs [3].

Поведение $S(N, \vartheta)$ для $\vartheta \in \mathfrak{M}$, как хорошо известно, изучается классическим методом Римана—Адамара с добавлением теоремы Зигеля [4] или Пейджа [5]. При этом интеграл

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} S(N, \vartheta)^3 e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta$$

образует главный член проблемы.

Остающееся множество чисел ϑ назовем $\mathfrak{m}$. Для $\vartheta \in \mathfrak{m}$

$$\vartheta = \frac{a}{q} + \alpha, \quad \frac{1}{q\tau} \geqslant |\alpha| \geqslant \frac{H_1}{N}, \quad q \leqslant \tau. \tag{3}$$

Покажем теперь, как можно исследовать $S(N, \vartheta)$ при $\vartheta \in \mathfrak{m}$ также методом Римана—Адамара.

§ 4. Пусть χ — примитивный характер $(\bmod\, q)$, где q удовлетворяет (3); $E(\chi) = 1$, если χ — главный характер, и $E(\chi) = 0$, если χ — неглавный характер, а ρ пробегает критические нули $L(w, \chi)$.

Если x — число с $Rx > 0$, то, согласно Литтлвуду [1], если $L(0, \chi) \neq 0$, то

$$S(N, \alpha, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\Lambda(n) e^{-nx} = E(\chi) x^{-1} - \sum_{\rho} x^{-\rho}\Gamma(\rho) - \frac{L'}{L}(0, \chi) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} x^{-w}\left(-\frac{L'}{L}(w, \chi)\right)\Gamma(w)\, dw;$$

если $L(0, \alpha) = 0$, появляются несущественные изменения. Пусть $x = 1/N + 2\pi i\alpha$, где α удовлетворяет (3). Тогда $|x| < 1$. Для оценки остаточного члена

$$R = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} x^{-w}\left(-\frac{L'}{L}(w, \chi)\right)\Gamma(w)\, dw$$

заметим, что на $\sigma = -1/2$

$$\frac{L'}{L}(w, x) \ll \ln q(|t| + 2), \qquad x^{-w} = e^{-w\ln|x| - iw\operatorname{arc} x},$$

$$|e^{-w\ln|x|}| < 1, \quad |e^{-iw\operatorname{arc} x}| \leqslant e^{|t|\operatorname{arc} x}, \quad \Gamma(w) \ll \frac{1}{|t|} e^{-(\pi/2)|t|}.$$

Беря $\eta = \pi/2 - \operatorname{arc} x = \operatorname{arctg}(1/2\, \pi N\alpha)$, получаем

$$R \ll \int\limits_{2}^{\infty} e^{(\operatorname{arc} x - \pi/2)t} \frac{\ln qt}{t}\, dt \ll \ln^3 \frac{1}{\eta}.$$

При $\vartheta \in \mathfrak{m}$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi N\alpha} > \frac{1}{4\pi N\alpha}, \qquad R \ll (\ln N\alpha)^3.$$

Далее, $\frac{L'}{L}(0, \chi) \ll q$, $x^{-1} \ll \alpha^{-1}$. Отсюда

$$S(N, \alpha, \chi) \ll \alpha^{-1} + (\ln N\alpha)^3 + \left|\sum_{\rho} x^{-\rho}\Gamma(\rho)\right|. \tag{4}$$

§ 5. Пусть $\nu_0 = (\ln\ln N)/\ln N$. Для оценки $\left|\sum_{\rho} x^{-\rho}\Gamma(\rho)\right|$ разбиваем критическую полосу σ на полосу σ_0: $0 \leqslant \sigma \leqslant 1/2 + \nu_0 = \beta_0$, и ряд полос σ_β: $\beta \leqslant \sigma \leqslant \beta + 1/\ln N$, $\beta \geqslant 1/2 + \nu_0$. Пусть $\alpha > 0$, $N_0 \geqslant N\alpha$; как хорошо известно [5], тривиальная оценка числа нулей $L(w, \chi)$ в прямоугольнике $0 \leqslant \sigma \leqslant \beta$, $|t| \leqslant N_0$ будет

$$Q_L(\beta, N_0) \ll N_0 \ln(qN_0).$$

Учитывая, что

$$|\Gamma(\beta + it)| < c_3 t^{\beta - 1/2} e^{-(\pi/2)|t|}, \quad |t| \geqslant 1, \quad -1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1, \tag{5}$$

а $|x| \sim 2\pi\alpha$, и полагая $\rho_k = \beta_k + it_k$, получим:

$$\left|\sum_{\rho_k \in \sigma_{\beta_0}} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)\right| \ll \alpha^{-\beta_0} \sum_{\rho_k \in \sigma_{\beta_0}} e^{(\operatorname{arc} x - \pi/2)|t_k|} |t_k|^{\beta_k - 1/2} \ll$$

$$\ll \alpha^{-\beta_0} \sum_{\rho_k \in \sigma_{\beta_0}} e^{-|t_k|/4\pi N\alpha} |t_k|^{\beta_0 - 1/2} \ll \alpha^{-\beta_0} N\alpha \ln(N\alpha)(N\alpha)^{\nu_0} \ll \alpha^{1/2 - \nu_0} N^{2\nu_0} N.$$

Разумеется, знак $\ll$ надо понимать как равномерный по χ, N, α, ν.

Далее, $\alpha \leqslant 1/q\tau$, $\tau = r^{10000}$. Отсюда

$$\alpha^{-\nu_0} \ll (\ln N)^{20000\nu_0} \ll 1, \qquad N^{2\nu_0} = \ln^2 N = r^2.$$

И, наконец,

$$\alpha^{1/2 - \nu_0} N^{2\nu_0} N \ll \frac{Nr^2}{(q\tau)^{1/2}} < \frac{N}{q^{1/2}\tau^{1/4}}. \tag{6}$$

§ 6. Для $1/2 + \nu_0 \leqslant \beta \leqslant 0.6$, т. е. $\nu_0 \leqslant \nu \leqslant 0.1$, применяем фундаментальную лемму (неравенство (1)). Заметим, что $N_0 \geqslant N\alpha > H_1 = \tau^{100} \geqslant q^{100}$. В силу (1)

$$Q_L(\beta, N_0) < c_1 q^{2\nu} N_0^{1 - \nu/(1-\nu)} \ln^{10} N_0 + c_2 q^{30}.$$

Отсюда

$$\left|\sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)\right| \ll \alpha^{-1/2 - \nu} \sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} e^{-|t|/4\pi N\alpha} |t_k|^{\alpha} \ll$$

$$\ll (N\alpha)^{1 - \nu/(1-\nu)} q^{2\nu} (N\alpha)^{\nu} \alpha^{-1/2 - \nu} \ln^{10} N \ll (N\alpha)^{1 - \nu^2} q^{2\nu} \alpha^{1/2 - \nu} r^{10} =$$

$$= N^{1 - \nu^2} \alpha^{1/2 - \nu - \nu^2} r^{10} q^{2\nu} \leqslant \frac{Nq^{2\nu} r^{10}}{(q\tau)^{1/2 - \nu - \nu^2}} \ll \frac{N}{q\tau^{1/4}}. \tag{7}$$

§ 7. Для $0.1 \leqslant \nu \leqslant 1/3$

$$\left|\sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)\right| \ll a^{-1/2-\nu}(N\alpha)^{1-\nu/(1-\nu)}(N\alpha)^{\nu}q^{2\nu}\ln N \ll$$

$$\ll N^{1-\nu^2}\alpha^{3/2-1/(1-\nu)}q^{2\nu} \ll N^{1-0.01}q^{2\nu},$$

так как

$$0.1 \leqslant \nu \leqslant \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{2}-\frac{1}{1-\nu} \geqslant 0.$$

Но $q \leqslant \tau = r^{10000}$; следовательно,

$$\left|\sum_{\rho_k \in \sigma_\beta} x^{\rho_k}\Gamma(\rho_k)\right| \ll \frac{N}{q^{1/2}N^{0.005}}. \tag{8}$$

Если $1/3 \leqslant \nu \leqslant 0.4$, то $3/2-\frac{1}{1-\nu}<0$ и максимум оценки достигается при минимуме $\alpha \geqslant H_1/N$. В этом случае наше количество

$$\ll N^{1-\nu^2/(1-\nu)}r^{10}q^{2\nu}\left(\frac{N}{H_1}\right)^{1/(1-\nu)-3/2} \ll \frac{N^{1/2+\nu}q^{2\nu}r^{10}}{H^{(1/(1-\nu)-3/2)}} < N^{0.9}qr^{10} < \frac{N}{q^{1/2}N^{0.05}}. \tag{9}$$

Наконец, при $0.4 \leqslant \nu \leqslant 1/2$, заметим, что наша сумма имеет оценку

$$\alpha^{-1/2-\nu}(N\alpha)^{1-\nu/(1-\nu)}r^{10}q^{2\nu}(N\alpha)^{\nu} < N^{1-\nu^2/(1-\nu)}r^{10}q^{2\nu}\left(\frac{N}{H_1}\right)^{1/(1-\nu)-3/2} \ll$$

$$\ll \frac{N^{1/2+\nu}q^{2\nu}r^{10}}{H_1^{5/3-3/2}} \ll \frac{N}{qH_1^{0.1}}. \tag{10}$$

§ 8. Если $\vartheta \in \mathfrak{m}$, $\vartheta = a/q+\alpha$, то, собирая оценки (4)—(10), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)e^{-n/N}e^{-2\pi i\alpha n} \ll$$

$$\ll r\left(|\alpha|^{-1}+(\ln N\alpha)^3+\frac{N}{q^{1/2}\tau^{1/4}}+\frac{N}{q^{1/2}N^{0.005}}+\frac{N}{q^{1/2}N^{0.05}}+\frac{N}{qH^{0.1}}\right);$$

$$|\alpha|^{-1} \ll \frac{N}{qH_1^{1/2}} \text{ для } \vartheta \in \mathfrak{m}.$$

Отсюда выводим непосредственно, что для достаточно малого $c_5 > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\Lambda(n)e^{-n/N}e^{-2\pi i\alpha n} \ll \frac{N}{q^{1/2+c_5}\tau^{0.1}}. \tag{11}$$

Отсюда находим для $\vartheta = a/q + \alpha$, $\vartheta \in \mathfrak{m}$:

$$S(N, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-n/N} e^{-2\pi i \vartheta n} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-n/N} \times$$

$$\times e^{-2\pi i (a/q + \alpha) n} = \sum_{\substack{(l, q)=1 \\ l \pmod q}} e^{-2\pi i (a/q) l} \sum_{n \equiv l \pmod q} \Lambda(n) e^{-n/N} e^{-2\pi i \alpha n} +$$

$$+ O(q^{\varepsilon}) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \left(\sum_{l} \bar{\chi}(l) e^{-2\pi i a l/q} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) e^{-n/N} e^{-2\pi i \alpha n} + O(q^{\varepsilon}).$$

Приняв в расчет, что

$$\sum_{l} \bar{\chi}(l) e^{-2\pi i a l/q} \ll q^{1/2+\varepsilon},$$

и подставив оценку (11), получим:

$$S(N, \vartheta) \ll \frac{q^{1/2} \varphi(q)}{\varphi(q)} \frac{q^{\varepsilon} N}{q^{1/2 + c_5} \tau^{0.1}} \ll \frac{N}{\tau^{0.1}} < \frac{N}{(\ln N)^{1000}}.$$

Этого и достаточно для решения проблемы Гольдбаха.

Литература

1. Линник Ю. В. — ДАН СССР, 1945, т. 49, № 1, с. 3—7.
2. Линник Ю. В. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, т. 10, № 1, с. 35—46.
3. Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie. Bd II. Leipzig, 1927. 308 S.
4. Siegel C. L. Über die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper. — Acta aritbm., 1935, Bd 1, S. 83—86.
5. Page A. On the number of primes in an arithmetical progression. — Proc. London Math. Soc., 1935, vol. 39, p. 116—141.
6. Littlewood J. E. On the class-number of the corpus $P(-k)$. — Proc. London Math. Soc., 1928, vol. 27, p. 358—372.

ИДЕЯ ПЛОТНОСТЕЙ НУЛЕЙ L-РЯДОВ В ТЕОРИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Вестник ЛГУ, 1946, № 2, с. 40—42

В теории простых чисел можно отметить два основных метода. Первый из них создан в основном работами Эйлера, Дирихле, Римана, Адамара, Харди и Литтлвуда. Этот метод состоит во введении особого типа специальных функций, связанных с простыми числами, и получении свойств последних на основе анализа этих функций. Второй метод зародился более 2 тыс. лет назад. Это — решето Эратосфена, разработанное и поставленное на необыкновенную высоту работами Вигго Бруна и академика И. М. Виноградова уже в новейшее время.

Основными функциями первого метода являются L-ряды. Пусть $\chi(n)$ — характер целого числа n по модулю D. L-ряд определяется так:

$$L(s, \chi)=\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} s>1, \quad s=\sigma+ti$$

— комплексное переменное; ряд оказывается продолжимым на всю плоскость; если $\chi(n)$ принимает хоть одно значение, отличное от 0 и 1, это целая функция, в противном же случае — мероморфная функция, обращающаяся в целую при умножении на $(s-1)$.

Связь с простыми числами получается с помощью тождества Эйлера:

$$L(s, \chi)=\prod_{p} \frac{1}{1-\chi(p)/p^{s}}, \quad \sigma>1.$$

Чтобы «выделить» простые числа, обычно рассматривают логарифмическую производную

$$\frac{L'}{L}(s, \chi).$$

Эта последняя имеет простые полюсы в нулях $L(s, \chi)$. Поэтому изучение нулей $L(s, \chi)$ приобретает исключительное значение в теории простых чисел. В особенности существенна связь асимптотических законов распределения простых чисел в арифметических прогрессиях с расположением нулей $L(s, \chi)$.

Главным достижением первого метода является закон распределения Адамара—Валле Пуссена (1896 г.):

$$\pi(N, D, l)=\frac{1}{\varphi(D)} \int_{2}^{N} \frac{dx}{\ln x}+R_{N}, \quad (l, D)=1, \quad 0<l<D.$$

Здесь $\pi(N, D, l)$ обозначает число простых чисел, не превосходящих числа N, в арифметической прогрессии $Dx+l$, для которой первый член l взаимно прост с разностью D. Очевидно, что только такие прогрессии могут содержать бесконечно много простых чисел. Число таких прогрессий равно так называемой функции Эйлера $\varphi(D)$.

Смысл формулы заключается в том, что простые числа распределяются по различным прогрессиям с одной и той же разностью приблизительно поровну и функция $\pi(N, D, l)$, характеризующая это распределение, оказывается приближенно равной функции

$$\frac{1}{\varphi(D)} \int_{2}^{N} \frac{dx}{\ln x},$$

хорошо известной и имеющей очень плавный ход изменения.

Остаточный член формулы R_N характеризует погрешность этого приближенного равенства. Важнейшей задачей теории простых чисел является возможно лучшая оценка R_N. Оказывается, что остаточный член $R_N = o(N/\ln N)$ может быть оценен тем лучше, чем лучше известно поведение нулей $L(s, \chi)$ для всех $\chi \pmod D$. В частности, если выполняется так называемая расширенная гипотеза Римана — «все нули $L(s, \chi)$ с реальной частью > 0 лежат на прямой $\sigma = 1/2$», то имеем

$$|R_N| \leqslant c_0 D \sqrt{N} \ln^2(ND),$$

откуда величина наименьшего простого числа прогрессии $Dx+l$ получается порядка $D^{2+\varepsilon}$. Так как гипотеза эта не доказана, то при использовании лишь доказанных фактов о нулях $L(s, \chi)$ до последних лет такую величину наименьшего простого числа в прогрессии могли оценить лишь как $o(\exp D^{\varepsilon})$. В 1930 г. появилась важная работа Г. Хогейзеля, продолженная и развитая Н. Г. Чудаковым (1936 г.). Г. Хогейзель показал, что самых минимальных сведений о конфигурации нулей $\zeta(s)$ [$\zeta(s)$ есть единственная L-функция для $D=1$] достаточно для установления таких фактов о расстоянии соседних простых чисел, которые до тех пор казались недостижимыми без гипотезы Римана. Н. Г. Чудаков показал, что если p_n и p_{n+1} — соседние простые числа, то $p_{n+1} - p_n = O(p_n^{3/4+\varepsilon})$. В этих работах выявилось новое, чрезвычайно важное обстоятельство: для указанной задачи о расстоянии соседних простых чисел существенна не столько «конфигурация» нулей $\zeta(s)$, сколько их густота. Пусть $\sigma = 1/2 + v$, $v > 0$; пусть T — большое число. Рассмотрим прямоугольник

$$\frac{1}{2} + v \leqslant \sigma \leqslant 1; \quad |t| \leqslant T.$$

Число нулей $\xi(s)$ в нем назовем $N(\sigma, T)$. Это число (которое равно нулю, если верна гипотеза Римана) и характеризует густоту нулей. В частности, Г. Хогейзель доказал, что $N(\sigma, T) < cT^{1-4v^2} \ln^7 T$, а Е. К. Титчмарш установил, что

$$N(\sigma, T) < c_0 T^{1-v/(1-v)+\varepsilon}.$$

Так в теорию простых чисел вошла идея «густоты нулей». Дальнейшее развитие эта идея получила в работах автора (1943—1945 гг.). Прежде всего им был применен «аналог» этой идеи в теории L-рядов для данного большого модуля D. Этот большой модуль D может играть роль большого T в написанных выше формулах, а под густотой нулей $L(s, x)$ нужно тогда понимать количество L-рядов, имеющих нули в определенном участке.

И тогда с теоремой о расстоянии соседних простых чисел сопоставилась новая, давно ожидаемая теорема: «Наименьшее простое число в прогрессии $Dx+l$ с $0 < l < D$; $(l, D) = 1$ не превосходит числа в фиксированной раз навсегда степени c_0; $p_{\min}(l, D) < D^{c_0}$». Этим же путем получились новые факты о распределении характеров $\chi(n)$ по модулю D на интервалах порядка D^k.

В 1942 г. с помощью второго метода И. М. Виноградовым получена была замечательная теорема о распределении характеров $\chi(p+g)$ на интервале $[1, D^k]$. Здесь p — простое число, а g — любое число $\not\equiv 0 \pmod D$. Если $g \equiv 0 \pmod D$ (а этот случай наиболее интересен), метод не работал.

В 1943 г. автор применил к этому вопросу метод «густоты нулей», что дало возможность не только получить теорему И. М. Виноградова для $g \not\equiv 0 \pmod D$, но и осветить случай $g \equiv 0 \pmod D$, где, однако, результаты получились слабее. Наконец, в 1945 г. первый метод, дополненный теоремами о «густоте», дал возможность доказать основной результат второго метода — теорему Гольдбаха—Виноградова (1937 г.) о том, что каждое достаточно большое нечетное число может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. Именно, в 1945 г. была применена новая «фундаментальная лемма»: если $L(s, \chi)$ — L-ряд $\pmod q$, χ — примитивный характер, $T > q^{50}$, то

$$N(\sigma, T, \chi) < c_0 q^{2\nu} T^{1-\sigma/(1-\sigma)} \ln^{10} T + q^{80}.$$

Введение ее позволило доказать теорему о трех простых числах чистым первым методом, не используя известных оценок И. М. Виноградова 1937 г. Этим было достигнуто единство метода в теории простых чисел: закон простых чисел и теорема о трех простых числах — основные достижения теории простых чисел — могут быть выведены совершенно единообразно.

О НЕКОТОРЫХ ГИПОТЕЗАХ ТЕОРИИ ХАРАКТЕРОВ ДИРИХЛЕ

Совместно с А. А. Реньи

Изв. АН СССР. Сер. мат., 1947, т. 11, № 6, с. 539—546

В настоящей статье мы занимаемся следующими известными гипотезами, принадлежащими Виноградову.

Пусть $\chi(n)$ — неглавный примитивный характер $\bmod D$. Всюду, кроме теоремы 1, $\chi(n)$ будет считаться вещественным характером, $\pm D$ — фундаментальным дискриминантом.

Гипотеза Ia. *Пусть $N_{\min}$ означает наименьшее положительное число, для которого $\chi(n) \neq +1$. Тогда $N_{\min} < D^{1/k}$ для любого $k > 0$ и достаточно большого $D > D_0(k)$.*

Мы будем формулировать эту гипотезу также в следующей более слабой форме.

Гипотеза Ib. *Пусть $N^*_{\min}$ означает число с наименьшей абсолютной величиной ($\neq 0$), для которого $\chi(n) \neq +1$. Тогда $N^*_{\min} < D^{1/k}$ для $D > D_0(k)$ и любого $k > 0$.*

Очевидно, гипотеза Ib верна для $\chi(-1)=-1$ и эквивалентна гипотезе Ia в случае $\chi(-1)=+1$.

Гипотеза II. *Если $P_{\min}$ означает наименьшее простое число, для которого $\chi(p)=+1$, то $P_{\min}<D^{1/k}$ для любого $k>0$ и $D>D_0(k)$.*[1]

Ниже будут доказаны теоремы, освещающие в некоторой степени связь этих гипотез с двумя другими проблемами аналитической теории чисел, именно с вопросами об истинном порядке величин

$$M(\chi)=\max_{1\leqslant x\leqslant D-1}\left|\sum_{n=1}^{x}\chi(n)\right| \tag{1}$$

и

$$L(1,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}. \tag{2}$$

Относительно $M(\chi)$ известны следующие оценки:

$$\sqrt{\frac{D}{12}}<M(\chi)<\sqrt{D}\ln D. \tag{3}$$

Верхняя оценка принадлежит Пойа [2], нижняя оценка следует из формулы Парсеваля для ряда Фурье функции $S(x)=\sum_{n\leqslant xD}\chi(n)$ (см. также статью [3]).[2] Что касается $L(1,\chi)$, то из (3) имеем

$$|L(1,\chi)|<\ln D. \tag{4}$$

Следуя Литтлвуду [4], из расширенной гипотезы Римана можно вывести, что

$$\frac{1+o(1)}{2b\ln\ln D}\leqslant|L(1,\chi)|\leqslant(1+o(1))\,2c\ln\ln D, \tag{5}$$

где $b=(6/\pi^2)e^C$ и $c=e^C$ и C — постоянная Эйлера.

Если $\chi(n)$ — вещественный характер, то известно, что $L(1,\chi)$ положительно (основная лемма в теореме Дирихле о прогрессиях) и что

$$L(1,\chi)>\frac{c(\varepsilon)}{D^{\varepsilon}}$$

для любого $\varepsilon>0$. Последнее неравенство эквивалентно знаменитому неравенству Зигеля [5]. Мы докажем следующие теоремы.

---

[1] Эта гипотеза имеет весьма важное значение для теории положительных тернарных квадратичных форм (см. [1]).

[2] Корректной формой нижней оценки в (3) является $\sqrt{(D/12)\Pi_{p|D}(1-1/p^2)}<M(\chi)$, эта оценка неулучшаема (см.: A. Sárközy. Some remarks concerning irregularities of distribution of sequences of integers in arithmetic progressions. IV. — Acta math. Acad. sci. hung., 1977, vol. 30, N 1—2, p. 155—162). (*Прим. ред.*).

Теорема 1. *Либо верна гипотеза* Ib, *либо* $M(\chi) < c\sqrt{D}$.

Теорема 2. *Если* $\chi(n)$ — *вещественный характер, то либо верна гипотеза* II, *либо* $M(\chi) < c\sqrt{D}$.

Теорема 3. *Если* $\chi(n)$ — *вещественный характер, то либо верна гипотеза* Ia, *либо* $L(1, \chi) > c \ln D$.

Здесь c означает константу, зависящую только от k.

Эти три теоремы можно выразить в более сжатой форме. Очевидно, три вышеуказанные гипотезы эквивалентны следующим утверждениям.

Гипотеза Ia. $\lim\limits_{D\to\infty} \frac{\ln N_{\min}}{\ln D} = 0.$

Гипотеза Ib. $\lim\limits_{D\to\infty} \frac{\ln N^*_{\min}}{\ln D} = 0.$

Гипотеза II. $\lim\limits_{D\to\infty} \frac{\ln P_{\min}}{\ln D} = 0.$

Далее сформулируем следующие гипотезы.

Гипотеза III. $\lim\limits_{D\to\infty} \frac{M(\chi)}{\sqrt{D}\ln D} = 0.$

Гипотеза IV. $\lim\limits_{D\to\infty} \frac{|L(1, \chi)|}{\ln D} = 0.$

Хотя мы ничего не можем сказать об их верности или неверности, мы получаем следующие теоремы.

Теорема 1b. $\lim\limits_{D\to\infty} \frac{\ln N^*_{\min}}{\ln D} \frac{M(\chi)}{\sqrt{D}\ln D} = 0.$

Теорема 2b. $\lim\limits_{D\to\infty} \frac{\ln P_{\min}}{\ln D} \frac{M(\chi)}{\sqrt{D}\ln D} = 0.$

Теорема 3b. *Из* $\varlimsup\limits_{D\to\infty} \frac{\ln N_{\min}}{\ln D} > 0$ *следует*

$$\varlimsup_{D\to\infty} \frac{|L(1, \chi)|}{\ln D} > 0.$$

Последние теоремы содержатся соответственно в теоремах 1, 2 и 3. Первая из наших теорем доказывается с помощью следующей общей леммы.

Лемма. *Пусть* $a(n)$ *означает мультипликативную функцию, такую, что* $a(n \cdot m) = a(n) \cdot a(m)$ *для* $(m, n) = 1$, *и пусть* $|a(n)| \leqslant 1$. *Пусть, далее,* $f(t)$ *периодична с периодом* 1, *а* $G_k(\eta)$ — *совокупность целых чисел* $\leqslant \eta x$ $(0 < \eta \leqslant 1)$, *все простые множители которых* $\leqslant x^{1/k}$. *Тогда*

$$\left| \sum_{n \in G_k(\eta)} \frac{a(n) f(n\vartheta)}{n} \right| \leqslant c \max_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1}} \left| \sum_{1}^{n} \frac{a(m) f(m\vartheta)}{m} \right| = cM,$$

где c *зависит только от* k.

Доказательство. Пусть $H_k(\eta)$ — множество целых чисел $\leqslant \eta x$, все простые множители которых $> x^{1/k}$. Имеем

$$\sum_{n \in G_k(\eta)} \frac{a(n) f(n\vartheta)}{n} = \sum_{n \leqslant \eta x} \frac{a(n) f(n\vartheta)}{n} - \sum_{r \in H_k(\eta)} \frac{a(r)}{r} \sum_{n \in G_k(\eta/r)} \frac{a(n) f(nr\vartheta)}{n}. \quad (6)$$

Отсюда следует, что

$$\left| \sum_{n \in G_k(\eta)} \frac{a(n) f(n\vartheta)}{n} \right| \leqslant M + \left(\sum_{r \in H_k(\eta)} \frac{1}{r} \right) \cdot \max_{\substack{r \in H_k(\eta) \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 1}} \left| \sum_{n \in G_k(\eta/r)} \frac{a(n) f(n\varphi)}{n} \right|, \quad (7)$$

где

$$M = \max_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1}} \left| \sum_{1}^{n} \frac{a(m) f(m\vartheta)}{m} \right|. \quad (8)$$

С помощью известной теоремы Мертенса получаем

$$\sum_{r \in H(\eta)} \frac{1}{r} \leqslant \prod_{x^{1/k} < p \leqslant x} \frac{1}{1 - 1/p} \leqslant 2k, \text{ если } x > e^{15k^2}. \quad (9)$$

Применяя это неравенство $(k-1)$ раз, найдем

$$\left| \sum_{n \in G_k(\eta)} \frac{a(n) f(n\vartheta)}{n} \right| \leqslant M(1 + 2k + (2k)^2 + \ldots + (2k)^{k-2}) + m(2k)^{k-1}, \quad (10)$$

где

$$m = \max_{\substack{r_i \in H_k(\eta) \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 1}} \left| \sum_{m \in G_k(\eta/r_1 r_2 \ldots r_{k-1})} \frac{a(m) f(m\varphi)}{m} \right|. \quad (11)$$

В силу определения множеств $G_k(\eta)$ и $H_k(\eta)$ очевидно, что

$$\frac{\eta x}{r_1 r_2 \ldots r_{k-1}} < x^{1/k}.$$

Далее из (11) и (8) следует, что $m \leqslant M$.

Таким образом,

$$\left| \sum_{n \in G_k(\eta)} \frac{a(n) f(n\vartheta)}{n} \right| \leqslant M(2k)^k \quad (12)$$

и наша лемма доказана.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующее известное неравенство:

$$\left| \sum_{1}^{N} \frac{\sin n\vartheta}{n} \right| \leqslant \frac{\pi}{2} + 1. \quad (13)$$

Наиболее изящно его можно доказать, следуя Фейеру. Ряд $\sum_1^\infty (\sin n\vartheta)/n$ есть ряд Фурье для $(\pi-\vartheta)/2$ $(0<\vartheta<2\pi)$, и по одной теореме Фейера [6] его средние арифметические равномерно ограничены теми же границами, что и сама функция, т. е. $\pm\pi/2$. Отсюда

$$\left|\sum_1^N \frac{\sin n\vartheta}{n}\right| \leqslant \left|\sum_1^N \frac{N+1-n}{Nn}\sin n\vartheta\right| + \left|\sum_1^N \frac{\sin n\vartheta}{N}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}+1.$$

Применяя нашу лемму для случая $a(n)=1$, $f(x)=\sin 2\pi x$, найдем

$$\left|\sum_{n\in G_k(\eta)} \frac{\sin 2\pi n\vartheta}{n}\right| \leqslant \left(\frac{\pi}{2}+1\right)(2k)^k. \tag{14}$$

Предположим, что гипотеза Ib неверна, так что для какого-либо $k>0$ имеем $\chi(n)=1$ при $n\in G_k(1)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{D} \frac{\bar\chi(n)\sin 2\pi n\vartheta}{n} = \sum_{n\in G_k(1)} \frac{\sin 2\pi n\vartheta}{n} + \sum_{r\in H_k(1)} \frac{\bar\chi(r)}{r} \sum_{n\in G_k(1/r)} \frac{\sin 2\pi nr\vartheta}{n}. \tag{15}$$

В силу (14) и (9) левая часть (15) будет равномерно ограничена.

Далее рассмотрим ряд Фурье для функции $S(x)=\sum_{n\leqslant xD}\chi(n)$, который в случае $\chi(-1)=+1$ (единственно интересном здесь) имеет вид

$$S(x) \sim \frac{\varepsilon\sqrt{D}}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\bar\chi(n)}{n}\sin 2\pi nx, \tag{16}$$

где $|\varepsilon|=1$. Очевидно, можно положить $x=l/D$, где l — целое. Тогда

$$\left|S\left(\frac{l}{D}\right)\right| \leqslant \frac{\sqrt{D}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)(2k)^k(2k+1) + \frac{\sqrt{D}}{\pi}\left|\sum_{n=D+1}^\infty \frac{\bar\chi(n)}{n}\sin 2\pi n\frac{l}{D}\right|. \tag{17}$$

Остаточный член оценим с помощью равенства

$$\sum_1^{D-1} \bar\chi(n)\sin 2\pi n\frac{l}{D} = 0,$$

из которого следует

$$\left|\sum_{D+1}^\infty \frac{\bar\chi(n)}{n}\sin 2\pi n\frac{l}{D}\right| \leqslant 1. \tag{18}$$

Таким образом,

$$M(\chi)=\max_{1\leqslant l\leqslant D-1}\left|S\left(\frac{l}{D}\right)\right|\leqslant\sqrt{D}\,(2k)^{k+2},\tag{19}$$

что доказывает теорему 1.

Теорема 2 также следует из нашей леммы. Вместо неравенства (13) используем теорему И. М. Виноградова, которую мы применяем в форме, опубликованной Дэвенпортом [7], доказавшим, что

$$\sum_{1}^{x}\mu(n)\,e^{2\pi in\vartheta}=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{h}}\right)\tag{20}$$

равномерно по ϑ для любого $h>0$. Выбирая $h\geqslant 2$, найдем с помощью суммирования по Абелю, в силу сходимости ряда $\sum\limits_{1}^{\infty}1/(n\ln^2 n)$, что

$$\left|\sum_{1}^{D}\frac{\mu(n)\sin 2\pi n\vartheta}{n}\right|\leqslant c.\tag{21}$$

Применяя нашу лемму для случая $a(n)=\mu(n)$, $f(x)=\sin 2\pi x$, найдем

$$\left|\sum_{n\in G_k(\eta)}\frac{\mu(n)\sin 2\pi n\vartheta}{n}\right|\leqslant c(k).\tag{22}$$

Пусть теперь гипотеза II неверна для данного $k>0$ и вещественного характера $\chi(n)$. В этом случае, очевидно,

$$\chi(n)=\bar{\chi}(n)=\lambda(n)\quad\text{для}\quad n\in G_k(1)$$

($\lambda(n)$ означает известную функцию Лиувилля). Если $n=q\in G_k(1)$ свободно от квадратов, то $\bar{\chi}(q)=\mu(q)$. Отсюда имеем

$$\sum_{1}^{D}\frac{\bar{\chi}(n)\sin 2\pi n\vartheta}{n}=\sum_{m^2\leqslant D}\frac{\bar{\chi}(m^2)}{m^2}\left(\sum_{n\in G_k(1/m^2)}\frac{\mu(n)\sin 2\pi nm^2\vartheta}{n}+\right.$$
$$\left.+\sum_{r\in H_k(1)}\frac{\bar{\chi}(r)}{r}\sum_{n\in G_k(1/rm^2)}\frac{\mu(n)\sin 2\pi nm^2r\vartheta}{n}\right).\tag{23}$$

Сопоставляя формулы (23), (22), (9) и (16), мы получаем утверждение теоремы 2 для случая $\chi(-1)=+1$. Случай $\chi(-1)=-1$ будет изучен ниже.

Теорему 3 можно доказать с помощью следующей формулы, принадлежащей к типу, изученному Винтнером [8]. Пусть $g(n)=\sum\limits_{d\mid n}\chi(d)$, тогда

$$L(1,\chi)=\frac{1}{x}\sum_{1}^{x}g(n)+O\left(\frac{\sqrt{D}\ln D}{\sqrt{x}}\right).\tag{24}$$

Для доказательства (24) используем следующую оценку (см. [8]):

$$\sum_{1}^{x}\left|\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right)-\left(\frac{x}{n+1}-\left[\frac{x}{n+1}\right]\right)\right| \leqslant 4\sqrt{x}. \tag{25}$$

Мы имеем

$$L(1, \chi)=\frac{1}{x}\sum_{1}^{x} g(n)+\frac{1}{x}\sum_{1}^{x}\chi(n)\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right)+\sum_{x+1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}. \tag{26}$$

Суммированием по Абелю из (25) и (3) получаем (24).

Пусть теперь $\chi(n)$ — вещественный характер. Тогда, очевидно,

$$g(n)=\sum_{d\mid n}\chi(d)=\prod_{p^{\alpha}\nmid n}(1+\chi(p)+\chi(p^{2})+\ldots+\chi(p^{\alpha}))\geqslant 0. \tag{27}$$

Для доказательства теоремы 3 предположим, что теорема Ia неверна для данного $k>0$ и D. Тогда $\chi(n)=1$ для $n\in G_k(1)$. Полагая в (24) $x=D\ln^2 D$, находим

$$L(1, \chi)\geqslant\frac{1}{x}\sum_{n\in G_k(1)}\sum_{d\mid n}1+O(1)\geqslant\frac{1}{x}\sum_{d\leqslant D^{1/k}}\sum_{\delta\in G_k(1/d)}1+O(1). \tag{28}$$

Следуя теореме Бухштаба, согласно которой число чисел $\leqslant x$, все простые множители которых $\leqslant x^{1/k}$, превосходит $cxe^{-k\ln k}$, получаем

$$L(1, \chi)\geqslant ce^{-k\ln k}\sum_{d\leqslant D^{1/k}}\frac{1}{d}\geqslant\frac{c}{k}e^{-k\ln k}\ln D, \tag{29}$$

что и доказывает теорему 3.

Остается доказать теорему 2 для случая $\chi(-1)=-1$. Рассмотрим ряд Фурье для функции $S(x)$:

$$S(x)\sim a_0+\frac{\varepsilon\sqrt{D}}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(n)}{n}\cos 2\pi nx, \tag{30}$$

где $a_0=(-\varepsilon\sqrt{D}/\pi)L(1, \chi)$. Предположим, что гипотеза II неверна. Тогда, полагая в (24) $x=D\ln^2 D$, найдем

$$L(1, \chi)\leqslant\frac{1}{x}\sum_{n\in G_{k-1}(1/\sqrt{x})}\sum_{\delta\in H_{k+1}(1/n^2)}g(\delta)+O(1), \tag{31}$$

где

$$\delta=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r},\ r\leqslant k+1,\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r\leqslant k+1,$$

и, следовательно,

$$g(\delta)=\prod_{1}^{r}(1+\alpha_i)\leqslant\left(\frac{\sum_{1}^{r}\alpha_i+r}{r}\right)^{r}\leqslant\left(1+\frac{k+1}{r}\right)^{r}\leqslant e^{k+1}.$$

Таким образом,

$$L(1, \chi) \leqslant \frac{e^{k+1}}{x} \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{n^2} + O(1) = O(1), \tag{32}$$

откуда следует, что $|a_0| < c\sqrt{D}$, что и требовалось доказать.

Проведенное доказательство будет аналогично доказательству в случае $\chi(-1) = +1$, если в формулах (21)—(23) заменить sin на cos, что можно сделать, используя равенство (20).

Литература

1. Линник Ю. В. О представлении больших чисел положительными тернарными квадратичными формами. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, т. 4, № 4/5, с. 363—402.
2. Polya G. Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste. — Gottinger Nachrichten, 1918, S. 21—29.
3. Реньи А. А. Об одном новом применении метода академика И. М. Виноградова. — ДАН СССР, 1947, т. 56, № 7, с. 675—678.
4. Littlewood J. E. On the class number of the corpus $P(\sqrt{-k})$. — Proc. London Math. Soc., 1928, vol. 27, p. 358—372.
5. Siegel C. L. Über die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper. — Acta arithm., 1935, Bd 1, S. 83—86.
6. Fejer L. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. — Math. Ann., 1904, Bd 58, S. 501—569.
7. Davenport H. On some infinite series involving arithmetical functions. II. — Quart. J. Math. Oxford Ser., 1937, vol. 8, p. 313—320.
8. Wintner A. Square root estimates of arithmetical sum functions. — Duke Math. J., 1946, vol. 13, № 2, p. 185—193.

О ВЫРАЖЕНИИ L-РЯДОВ ЧЕРЕЗ ζ-ФУНКЦИЮ

ДАН СССР, 1947, т. 57, № 5, с. 435—437

1. Пусть дан специальный ряд Дирихле

$$A(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^w}, \tag{1}$$

сходящийся при $\operatorname{Re} w > K_0$. Пусть $\chi(n)$ — примитивный характер $(\operatorname{mod} D)$. Тогда оператор L_χ, дающий результат $L_\chi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n^w)\chi(n)$, абсолютно сходящийся при $\operatorname{Re} w > K_0 + 1$, приводит нас к аналогу L-ряда:

$$A(w, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^w} \chi(n). \tag{2}$$

Этот оператор приложим к любому ряду вида (1), и если $A(w)$ и $B(w)$ — два ряда этого вида, то

$$L_\chi(A\cdot B)=L_\chi(A)\cdot L_\chi(B). \tag{3}$$

Однако понятие об операторе L_χ можно перенести и на более широкий вид функций. При этом мы получим довольно интересные формулы, выражающие $L(w,\chi)$ и $\frac{L'}{L}(w,\chi)$ через $\zeta(w)$ и $\frac{\zeta'}{\zeta}(w)$ и суммы по простым числам в прогрессии через нули одной только ζ-функции.

2. Если $N>0$ — любое число, то ряд $A(w,\chi,N)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\chi(n)/n^w)\,e^{-n/N}$ сходится всюду. С помощью трансформации Меллина

$$e^{-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}x^{-w}\Gamma(w)\,dw,$$

где $\operatorname{Re}x>0$, $\alpha>0$, полагая $x=1/N+2\pi im/D\ (m=0,1,\ldots,D-1)$, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}e^{-n/N}e^{-2\pi imn/D}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(K)}A(w+s)\,\Gamma(w)\left(\frac{1}{N}+\frac{2\pi im}{D}\right)^{w}dw, \tag{4}$$

где число K выбрано так, чтобы ряд $A(w+s)$ абсолютно сходился.

Далее пользуемся известной формулой

$$\chi(n)=\frac{\varepsilon(\chi)}{\sqrt{D}}\sum_{m=0}^{D-1}\bar{\chi}(-m)\,e^{-2\pi imn/D}.$$

Выписывая равенства (4) для $m=0,1,\ldots,D-1$, умножая на $\left(\varepsilon(\chi)/\sqrt{D}\right)\bar{\chi}(-m)$ и складывая, получим:

$$A(s,\chi,N)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}\chi(n)\,e^{-n/N}=$$

$$=\frac{\varepsilon(\chi)}{2\pi i\sqrt{D}}\int_{(K)}A(w+s)\,\Gamma(w)\left(\sum_{m=0}^{D-1}\bar{\chi}(-m)\left(\frac{1}{N}+\frac{2\pi im}{D}\right)^{-w}\right)dw; \tag{5}$$

здесь интегрирование идет по вертикали $\operatorname{Re}w=K$; вместо указанной системы вычетов можно взять любую другую полную систему.

Поэтому при $\operatorname{Re}s>K$ получим:

$$A(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}\chi(n)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{\varepsilon(\chi)}{2\pi i\sqrt{D}}\int_{(K)}A(w+s)\,\Gamma(w)\left(\sum_{m=0}^{D-1}\bar{\chi}(-m)\left(\frac{1}{N}+\frac{2\pi im}{D}\right)^{w}\right)dw. \tag{6}$$

В частности, полагая $A(w)=\zeta(w)$, $A(s, \chi)=L(s, \chi)$, получим уже для любого s:

$$L(s, \chi)=\lim_{N\to\infty}\frac{\varepsilon(\chi)}{2\pi i\sqrt{D}}\int\limits_{(K)}\zeta(w+s)\,\Gamma(w)\left(\sum_{m=0}^{D-1}\bar{\chi}(-m)\left(\frac{1}{N}+\frac{2\pi i m}{D}\right)^{-w}\right)dw. \quad (7)$$

Это и есть равенство, выражающее L-ряд через ζ-функцию. Оно же позволяет перенести понятие о приложении оператора L_χ на некоторый класс функций, регулярных в какой-либо вертикальной полуплоскости (например, для $A(w)=e^{w^2}$, $A(w)=\Gamma(w)$ и т. п.).

3. Можно указать некоторые применения равенства (7). Заменяя в нем $\zeta(w+s)$ на $\zeta(1-w-s)$, помноженное на факторы, требуемые функциональным уравнением, получим после несложных выкладок функциональное уравнение для $L(s, \chi)$. Оно, таким образом, есть следствие уравнения для $\zeta(w)$, но до сих пор выводилось всегда отдельно от последнего. Если замену $A(w+s)\to\zeta(w+s)$ совершить в (5), то получим обобщенное уравнение Пэли.

Интересные следствия дает (5) при замене $A(w)$ на $-\frac{\zeta'}{\zeta}(w)$. Мы напишем соответственную формулу для $s=0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,\Lambda(n)\,e^{-n/N}=$$

$$=-\frac{\varepsilon(\chi)}{2\pi i\sqrt{D}}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\zeta'}{\zeta}(w)\,\Gamma(w)\left(\sum_{m=0}^{D-1}\bar{\chi}(-m)\left(\frac{1}{N}+\frac{2\pi i m}{D}\right)^{-w}\right)dw.$$

Считая модуль D фиксированным, N большим и перенося контур на $\operatorname{Re} w=-3/2$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,\Lambda(n)\,e^{-n/N}=$$

$$=\frac{-\varepsilon(\chi)}{\sqrt{D}}\sum_{\rho_k\text{ — нули }\zeta(w)}\Gamma(\rho_k)\sum_{m=0}^{D-1}\bar{\chi}(-m)\left(\frac{1}{N}+\frac{2\pi i m}{D}\right)^{-\rho_k}+O(\ln^2 N). \quad (8)$$

Здесь сумма, стоящая слева, выражена через нули ζ-функции. До сих пор были известны лишь ее выражения через нули $L(w, \chi)$. Сумма справа абсолютно сходится, и в ней существенны лишь $\rho_k=\beta_k+it_k$ под условием $|t_k|<N\ln^2 N$. Вместо указанной в (8) системы вычетов можно взять любую другую полную систему.

4. В заключение укажем, что аналогичные соображения приводят к следующему критерию слабой гипотезы Римана:

Существует C_0 под условием: для того чтобы все нули $\zeta(s)$ лежали в полуплоскости $\sigma < 1-\eta_0$ ($\eta_0 < 1/4$), необходимо и достаточно существование оценки

$$\sum_{p=2}^{\infty} e^{2\pi i \sqrt[m]{p}} e^{-\sqrt[m]{p/N}} \ll N^{1-1/2m-\eta_0/m+\varepsilon} \tag{9}$$

при каком-либо $m > C_0$. В настоящее время известна оценка $\ll N^{1-1/2m+\varepsilon}$.

О МЕТОДЕ ТУЭ И ПРОБЛЕМЕ ЭФФЕКТИВИЗАЦИИ В КВАДРАТИЧНЫХ ПОЛЯХ

Совместно с А. О. Гельфондом

ДАН СССР, 1948, т. 61, № 5, с. 773—776

Как известно, метод Туэ в проблеме приближения алгебраических чисел алгебраическими же числами, даже в усиленной К. Зигелем форме, не дает возможности установить верхнюю границу для возможных решений неравенства

$$|\alpha-\xi| < CH^{-s\theta},\ \theta < \nu,\ C < C_0, \tag{1}$$

где α — фиксированное алгебраическое число степени $\nu \geqslant 3$, ξ — алгебраическое число степени s и высоты H, а C_0 зависит только от алгебраических чисел α и ξ. Это обстоятельство связано с тем, что в методе Туэ используется предположение о наличии двух достаточно больших решений и по существу доказывается отсутствие двух таких решений для θ, не меньших, например, чем $2\sqrt{\nu}$. Попытки использования более чем двух решений неравенства (1) приводили к необходимости введения в соответствующие теоремы не только неэффективности, но и альтернативности результата.

В настоящей заметке прежде всего дается теорема о приближениях алгебраических иррациональностей, являющаяся предельной в смысле эффективности для метода Туэ в настоящее время. Далее приводится одна теорема относительно нижних границ линейных форм с целыми коэффициентами от логарифмов алгебраических чисел, которая может быть получена из предыдущей теоремы, равно как и из соответствующей несколько более слабой теоремы К. Зигеля [1], и, наконец, устанавливается связь между проблемой аппроксимации алгебраических иррациональностей и проблемой эффективизации в квадратичных полях. Эта последняя связь указывает на единую в каком-то смысле природу неэффективности в теоремах о приближении алгебраических иррациональностей и в вопросе, например, о границе для дискриминантов одноклассных квадратичных полей. Результаты относительно аппроксимации алгебраических иррациональностей и их логарифмов принадлежат А. О. Гельфонду, а редукция проблемы эффективизации и относящиеся к этой проблеме результаты — Ю. В. Linnику.

Введем прежде всего определение меры алгебраического числа. Пусть алгебраическое число ξ принадлежит алгебраическому полю K степени s, в котором мы фиксируем какой-либо базис кольца целых чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. Тогда это число ξ может быть бесчисленным множеством способов представлено в форме

$$\xi = \frac{q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + \ldots + q_s\omega_s}{q_{s+1}\omega_1 + q_{s+2}\omega_2 + \ldots + q_{2s}\omega_s}. \tag{2}$$

Назовем мерой числа ξ целое число q,

$$q = \min \max [|q_1|, |q_2|, \ldots, |q_{2s}|], \tag{3}$$

где min взят по всем возможным представлениям числа ξ.

Усилив несколько метод Туэ—Зигеля, можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть α и β — два числа алгебраического поля K_0 степени $\nu \geqslant 3$, а ξ_1 и ξ_2 — два алгебраических числа K степени s, меры которых будут соответственно q_1 и q_2. Пусть также два действительных числа θ_1 и θ_2, $\theta_2 \geqslant \theta_1 > 0$, будут связаны соотношением $\theta_1\theta_2 = 2\nu(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое, но фиксированное число. Число $\delta > 0$ пусть также будет сколь угодно мало, но фиксированно. Тогда если неравенство*

$$|\alpha - \xi_1| < \frac{1}{q_1^{s\theta_1}} \tag{4}$$

имеет решение при $q_1 > q(\alpha, \beta, K_0, K, \varepsilon, \delta)$, где это последнее число q может быть эффективно вычислено, то неравенство

$$|\beta - \xi_2| < \frac{1}{q^{s\theta_2}} \tag{5}$$

не будет иметь решений при условии, что

$$\ln q_2 \geqslant \left[\frac{\theta_1 - 1}{2(\sqrt{1+\varepsilon} - 1)} + \delta\right] \ln q_1.$$

Предельность этой теоремы очевидна при $s=1$, $\alpha=\beta$. Действительно, если положить $s=1$ и $\alpha=\beta$, то при $\varepsilon < 0$ мы могли бы взять $\theta_1 < 2$, $\theta_2 < \nu$ и тем самым получить границу для решений неравенства (1) при $\theta = \theta_2$ и $C=1$, так как неравенство (4) действительно имеет бесчисленное множество решений, если $\theta_1 < 2$. Можно показать, что изменение знака у δ также приводит к эффективизации если не сформулированной теоремы, то по крайней мере следующего из этой теоремы утверждения:

неравенство

$$|x_1 \ln \alpha_1 + x_2 \ln \alpha_2 + \ldots + x_n \ln \alpha_n| < e^{-\varepsilon x}, \quad x = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, \tag{6}$$

где $\ln\alpha_1$, $\ln\alpha_2$, $\ldots$, $\ln\alpha_n$ *— линейно-независимые в поле рациональных чисел логарифмы алгебраических чисел, а* ε *— любое неотрицательное число, имеет лишь конечное число решений в целых рациональных числах* x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Без возможности изменения знака ε или δ это последнее утверждение следует из основной теоремы с помощью одного приема К. Малера [2], т. е. оно также неэффективно. Другими словами, при заданных α_1, α_2, $\ldots$, α_n и ε мы не можем указать такого числа x_0, что при $x > x_0$ неравенство (6) не может иметь решений. Как основная теорема, так и следствие из нее могут быть сформулированы в $\mathfrak{p}$-адической форме. Отсюда следует также, например, что уравнение

$$A\xi_1^{x_1}\ldots\xi_n^{x_n}+B\eta_1^{y_1}\ldots\eta_m^{y_m}+C\psi_1^{z_1}\ldots\psi_p^{z_p}=0,\ ABC\neq 0, \tag{7}$$

где ξ_1, $\ldots$, ξ_n, η_1, $\ldots$, η_m, ψ_1, $\ldots$, ψ_p — целые алгебраические числа, каждое из которых не есть алгебраическая единица, произведения $\xi_1\ldots\xi_n$, $\eta_1\ldots\eta_m$, $\psi_1\ldots\psi_p$ взаимно просты, A, B, C — произвольные алгебраические числа, будет иметь лишь конечное число решений в целых неотрицательных числах x_1, x_2, $\ldots$, x_n, y_1, $\ldots$, y_m, z_1, z_2, $\ldots$, z_p.

Из невозможности неравенства (6) при достаточно больших x следует, в частности, что при $|x_i|\leqslant x$, любом ε и соответствующем ему C_ε будет иметь место для всех x неравенство

$$|x_1\ln\alpha_1+x_2\ln\alpha_2+x_3\ln\alpha_3|>C_\varepsilon e^{-\varepsilon x}, \tag{8}$$

где x_1, x_2, x_3 — целые рациональные числа, $\ln\alpha_i$ линейно независимы в рациональном поле, $i=1, 2, 3$, α_i — алгебраические числа.

С оценкой (8) оказывается связанной известная задача об указании верхней границы D_0 модулей фундаментальных дискриминантов $-D<0$, для которых поле $h(\sqrt{-D})$ одноклассно (имеет один класс идеалов). Именно, если константу C_ε в неравенстве (8) удалось бы вычислить эффективно для некоторого эффективно указуемого $\varepsilon>0$, то такую границу D_0 также можно было бы вычислить эффективно.

Пусть $-D<-163$ — фундаментальный «одноклассный» дискриминант; как известно, D — простое число. Рассмотрим примитивный реальный характер $(\mathrm{mod}\ D)$; обозначим его $\chi(n)$; тогда $\chi(-1)=-1$. Пусть $D_1<D^{1/3}$ — какое-либо простое число, а $\chi_1(n)$ — реальный характер $(\mathrm{mod}\ D_1)$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$L(s,\chi_1)L(s,\chi_1\chi)=\zeta(2s)\left(1-\frac{1}{D_1^{2s}}\right)+$$
$$+\frac{1}{D_1}\frac{D_1^2-D_1^{2s}}{D_1^{2s}}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)}\left(\frac{D}{4}\right)^{1/2-s}\zeta(2s-1)+R(s), \tag{9}$$

где $|R(s)|<e^{-c_1D/D_1}$ при $|s|<3$ (в дальнейшем c_1, c_2, $\ldots$, k_1, k_2, $\ldots$ — эффективно вычисляемые положительные константы).

Равенство (9) представляет непосредственное обобщение формулы М. Дойринга из работы [3] с заменой $\zeta(s)L(s,\ \chi)=(1/2)\zeta_Q(s)$ на $L(s,\ \chi_1)L(s,\ \chi_1\chi)$.

Положив в (9) $s=1$, учитывая, в частности, что

$$\lim_{s\to 1}(D_1^2-D_1^{2s})\,\zeta(2s-1)=-D_1^2\ln D_1,\ \ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},$$

находим

$$L(1,\ \chi_1)\,L(1,\ \chi_1\chi)=\zeta(2)\left(1-\frac{1}{D_1^2}\right)-\frac{2\pi}{D_1}\,\frac{\ln D_1}{\sqrt{D}}+R_1, \tag{10}$$

где $|R|<e^{-c_1D/D_1}$.

Отсюда, деля на $L(1,\ \chi_1)=c_2$, находим существенную для дальнейшего оценку[1]

$$|L(1,\ \chi_1\chi)|<k_1. \tag{11}$$

Для исключения члена $\zeta(2)$ берем $D_2<D^{1/3}$, $D_2\neq D_1$, составляем равенство, аналогичное (10), помножаем его и (10) на соответствующие множители и вычитаем одно из другого; тогда получим:

$$\left(1-\frac{1}{D_2^2}\right)L(1,\ \chi_1)\,L(1,\ \chi_1\chi)-\left(1-\frac{1}{D_1^2}\right)L(1,\ \chi_2)\,L(1,\ \chi_2\chi)=$$
$$=\frac{2\pi}{D_2}\left(1-\frac{1}{D_1^2}\right)\frac{\ln D_2}{\sqrt{D}}-\frac{2\pi}{D_1}\left(1-\frac{1}{D_2^2}\right)\frac{\ln D}{\sqrt{D}}+R_3, \tag{12}$$

$$|R_3|\leqslant|R_1|+|R_2|.$$

Далее считаем D_1, D_2 фиксированными, $<k_2$, и притом так, что $\chi_1(-1)=\chi_2(-1)=1$ (например, $D_1=5$, $D_2=13$). Тогда известные теоремы теории чисел [4] дают

$$L(1,\ \chi_1\chi)=\frac{\pi}{2\sqrt{DD_1}}H_1,\ \ L(1,\ \chi_2\chi)=\frac{\pi}{2\sqrt{DD_1}}H_2,$$

где H_1 и H_2 — целые рациональные и на основании (11)

$$|H_i|<k_3\sqrt{D},\ i=1,\ 2. \tag{13}$$

Далее, если $\alpha_i=t_i+u_i\sqrt{D_i}$ — основные пеллевские единицы полей $K(\sqrt{D_i})$, $i=1,\ 2$, то [4]

$$L(1,\ \chi_i)=\frac{h_i\ln\alpha_i}{2\sqrt{D_i}},\ \ 0<h_i<k_4,\ i=1,\ 2.$$

Подставляя эти выражения в (12), сокращая на $\pi/\sqrt{D}$ и помножая на общий рациональный знаменатель, придем к неравенству

$$|x_1\ln\alpha_1+x_2\ln\alpha_2+x_3\ln\alpha_3|<e^{-c_3\sqrt{D}},$$

---

[1] Это простое соображение указано нам проф. Н. Г. Чудаковым.

где x_1, x_2, x_3, α_3 — целые рациональные числа; α_1, α_2 — пеллевские единицы; $|x_i|<k_5\sqrt{D}$, $i=1, 2$; $|x_3|<k_5$. Этим уясняется связь нашей задачи с теоремой (6) и неравенством (8).

Литература

1. Siegel C. L. Approximation algebraischer Zahlen. — Math. Z., 1921, Bd 10, S. 173—213.
2. Mahler K. Ein Analogon zu einem Schneiderschen Satz. — Proc. Koninkl. nederl. Akad. wet., 1936, Bd 39, S. 633—640, 729—737.
3. Deuring M. On Epstein's zeta-function. — Ann. Math., 1937, vol. 38, № 3, p. 584—593.
4. Дирихле П. Г. Л. Лекции по теории чисел. М.—Л., 1936. 403 с.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЗИГЕЛЯ НА ОСНОВЕ СПОСОБА И. М. ВИНОГРАДОВА

(С приложением короткого аналитического доказательства)

Изв. АН СССР. Сер. мат., 1950, т. 14, № 4, с. 327—342

1. Около 30 лет назад И. М. Виноградовым была высказана мысль о примечательном сходстве между поведением примитивных реальных характеров $\chi(n)$ по большому модулю D на интервале $[1, D-1]$ и поведением функции Лиувилля $\lambda(n)=(-1)^{\nu(n)}$ ($\nu(n)$ — число всех простых делителей n) на том же интервале. Основой такого сходства является полная мультипликативность обоих видов функций. Однако в то время как для сумм характеров $\chi(n)$ существует оценка И. М. Виноградова (см. [1])

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\ll\sqrt{D}\ln D \tag{1.1}$$

для любого $x\in[1, D-1)$, существование оценки типа

$$\sum_{n\leqslant x}\lambda(n)\ll x^{1-c_0}\ (c_0>0 \text{ — константа}) \tag{1.2}$$

для функции Лиувилля $\lambda(n)$ является неразрешенной проблемой, совпадающей со «слабой гипотезой Римана» для ζ-функции Римана.

Для выяснения связи между оценками (1.1) и (1.2) И. М. Виноградов указал на полезность изучения степени порчи функции Лиувилля $\lambda(n)$ при замене ее на характер $\chi(n)$. В небольшой заметке [2] автор настоящей статьи наметил, исходя из этих идей, новое доказательство теоремы Зигеля о числе классов бинарных квадратичных форм отрицательного дискриминанта. Однако это доказательство требовало мощных аналитических средств и больших предварительных сведений. В настоящей статье на основе тех же идей предлагается сравнительно элементарное доказательство теоремы Зигеля, не использующее анализа теории функций комплексного или реального переменного. В виде приложения дается короткое аналитическое доказательство.

2. Теорема Зигеля о числе классов $h\,(\Delta)$ бинарных форм фундаментального дискриминанта Δ утверждает, что если $\Delta = -D < 0$, то

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\ln h(-D)}{\ln D} = \frac{1}{2}, \tag{2.1}$$

и если $\Delta = D > 0$, то

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\ln R_D + \ln h\,(D)}{\ln D} = \frac{1}{2}, \tag{2.2}$$

где R_D — «регулятор» квадратичной области.

В данной работе мы ограничимся доказательством (2. 1), хотя легко усмотреть, что аналогично можно доказать и (2. 2); мы опускаем это доказательство лишь ввиду осложнений тривиального типа.

В доказательстве будут использованы:

а) элементы арифметической теории бинарных квадратичных форм и реальных характеров, включая оценку И. М. Виноградова (1. 1); [1]

б) элементарные свойства простых чисел и функции Мебиуса;

в) определение и свойства неперова числа;

г) элементарная алгебра;

д) понятие о пределе (этого можно и избежать, но тогда нужно очевидным образом изменить формулировку теоремы).

К сожалению, доказательство будет столь же неэффективным, как и другие известные доказательства. (По поводу проблемы эффективизации см., например, [3]). Вместе с тем аналитическая интерпретация доказательства выявит некоторый, по-видимому новый, факт.

3. Пусть

$$C_0,\ C_1,\ \ldots;\ c_0,\ c_1,\ \ldots;\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots;\ \eta_0,\ \eta_1,\ \ldots$$

обозначают положительные константы; в двух последних рядах будут всегда малые (меньше 1/4) константы.

Пусть дан реальный примитивный характер $\chi_k\,(n)$ по модулю $k > 2$ и число $\beta > 1/2$, не превосходящее 1.

Мы будем говорить, что $\chi_k\,(n)$ обладает свойством $\mathfrak{A}\,(\beta)$, если существует такая константа $C_0(\chi_k)$, что при любом $N > C_0(\chi_k)$ в сегменте $[\sqrt{N},\ N]$ найдется такое $N_1 \in [\sqrt{N},\ N]$, что

$$\left| \sum_{n\leqslant N_1} \chi_k\,(n)\,\mu\,(n) \right| > N_1^{\beta}. \tag{3.1}$$

Со свойством $\mathfrak{A}\,(\beta)$ связана следующая лемма.[2]

[1] Впрочем, ее можно заменить и тривиальной оценкой: D вместо $\sqrt{D}\ln D$.

[2] Она имеет некоторую аналитическую новизну, так как условие (3. 1) не предполагает реальности «аномальных нулей» $L\,(s,\ \chi_k)$.

I основная лемма. *Если существует какой-либо характер $\chi_k(n)$, обладающий свойством $\mathfrak{A}(\beta)$, где $\beta \geqslant 3/4$, то при $D > C_1(\chi_k, \eta_0)$ будем иметь*

$$h(-D) > D^{1/2-\eta(\beta)}, \tag{3.2}$$

где

$$\eta(\beta) = 10.5(1-\beta) + \eta_0 \tag{3.3}$$

и η_0 — сколь угодно малое положительное фиксированное число.

Доказательство этого предложения будет опираться на несколько лемм.

Лемма 1. *Если $\rho > 1$, $q_1 > q_0 > 1$, то*

$$\sum_{q=q_0}^{q_1} \frac{1}{q^\rho} < \frac{2}{1-\frac{1}{2^\rho}} \frac{1}{q_0^{\rho-1}}. \tag{3.4}$$

Для доказательства заменяем все числа q между q_0 и $2q_0$ на q_0, все числа между $2q_0+1$ и $4q_0$ — на $2q_0$ и т. д. и оцениваем далее сумму геометрической прогрессии со знаменателем $1/2^\rho$.

Лемма 2. *Если имеет место неравенство*

$$\left| \sum_{n \leqslant N_1} \chi_k(n) \mu(n) \right| > N_1^\beta, \quad \beta > \frac{1}{2}, \tag{3.5}$$

и ε — любое число под условием $0 < \varepsilon < \beta - 1/2$, то при $N_1 > C_0(\beta, \varepsilon, \chi_k)$ в сегменте $[N_1^{2\beta-1-2\varepsilon}, N_1]$ найдется целое число $N_2 \in [N_1^{2\beta-1-2\varepsilon}, N_1]$, такое, что

$$\left| \sum_{n \leqslant N_2} \chi_k(n) \lambda(n) \right| > N_2^{\beta-\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Доказательство. По соображениям «решета» имеем

$$\sum_{n \leqslant N_1} \chi_k(n) \mu(n) = \sum_{q \leqslant \sqrt{N_1}} \mu(q) \sum_{m \leqslant N_1/q^2} \chi_k(m) \lambda(m). \tag{3.7}$$

Отберем те значения q, для которых $q \geqslant N_1^{1-\beta+\varepsilon}$. Для них, согласно (3.4), получим

$$\left| \sum_{N_1^{1-\beta+\varepsilon} \leqslant q \leqslant \sqrt{N_1}} \mu(q) \sum_{m \leqslant N_1/q^2} \chi_k(m) \lambda(m) \right| \leqslant \sum_{N_1^{1-\beta+\varepsilon} \leqslant q \leqslant \sqrt{N_1}} \frac{N_1}{q^2} \frac{4N_1}{N^{1-\beta+\varepsilon}}.$$

Это последнее число не превосходит $4N_1^{\beta-\varepsilon}$, так что

$$\sum_{n \leqslant N_1} \chi_k(n) \mu(n) = \sum_{q < N^{1-\beta+\varepsilon}} \mu(q) \sum_{m \leqslant N_1/q^2} \chi_k(m) \lambda(m) + R_{N_1}, \tag{3.8}$$

где $|R_{N_1}| < 4N_1^{\beta-\varepsilon}$.

Допустим теперь, что при $q < N_1^{1-\beta+\varepsilon}$ имеем всегда

$$\left| \sum_{n \leqslant N_1/q^2} \chi_k(m) \lambda(m) \right| < \left(\frac{N_1}{q^2} \right)^{\beta-\varepsilon},$$

и приведем предположение к противоречию. На основании (3.4) мы получим из предположения:

$$\left|\sum_{q<N_1}\mu(q)\sum_{m\leqslant N_1/q^2}\chi_k(m)\lambda(m)\right|<N_1^{\beta-\varepsilon}\sum_{1\leqslant q\leqslant N_1^{1-\beta+\varepsilon}}\frac{1}{q^{2\beta-2\varepsilon}}<C(\beta,\ \varepsilon)\,N_1^{\beta-\varepsilon}.$$

Подставляя в (3.8), находим

$$\left|\sum_{n\leqslant N_1}\chi_k(n)\mu(n)\right|<(C(\beta,\ \varepsilon)+4)\,N_1^{\beta-\varepsilon},$$

что противоречит (3.5). Отсюда следует, что при достаточно большом N_1 найдется q_1, такое, что

$$\left|\sum_{m\leqslant N_1/q_1^2}\chi_k(m)\lambda(m)\right|\geqslant\left(\frac{N_1}{q_1^2}\right)^{\beta-\varepsilon},\quad q_1<N_1^{1-\beta+\varepsilon}.$$

Полагая $N_2=N_1/q_1^2$, мы видим, что $N_2\leqslant N_1$ и $N_2>N^{2\beta-1-2\varepsilon}$. Это и доказывает лемму 2.

4. Лемма 3. *Для любого характера* $\chi(n)$, *примитивного* $(\operatorname{mod} D)$, *имеем*:

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n)\ll\sqrt{D}\ln D, \tag{4.1}$$

где x — *любое число*, $\ll$ — *известный знак И. М. Виноградова.*

Далее, если $\nu(n)$ — *число простых делителей* n, $\tau(n)$ — *число всех его делителей, то*

$$2^{\nu(n)}\ll n^{\varepsilon},\quad \tau(n)\ll n^{\varepsilon}$$

при любом фиксированном ε *и* $n\to\infty$.

Эти три соотношения, из которых (4.1) есть известная оценка И. М. Виноградова, доказываются элементарно.

Лемма 4. *Если* $Q(x,\ y)=ax^2+bxy+cy^2$ — *приведенная положительная коренная форма дискриминанта* $-D$, *то*

$$\sum_{m\leqslant M}r(m)<c_1\frac{M}{\sqrt{D}},$$

где $r(m)$ — *число решений уравнения* $Q(x,\ y)=m$, *а* $M\geqslant D^2$.

Для подсчета достаточно грубо оценить число целых точек $(x,\ y)$ в области $Q(x,\ y)\leqslant M$.

5. Доказательство I основной леммы. Пусть дан реальный характер $\chi_k(n)$, обладающий свойством $\mathfrak{A}(\beta)$ с $\beta\geqslant 3/4$, и указана соответствующая константа $C_0(\chi_k)$. Тогда, по определению свойства $\mathfrak{A}(\beta)$ и по лемме 2, при любом положительном $\varepsilon<\beta-1/2$ и $N>C_1(\beta,\ \varepsilon,\ \chi_k)$ в сегменте $[N^{\beta-1/2-\varepsilon},\ N]$ найдется число N_2, такое, что

$$\left|\sum_{n\leqslant N_2}\chi_k(n)\lambda(n)\right|\geqslant N_2^{\beta-\varepsilon}. \tag{5.1}$$

Положим здесь

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 0.01\,(1-\beta). \tag{5.2}$$

Пусть существует бесконечная последовательность фундаментальных дискриминантов $-D_j$ $(j=1, 2, \ldots)$ при условии

$$h(-D_j) \leqslant D_j^{1/2-\eta(\beta)}, \quad \eta(\beta) = 10.5\,(1-\beta) + \eta_0, \tag{5.3}$$

где η_0 — сколь угодно малое положительное фиксированное число. Нам нужно привести это предположение к противоречию. Возьмем столь большое $D_j = D$, что $D_j > C_1(\beta, \varepsilon, \chi_k)$, и выберем

$$N = [2D^{4/(\beta-1/2-\varepsilon_0)}] = N_3.$$

Тогда найдется $N_2 \in [D^4, N_3]$, $N_3 > D^8$, такое, что

$$\Big|\sum_{n\leqslant N_2} \chi_k(n)\,\lambda(n)\Big| > N_2^{\beta-\varepsilon_0}. \tag{5.4}$$

6. Положим $\chi(n) = (-D/n)$ и введем сумму

$$\sum_{n\leqslant N_2} \chi_k(n)\,\chi(n).$$

Согласно лемме 3 и основным свойствам характеров, имеем

$$\sum_{n\leqslant N_2} \chi_k(n)\,\chi(n) \ll \sqrt{kD}\,\ln(kD). \tag{6.1}$$

Сравним суммы (5.3) и (6.1), исследуя возможные различия в поведении $\lambda(n)$ и $\chi(n)$. Пусть сперва $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа, для которых $\chi(p_j) = 0$. Тогда $p_1 p_2 \ldots p_s \leqslant D$. Введем мультипликативную функцию $\chi'(n)$, которая отличается от $\chi(n)$ тем и только тем, что $\chi'(p_j) = -1$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$. Тогда получим

$$\sum_{n\leqslant N_2} \chi_k(n)\,\chi'(n) = \sum_{n\leqslant N_2} \chi_k(n)\,\chi(n) -$$

$$-\sum_{p_j} \sum_{n\leqslant N_2/p_j} \chi_k(n)\,\chi(n) + \ldots + (-1)^{s-1} \sum_{n\leqslant N_2/(p_1\ldots p_s)} \chi_k(n)\,\chi(n).$$

Число наших сумм не превосходит $2^s \leqslant \tau(D) \ll D^{\varepsilon'}$ при любом фиксированном $\varepsilon' > 0$. Каждая из сумм, по лемме 3, не превосходит $C_1\sqrt{Dk}\,\ln(kD)$, и поэтому

$$\sum_{n\leqslant N_2} \chi_k(n)\,\chi'(n) \ll N_2^{\varepsilon'}\sqrt{kD}\,\ln(kD). \tag{6.2}$$

Произведем в этой сумме замену всех $\chi'(n)$ на $\lambda(n)$, что равносильно замене значений $\chi'(p) = 1$ для $p|n$ на $\lambda(p) = -1$, $(p|n)$.

Обозначим через $\mathfrak{U}_D$ множество всех таких чисел n', каждый простой делитель которых $p|n'$ будет иметь $\chi(p) = +1$. Из элементарной теории квадратичных форм хорошо известно, что $\mathfrak{U}_D$

совпадает с множеством всех чисел, примитивно представляемых формами дискриминанта $-D$. Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant N_2}\chi_k(n)\lambda(n)=\sum_{n\leqslant N_2}\chi_k(n)\chi'(n)-2\sum_{p_j\in\mathfrak{U}_D}\sum_{n\leqslant N_2/p_j}\chi_k(n)\chi'(n)+$$
$$+4\sum_{p_ip_j\in\mathfrak{U}_D}\sum_{n\leqslant N_2/p_ip_j}\chi_k(n)\chi'(n)+\ldots$$
$$+(-1)^m 2^m\sum_{p_ip_j\ldots p_\rho\in\mathfrak{U}_D}\sum_{n\leqslant N_2/p_ip_j\ldots p_\rho}\chi_k(n)\chi'(n)+\ldots \qquad (6.3)$$

Разобьем суммы на два типа:

1) те, в которых $p_ip_j\ldots p_\rho\geqslant N_2/D^2$,

2) остальные.

Суммы первого типа в совокупности не превосходят

$$N_2\sum_{N_2/D^2\leqslant n'\leqslant N_2}\frac{2^{\nu(n')}}{n'},$$

где n' — свободное от квадратов число, принадлежащее $\mathfrak{U}_D$. Из элементарной теории квадратичных форм следует, что эта сумма не превосходит

$$N_2\sum_Q\sum_{N_2/D^2\leqslant Q(x,\,y)\leqslant N_2}\frac{1}{Q(x,\,y)},$$

где $Q(x, y)$ пробегает приведенные формы дискриминанта $-D$.

Из леммы 4 легко выводим:

$$\sum_{N_2/D^2\leqslant Q(x,\,y)\leqslant N_2}\frac{1}{Q(x,\,y)}<C_2\frac{\log_2 D}{\sqrt{D}}.$$

Суммирование на все $\leqslant 2h(-D)$ форм $Q(x, y)$ дает

$$N_2\sum_Q\sum_{N_2/D^2\leqslant Q(x,\,y)\leqslant N_2}\frac{1}{Q(x,\,y)}<2N_2h(-D)\frac{C_2\log_2 D}{\sqrt{D}}. \qquad (6.4)$$

Но, согласно (5.3),

$$h(-D)\leqslant D^{1/2-\eta(\beta)},$$

так что получаем

$$N_2\sum_{N_2/D^2\leqslant n'\leqslant N_2}\frac{2^{\nu(n')}}{n'}<2C_2N_2\log_2 D\cdot D^{1/2-\eta(\beta)}\frac{1}{\sqrt{D}}\ll N_2\log_2 D\cdot D^{-\eta(\beta)}. \qquad (6.5)$$

Для сумм второго типа, где $p_ip_j\ldots p_\rho<N_2/D^2$, имеем

$$\left|2^m\sum_{n\leqslant N_2/(p_i\ldots p_\rho)}\chi_k(n)\chi'(n)\right|<N_2^{\varepsilon'}\cdot 2\sqrt{kD}\ln(kD) \qquad (6.6)$$

на основании очевидной модификации оценки (6.2).

Далее, $2^m \ll N_2^{\varepsilon'}$, по лемме 3. Количество же сумм второго типа равно количеству $p_i p_j \ldots p_\rho < N_2/D^2$, так что общая их оценка не превосходит

$$C_{\varepsilon'} N_2^{2\varepsilon'} \frac{\sqrt{kD}\ln(kD)}{D^2} N_2. \tag{6.7}$$

7. Оценки (6.5) и (6.7) дают в соединении с (6.3)

$$\Bigl|\sum_{n\leqslant N_2} \chi_k(n)\lambda(n)\Bigr| \ll N_2 D^{-0.9\eta(\beta)}, \tag{7.1}$$

в то время как, согласно (5.4),

$$\Bigl|\sum_{n\leqslant N_2} \chi_k(n)\lambda(n)\Bigr| > N_2^{\beta-\varepsilon_0} = N_2^{\beta-0.01(1-\beta)}. \tag{7.2}$$

По выбору N_2 имеем $N_2 \leqslant 2D^{4/(\beta-1/2-\varepsilon_0)} < D^9$, откуда

$$D^{0.9\eta(\beta)} > N_2^{0.1\eta(\beta)}.$$

Вспоминая, что $\eta(\beta) = 10.5(1-\beta) + 0.1\eta_0$, получим, сравнивая (7.1) и (7.2):

$$N_2^{1-1.01(1-\beta)} \ll N_2^{1-0.1\eta(\beta)} = N_2^{1-1.05(1-\beta)-0.1\eta_0}. \tag{7.3}$$

При $D > C_0(\beta, \eta_0, k)$ получим очевидное противоречие, доказывающее I основную лемму.

8. Лемма 5. *При $h \to 0$ имеем*

$$\ln(1+h) = O(h), \quad (1+h)^\beta = 1 + O(h), \tag{8.1}$$

где $\beta > 0$ — фиксированное число.

Эта лемма доказывается на основании определения числа e и натуральных логарифмов, а также свойств обыкновенного бинома Ньютона.

Пусть $(-k)$ — фундаментальный дискриминант, а $\chi_k(n) = (-k/n)$ — соответствующий характер. Пусть ε_1 — какое-либо число, фиксированное при условиях

$$0 < \varepsilon_1 < 0.01. \tag{8.2}$$

Предположим, что

$$h(-k) < k^{1/2-\varepsilon_1}, \tag{8.3}$$

и, считая в дальнейшем k достаточно большим сравнительно с $1/\varepsilon_1$, выведем из (8.3) некоторые следствия.

Пусть a_1 — положительное число при условиях

$$0.01\varepsilon_1 \leqslant a_1 \leqslant \frac{3}{2}. \tag{8.4}$$

Мы будем рассматривать выражение

$$L(a_1) = \sum_{n\leqslant k^3} \chi_k(n)\, n^{-a_1}, \tag{8.5}$$

и в нем, как это делалось в п. 6, постараемся заменить $\chi_k(n)$ на $\lambda(n)$, а затем отсеять числа, делящиеся на квадраты. Таким образом, мы будем сравнивать (8. 5) с

$$L_1(a_1)=\sum_{n\leqslant k^3}\chi_k(n)\,n^{-a_1}. \tag{8. 6}$$

9. Пусть

$$A=\frac{4}{\varepsilon_1},\quad (\ln k)^A=\Delta,\quad k_1=k^3. \tag{9. 1}$$

Посмотрим, что получится, если отсеять из (8. 5) числа n, содержащие простые множители, не превосходящие Δ. Если обозначим

$$\prod\nolimits_1(a_1)=\prod_{p\leqslant\Delta}\left(1-\frac{\chi_k(p)}{p^{a_1}}\right)=\sum_q\frac{b_q}{q^{a_1}},$$

то получим

$$L_2(a_1)=\sum_{q\leqslant k_1}\frac{b_q}{q^{a_1}}\sum_{m\leqslant k_1/q}\chi_k(m)\,m^{-a_1}, \tag{9. 2}$$

где $L_2(a_1)$ — результат высеивания из $L(a_1)$ указанных выше чисел.

Докажем следующую оценку: для любого числа $N\geqslant k$ имеем

$$\sum_{N\leqslant q\leqslant 2N}|b_q|\,q^{-a_1}\leqslant N^{-0.15\varepsilon_1}. \tag{9. 3}$$

В самом деле, пусть (9. 3) не выполняется для какого-либо $N\geqslant k$. Пусть $a_1'=1-0.2\varepsilon_1$. Тогда имеем

$$\sum_{N\leqslant q\leqslant 2N}|b_q|\,q^{-a_1'}>N^{a_1-a_1'}\sum_{N\leqslant q\leqslant 2N}|b_q|\,q^{-a_1}\geqslant N^{-0.15\varepsilon_1+0.19\varepsilon_1}=N^{0.04\varepsilon_1}. \tag{9. 4}$$

С другой стороны,

$$\sum_{N\leqslant q\leqslant 2N}\frac{|b_q|}{q^{a_1'}}<\prod_{p\leqslant\Delta}\left(1+\frac{1}{p^{a_1}}\right)$$

и

$$\ln\prod_{p\leqslant\Delta}\left(1+\frac{1}{p^{a_1'}}\right)\leqslant\sum_{n\leqslant\Delta}\frac{1}{n^{a_1'}}\leqslant\Delta^{1-a_1'}$$

по леммам 1 и 5.

Далее,

$$\Delta^{1-a_1'}=(\ln k)^{A\cdot 0.2\varepsilon_1}=(\ln k)^{0.8}\leqslant(\ln N)^{0.8}. \tag{9, 5}$$

Это явно противоречит (9. 4) и доказывает лемму.

10. Полагая

$$\prod\nolimits_2(a_1)=\prod_{\substack{\Delta<p<k_1\\ \chi_k(p)=+1}}\frac{1-1/p^{a_1}}{1+1/p^{a_1}}=1+\sum_{q>\Delta}\frac{d_q}{q^{a_1}}, \tag{10. 1}$$

докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Для любого* $N \in [\Delta, k^4]$ *число простых чисел под условием:* $\chi_k(p) = +1$, $N \leqslant p \leqslant 2N$ *будет*

$$N_1 \leqslant N^{-0.015\varepsilon_1}. \tag{10.2}$$

Доказательство. Пусть это не так для данного N. Найдем целое число r, для которого $(2N)^r = k^\gamma$, $2 \leqslant \gamma \leqslant 3$, и будем рассматривать $C_{N_1}^r$ всевозможных различных произведений по r из наших простых чисел. Имеем

$$C_{N_1}^r > \frac{N_1^r 2^{-r}}{r\,!} > N_1^r e^{-r(1+\ln r)} \ (\text{очевидно, } r\,! \leqslant e^{r \ln r}),$$

$$r \leqslant \frac{3 \ln k}{\ln \Delta} = \frac{3}{4}\varepsilon_1 \frac{\ln k}{\ln \ln k}, \quad \ln r \leqslant \ln \ln k.$$

Отсюда при большом k имеем

$$C_{N_1}^r > N_1^r k^{-0.76\varepsilon_1}.$$

Если $N_1 > N^{1-0.015\varepsilon_1}$, то

$$C_{N_1}^r > k^\gamma k^{-0.76\varepsilon_1}.$$

Все построенные произведения лежат между k^γ и $k^\gamma \cdot 2^{-r}$, $r \leqslant (3/4)\,\varepsilon_1 \ln k/\ln \ln k$. Все эти произведения представимы квадратичными формами $Q(x, y)$ дискриминанта $(-k)$, и лемма 4 в этом случае непосредственно дает

$$h(-k) > k^{1/2-0.82\varepsilon_1},$$

что противоречит (8.3) при большом k. Лемма доказана.

Обозначая

$$\overline{\prod}_2(a_1) = \prod_{\substack{\Delta < p \leqslant k_1 \\ \chi_k(p) = +1}} \frac{1 + 1/p^{a_1}}{1 - 1/p^{a_1}},$$

мы с помощью этой леммы получаем произведение, мажорирующее $\Pi_2(a_1)$ по лемме 5:

$$\ln \overline{\prod}_2(a_1) \leqslant \sum_{\substack{\Delta < p \leqslant k \\ \chi_k(p) = +1}} \frac{1}{p^{a_1}} \leqslant \frac{1}{\Delta^{a_1}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ia_1}} (\Delta \cdot 2^i)^{1-0.015\varepsilon_1} \leqslant (\ln k)^{-0.02}. \tag{10.3}$$

Отсюда вытекает следующая лемма.

Лемма 6а. *При* $N \geqslant k$, $a_2 \geqslant 1 - 0.005\varepsilon_1$ *имеем*

$$\sum_{N \leqslant q \leqslant 2N} |d_q|\, q^{-a_2} \leqslant N^{-0.004\varepsilon_1}. \tag{10.4}$$

Доказательство с помощью (10.3) полностью аналогично доказательству оценки (9.3).

11. Будем считать a_3 фиксированным и принадлежащим сегменту $[1-0.001\varepsilon_1, 3/2]$. Полагая

$$\prod(a_3)=\prod_{2\leqslant p\leqslant\Delta}\frac{1-\chi_k(p)/p^{a_3}}{1+1/p^{a_3}}\prod_{\substack{\Delta<p\leqslant k_1\\ \chi_k(p)=+1}}\frac{1-1/p^{a_3}}{1+1/p^{a_3}}\prod_{2\leqslant p\leqslant k_1}\left(1-\frac{1}{p^{2a_3}}\right)=\sum_q\frac{e_q}{q^{a_3}},$$

находим, объединяя оценки п. 9 и п. 10,

$$\ln\prod(a_3)\ll(\ln k)^{0.8}, \tag{11.1}$$

$$\sum_{N\leqslant q\leqslant 2N}|e_q|\,q^{-a_3}\ll N^{-0.003\varepsilon_1}\quad\text{при}\quad N\geqslant k. \tag{11.2}$$

Далее, имеем

$$L_1(a_3)=\sum_{n\leqslant k_1}\frac{\mu(n)}{n^{a_3}}\sum_{q\leqslant k_1}\frac{l_q}{q^{a_3}}\sum_{m\leqslant k_1/q}\frac{\chi_k(m)}{m^{a_3}}. \tag{11.3}$$

Но абелево суммирование и оценка вида (1.1) дают:

$$\sum_{m\leqslant k_1/q}\frac{\chi_k(m)}{m^{a_1}}=\begin{cases}L(a_1)+Bk^{-1/2} & \text{при}\quad q\leqslant k^{1.5},\\ Bk^{0.0015\varepsilon_1} & \text{при}\quad q>k^{1.5}.\end{cases} \tag{11.4}$$

Здесь B — ограниченное число, не всегда одно и то же. Подставим результат (11.2) и (11.4) в (11.3); тогда получим

$$L_1(a_3)=\sum_{q\leqslant k_1/k^2}\frac{l_q}{q^{a_1}}\left(L(a_3)+Bk^{-1/2}\right)+R_{a_1}, \tag{11.5}$$

где

$$R_{a_1}\ll k^{0.0015\varepsilon_1}\sum_{k^2\leqslant q\leqslant k^3}\frac{|l_q|}{q^{a_3}}\ll k^{0.0015\varepsilon_1-0.003\varepsilon_1}\ll k^{-0.0015\varepsilon_1}. \tag{11.6}$$

Далее из (11.2) следует

$$\sum_{q\leqslant k_1/k^2}\frac{l_q}{q^{a_3}}=\prod(a_3)+Bk^{-0.003\varepsilon_1}. \tag{11.7}$$

Наконец, известная арифметическая оценка

$$\tau(n)=O(n^{\eta})$$

при любом фиксированном $\eta>0$ дает

$$\sum_{q\leqslant k_1/k^2}\frac{|l_q|}{q^{a_1}}\ll k^{0.0015\varepsilon_1}.$$

Следовательно, (11.6) и (11.7) дают:

$$L_1(a_3)=\prod(a_3)\,L(a_3)+Bk^{-0.0015\varepsilon_1}. \tag{11.8}$$

Учитывая (11. 1), найдем отсюда

$$L(a_3) = L_1(a_3)\left(\prod(a_3)\right)^{-1} + Bk^{-0.001\varepsilon_1}. \tag{11.9}$$

12. Положим $a_3 = \beta$, так что $\beta \in [1 - 0.001\varepsilon_1,\ 3/2]$.

Лемма 7. *Для любого* $N \in [k^2,\ k^4]$

$$\sum_{n \leqslant N} \mu(n) \ll N^{1-0.01\varepsilon_1}. \tag{12.1}$$

Эта лемма доказывается с помощью тривиальной модификации доказательства I основной леммы: нарушение (12. 1) привело бы к противоречию с гипотезой:

$$h(-k) < k^{1/2-\varepsilon_1}.$$

(По существу лемма 7 — частный случай несколько видоизмененной I основной леммы.)

Введем функцию

$$F(\beta,\ k_2) = \sum_{n \leqslant k_2} a_n n^{-\beta},$$

где

$$a_n = (-1)^{n-1},\quad k_2 = k_1 k = k^4.$$

В таком случае имеем тождество

$$\sum_{n \leqslant k_2} n^{-\beta} \sum_{\delta | n} a_\delta \mu\left(\frac{n}{\delta}\right) = 1 - 2^{1-\beta}; \tag{12.2}$$

его можно переписать в виде

$$\sum_{q \leqslant k_1 k} \frac{\mu(q)}{q^\beta} \sum_{m \leqslant k_1 k/q} \frac{a_m}{m^\beta} = 1 - 2^{1-\beta}. \tag{12.3}$$

Здесь мы можем выделить $q > k_1$ и применить (12. 1) и очевидную оценку $\left|\sum_{m \leqslant \alpha} a_m\right| \leqslant 1$, рассуждая, как и в п. 10 и 11. Тогда получим

$$L(\beta)\,F(\beta,\ k_2) = 1 - 2^{1-\beta} + Bk^{-0.005\varepsilon_1} \tag{12.4}$$

или, учитывая (11.9),

$$L(\beta)\,F(\beta,\ k_2) = (1 - 2^{1-\beta})\left(\prod(\beta)\right) + Bk^{-0.001\varepsilon_1}, \tag{12.5}$$

$$\ln \prod(\beta) \ll (\ln k)^{0.8}. \tag{12.6}$$

Отсюда находим

$$\left.\begin{aligned} L(\beta)\,F(\beta,\ k_2) &> c'_{\varepsilon_1} e^{-c_1(\ln k)^{0.8}} \quad \text{при}\ \beta = 1 + 0.001\varepsilon_1, \\ L(\beta)\,F(\beta,\ k_2) &< -c''_{\varepsilon_1} e^{-c_1(\ln k)^{0.8}} \quad \text{при}\ \beta = 1 - 0.001\varepsilon_1. \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

Но

$$F(\beta,\ k_2) = 1 - \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\beta} - \ldots \pm \frac{1}{k_2^\beta} > 1 - \frac{1}{2^\beta} + \frac{B}{k_2^{1/2}} > \frac{1}{4}.$$

Таким образом, мы получаем весьма важные неравенства:

$$\begin{aligned} L(\beta) &> c_{\varepsilon_1} e^{-c_1(\ln k)^{0.8}} \quad \text{при} \quad \beta = 1 + 0.001\varepsilon_1, \\ L(\beta) &< -c_{\varepsilon_1} e^{-c_1(\ln k)^{0.8}} \quad \text{при} \quad \beta = 1 - 0.001\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{12.8}$$

13. II основная лемма. *Характер $\chi_k(n)$, для которого имеем*

$$h(-k) < k^{1/2-\varepsilon_1},$$

должен обладать свойством $\mathfrak{A}(\beta_1)$ при $\beta_1 = 1 - 0.08\varepsilon_1$.

Для доказательства леммы предположим, что это не так. Тогда найдется $N \geqslant k^{100}$, такое, что для любого $x \in [\sqrt{N}, N]$ будем иметь

$$\left| \sum_{n \leqslant x} \chi_k(n) \mu(n) \right| \leqslant x^{1-0.08\varepsilon_1}. \tag{13.1}$$

Положим $x = N$. Способ «решета» приводит к тождеству

$$\sum_{q \leqslant N} \chi_k(q) \mu(q) q^{-\beta} \sum_{m \leqslant N/q} \chi_k(m) m^{-\beta} = 1. \tag{13.2}$$

Примем во внимание (11.4) и оценки

$$\sum_{n \leqslant N_1} \chi_k(m) \mu(m) m^{-\beta} \ll N_1^{0.001\varepsilon_1},$$

$$\sum_{N_1 \leqslant m \leqslant N_2} \chi_k(m) m^{-\beta} < \frac{k}{N_1^{\beta}}$$

для любого N_1. Тогда (13.1) и (13.2) дадут нам, по тому же способу, что и в п. 9 и 10,

$$M(\beta) \sum_{m \leqslant \sqrt{N}} \frac{\chi_k(m)}{m^{\beta}} = 1 + BN^{-0.05\varepsilon_1}, \tag{13.3}$$

где

$$M(\beta) = \sum_{q \leqslant \sqrt{N}} \chi_k(q) \mu(q) q^{-\beta}.$$

Далее, имеем

$$\sum_{k_1 \leqslant m \leqslant \sqrt{N}} \chi_k(m) m^{-\beta} = Bk^{-1},$$

так что

$$Q(\beta) = \sum_{m \leqslant \sqrt{N}} \frac{\chi_k(m)}{m^{\beta}} = L(\beta) + Bk^{-1}.$$

Отсюда, используя (12.8), получаем:

$$\begin{aligned} Q(\beta) &> \frac{1}{2} c_{\varepsilon_1} e^{-c_1(\ln k)^{0.8}} \quad \text{при} \quad \beta = 1 + 0.001\varepsilon_1, \\ Q(\beta) &< -\frac{1}{2} c_{\varepsilon_1} e^{-c_1(\ln k)^{0.8}} \quad \text{при} \quad \beta = 1 - 0.001\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Так как $Q(\beta)$ — непрерывная функция, то существует точка в интервале $[1-0.001\varepsilon_1, 1+0.001\varepsilon_1]$, где $Q(\beta)=0$. Полагая в неравенстве (13.3) $\beta=\beta_0$, мы придем к абсурдному для больших k равенству

$$0=1+Bk^{-1},$$

которое и доказывает II основную лемму.

14. Теперь можно доказать теорему Зигеля. Возьмем $\varepsilon_1 \in (0; 0.01)$. Если существует достаточно большое k, для которого

$$h(-k)<k^{1/2-\varepsilon_1},$$

то характер $\chi_k(n)$, по II основной лемме, обладает свойством $\mathfrak{A}(1-0.08\varepsilon_1)$. Но тогда, по I основной лемме, имеем для достаточно больших D

$$h(-D)>D^{1/2-\eta(\beta)},$$

где

$$\eta(\beta)=10.5\cdot 0.08\varepsilon_1+\eta_0=0.84\varepsilon_1+\eta_0<0.85\varepsilon_1,$$

ибо η_0 может быть выбрано сколь угодно малым.

Итак, указанных k лишь конечное число, что требовалось доказать.

Литература

1. Виноградов И. М. 1) Об одном асимптотическом равенстве теории квадратичных форм. — Журн. физ.-мат. об-ва, Пермь, 1918, т. 1, с. 18—28; 2) Sur la distribution des résidus et des non-résidus des puissances. — Журн. физ.-мат. об-ва, Пермь, 1918, т. 1, с. 94—98.
2. Линник Ю. В. «Свойства аналогии» L-рядов Dirichlet и теорема Siegel'я о $k(\sqrt{-D})$. — ДАН СССР, 1943, т. 38, № 4, с. 115—117.
3. Гельфонд А. О., Линник Ю. В. О методе Туэ и проблеме эффективизации в квадратичных полях. — ДАН СССР, 1948, т. 61, № 5, с. 773—776.

Приложение

Короткое аналитическое доказательство теоремы Зигеля

Здесь мы также ограничимся случаем отрицательного дискриминанта $-k<0$ во избежание тривиальных осложнений. Мы будем доказывать, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln h(-k)}{\ln k}=\frac{1}{2},$$

прямым продолжением метода Хейльбронна.[1)]

1. Пусть $h(-k)<k^{1/2-\eta_0}$, $\eta_0>0$ фиксированно, $\eta_0<1/2$, $\chi_k(n)$ — соответствующий реальный характер. Тогда

$$L(s,\chi_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_k(n)n^{-s}$$

1) Не используя ни реальности нулей, ни положительности коэффициентов некоторых функций.

имеет хоть один нуль в прямоугольнике $|t| \leqslant \ln^2 k$, $\sigma > 1 - 0.001\eta_0$ при достаточно большом k. Будь это не так, мы имели бы

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L k^s \Gamma(s)\left\{-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{L'(s,\chi_k)}{L(s,\chi_k)}\right\} ds = \sum_{n=1}^{\infty}(1+\chi_k(n))\,\Lambda(n)\,e^{-n/k},$$

где L — контур, $\sigma = 1 - \eta_0/2000$, $|t| \leqslant (\ln^2 k)/2$, $1 - \eta_0/2000 < \sigma < 2$, $|t| = (\ln^2 k)/2$, $\sigma = 2$, $|t| \geqslant \ln^2 k/2$, что равнялось бы $k + O(k^{1-\eta_0/2000}\ln k)$. Так как количество чисел, изобразимых приведенной квадратичной формой $Q(x, y)$ дискриминанта $-k$, не превосходящих $k \ln k$, как легко подсчитать, будет $\ll (k\ln k)/\sqrt{k}$ и так как при $\chi_k(p) = +1$ простое число p изображается формой $Q(x, y)$ дискриминанта $-k$, то из нашего результата следовало бы, что

$$h(-k) > c_1 \frac{\sqrt{k}}{\ln k},$$

что противоречит гипотезе.

2. Покажем, исходя из той же гипотезы $h(-k) < k^{1/2-\eta_0}$, что если $-D$ — фундаментальный дискриминант, где D — достаточно большое сравнительно с k, то

$$h(-D) > D^{1/2-0.9\eta_0}. \tag{2.1}$$

Тогда получится, что всякое неравенство $h(-k) < k^{1/2-\eta_0}$ может выполняться лишь конечное число раз, что и докажет теорему.

Пусть для некоторого D (насколько большого — увидим в дальнейшем) выполняется

$$h(-D) < D^{1/2-0.9\eta_0},$$

и пусть $\chi_D(n)$ — соответствующий реальный характер. Тогда

$$2L(s, \chi_k)\,L(s, \chi_k\chi_D) = \sum_{Q}\sum_{Q>0}\chi_k(Q)\,(Q(x, y))^{-s}, \tag{2.2}$$

где Q пробегает $h(-D)$ приведенных форм дискриминанта $-D$. Мы имеем при $n \geqslant D^2$

$$\sum_{Q\leqslant n}\chi_k(Q)\,Q(x, y) \ll k\sqrt{n},$$

так что (2.2) сходится в $\sigma \geqslant 3/4$. Рассматриваем область $|t| \leqslant \ln^3 k$, $\sigma \geqslant 1 - 0.01\eta_0$. В этой области

$$2L(s, \chi_k)\,L(s, \chi_k\chi_D) = \sum_{Q}\sum_{Q\leqslant D^3}\chi_k(Q)\,(Q(x, y))^{-s} + Bk^2D^{-1/2}. \tag{2.3}$$

На основании предыдущего неравенства B — ограниченное число, не всегда одно и то же.

Проведем над правой частью (2.3) операцию решета Эратосфена, в результате которой выяснится, что в нашей области при достаточно больших D (2.3) будет по модулю $> e^{-(\ln D)^{0.8}}$, так что в этой области $L(s, \chi_k) \neq 0$, что и приводит к очевидному противоречию.

3. Лемма 1.

$$\sum_{Q} \sum_{Q \leqslant x} \chi_k(Q)(Q(x, y))^{-s} \ll x^{0.02\eta_0}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Правая часть мажорируется $\sum_{n \leqslant x} 2^{\nu(n)} n^{-1+0.01\eta_0}$.

Положим $D_1 = D^3$ и обозначим сумму из (3.1) при $x = D_1$ через $S(s)$. Положим далее $A = 4/\eta_0$, $(\ln D)^A = \Delta$ и обозначим через $\mathfrak{U}_0$ множество чисел, делящих D, через $\mathfrak{U}_1$ — множество чисел, для которых $\chi_D(p) = +1$, через $\mathfrak{U}_{-1}$ — множество чисел, для которых $\chi_D(p) = -1$. Положим

$$\prod\nolimits_1 (s) = \prod_{p \leqslant \Delta} (1 - \chi_k(p) p^{-s})(1 - \chi_k(p) \chi_D(p) p^{-s}) \tag{3.2}$$

и через $\overline{\prod}_1 (s)$ обозначим то же произведение, где $\chi_k(p)$ и $\chi_k(p)\chi_D(p)$ заменены на -1.

Лемма 2. *Пусть $N \geqslant D$ — какое-либо число, а $\sum_N$ есть сумма модулей тех членов развернутого произведения* (3.2), *для которых соответствующие произведения простых чисел лежат между N и $2N$; тогда будем иметь оценку:*

$$\sum\nolimits_N \ll N^{-015\eta_0}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть это не так для какого-либо N. Тогда в точке $s_0 = 1 - 0.2\eta_0$ сумма модулей таких же членов была бы $\gg N^{0.05\eta_0}$ и мы, очевидно, имели бы

$$\ln \overline{\prod}_1 (s_0) \gg 0.05\eta_0 \ln N.$$

Но, с другой стороны,

$$\ln \overline{\prod}_1 (s_0) \ll \sum_{n \leqslant \Delta} \frac{1}{n^{s_0}} \ll \Delta^{1-s_0} = (\ln D)^{A \cdot 0.02\eta_0} = (\ln D)^{0.8} \leqslant (\ln N)^{0.8}.$$

Это противоречие доказывает утверждение.

Лемма 3. *Для любого $N \in [\Delta, D^3]$ число простых $p \in \mathfrak{U}_1$, лежащих между N* и $2N$, будет

$$N_1 \leqslant N^{1-0.15\eta_0}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть это не так для данного N. Найдем целое число r, для которого $(2N)^r = D^\gamma$, $2 \leqslant \gamma \leqslant 3$, и будем рассматривать $C^r_{N_1}$ всевозможных различных произведений из наших простых чисел.

Имеем

$$C^r_{N_1} > \frac{N_1^r 2^{-r}}{r!} > N_1^r e^{-r(1+\ln r)}, \quad r = \frac{3 \ln D}{\ln \Delta} = \frac{3 \ln D}{4 \ln \ln D} \eta_0, \quad \ln r \sim \ln \ln D.$$

Отсюда при большом D находим

$$C_{N_1}^r > N_1^r D^{-0.76\eta_0}.$$

Если $N_1 > N^{1-0.015\eta_0}$, то

$$C_{N_1}^r > D^\gamma D^{-0.81\eta_0}.$$

Построенные произведения лежат между D^γ и $D^\gamma \cdot 2^{-r}$, $r \leqslant \leqslant (3/4)\,\eta_0 \ln D/\ln\ln D$. Все эти произведения изображаются квадратичными формами $Q(x, y)$, каждое не более 2^r раз. Отсюда немедленно следует, что $h(-D) > D^{1/2-0.82\eta_0}$ при большом D, что противоречит (2.1).

4. Отсеем из $S(s)$ числа $Q(x, y)$, делящиеся на $p \leqslant \Delta$, и обозначим оставшуюся сумму через $S_1(s)$.

Лемма 1 и лемма 2 дают возможность заключить после тривиального подсчета: [2]

$$S_1(s) = S(s)\left(\prod\nolimits_1(s)\right)^{-1} + B \cdot D^{-0.05\eta_0}. \tag{4.1}$$

Далее, $S_1(s)-1$ состоит из таких членов, где $Q(x, y) \geqslant \Delta$. Сумма модулей членов $S_1(s)-1$ при $s=\sigma+it$ в нашей области мажорируется произведением

$$\overline{\prod}_2(\sigma) = \prod_{\substack{p\in\mathfrak{A}_1 \\ D^3\geqslant p>\Delta}} (1-p^{-\sigma})^{-2} \prod_{\substack{p\in\mathfrak{A}_{-1} \\ D^3\geqslant p>\Delta}} (1-p^{-2\sigma}).$$

На основании леммы 3 имеем

$$\ln \overline{\prod}_2(\sigma) \ll \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta^\sigma}\frac{1}{2^{j\sigma}} (\Delta \cdot 2^j)^{1-0.015\eta_0}.$$

Ввиду $\sigma \geqslant 1 - 0.01\eta_0$ отсюда следует, что

$$\ln \overline{\prod}_2(\sigma) \ll \Delta^{-0.005\eta_0} \ll (\ln D)^{-0.02}.$$

Отсюда и из (4.1) получаем

$$S(s)\left(\prod\nolimits_1(s)\right)^{-1} = 1 + B(\ln D)^{-0.02}.$$

Но из доказательства леммы 2 следует

$$\ln\left|\prod\nolimits_1(s)\right| < \ln \overline{\prod}_1(s_0) \ll (\ln D)^{0.8},$$

откуда

$$|S(s)| \geqslant e^{-(\ln D)^{0.8}},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что применение квадратичных форм в этом доказательстве не очень существенно.

---

[2] См. п. 9 и 10 статьи.

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ, КАСАЮЩИЕСЯ БИНАРНОЙ ПРОБЛЕМЫ ГОЛЬДБАХА

Изв. АН СССР. Сер. мат., 1952, т. 16, № 6, с. 503—520

§ 1. В настоящей работе подробно развиваются соображения, кратко сформулированные в заметке [1] и частично — в работе [2]. Именно, ставится вопрос о том, что можно получить из гипотезы Римана и более слабых «плотностных» теорем и гипотез в направлении бинарной проблемы Гольдбаха о представлении четных чисел суммою двух простых.

Условность этих исследований может вызвать вопрос о том, стоит ли их воспроизводить. Но история известной «тернарной» проблемы Гольдбаха, решенной И. М. Виноградовым в 1937 г., показывает, что условные исследования, касавшиеся ее и смежных проблем, все же принесли пользу и выделили ряд узловых вопросов теории простых чисел.

Кроме того, в этих исследованиях выясняется роль «плотностных» оценок, достигаемых значительно легче, чем гипотеза Римана. Они дают возможность получать и «безусловные» теоремы, касающиеся бинарных задач. Наконец, появляется возможность вникнуть в некоторые трудности и особенности бинарных задач.

§ 2. Для рассмотрения бинарной проблемы Гольдбаха об уравнении

$$p + p' = N \quad (N \text{ четно; } p,\ p' \text{ простые}) \tag{2.1}$$

вводим сумму

$$S(\vartheta, N) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n/N} e^{-2\pi i \vartheta n} \Lambda(n). \tag{2.2}$$

Если мы обозначим

$$Q(N) = \sum_{p+p'=N} \ln p \ln p', \tag{2.3}$$

то, очевидно, будем иметь:

$$Q(N) = e \int_0^1 (S(\vartheta, N))^2 e^{2\pi i \vartheta N} d\vartheta + O\left(N^{3/4} \ln^2 N\right). \tag{2.4}$$

Мы видим, что для решения бинарных задач нужно уметь вычислять интеграл (2.4) по всему сегменту $[0, 1]$. Ожидаемый порядок должен мало отличаться от порядка N.

Кроме того, из асимптотического закона простых чисел известно, что

$$\int_0^1 |S(\vartheta, N)|^2 d\vartheta = \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda^2(n) e^{-2n/N} \sim \frac{N}{2} \ln N. \tag{2.5}$$

Принятие тех или иных римановых гипотез или «плотностных» гипотез о нулях $L(s, \chi)$, как оказывается, дает возможность вычислять интеграл типа (2. 4) по некоторым «достаточно длинным» кускам сегмента $[0, 1]$ и получать теоремы, имеющие определенный арифметический смысл.

§ 3. Мы рассмотрим сперва, что дает для бинарных задач гипотеза Римана для одной только ζ-функции $\zeta(s)$, которую мы обозначим через $R[\zeta(s)]$, и плотностная гипотеза или теорема, обозначаемая через $D[\zeta(s), N(T, \nu)]$, которая состоит в следующем: для любого числа ν из сегмента $[0, 1/2]$ число нулей $\zeta(s)$ ($s=\sigma+it$) в прямоугольнике $1/2+\nu \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$ не превосходит $N(T, \nu)$.

Такая функция $N(T, \nu)$ будет обычно аппроксимироваться выражениями вида $T^{1-\varphi(\nu)} \ln^r T$ при ν, не очень близких к $1/2$, а вблизи $\nu=1/2$ ($\sigma=1$) будет равна нулю в силу известных теорем об отсутствии там нулей $\zeta(s)$ (см. [3]).

Имеют место следующие условные теоремы.

Теорема 1. *Из римановой гипотезы $R[\zeta(s)]$ следует, что при $\varkappa_N=1/(\ln N)^{3+\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$ — любое малое фиксированное число и $N > N_0(\varepsilon)$, имеем:*

$$\int\limits_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} (S(\vartheta, N))^2 e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta = \frac{N}{e} + O\left(\frac{N}{(\ln N)^{\varepsilon/3}}\right). \tag{3. 1}$$

Из этого соотношения следует теорема.

Теорема 2. *При тех же условиях, при любом $\varepsilon_0 > 0$ и любом $N > N_0(\varepsilon_0)$, уравнение в простых числах*

$$|p+p'-N| \leqslant H \tag{3. 2}$$

разрешимо при $H=(\ln N)^{3+\varepsilon_0}$.

Имеет место также асимптотическая формула для числа решений неравенства (3. 2). При этом существенными оказываются не сама по себе гипотеза Римана $R[\zeta(s)]$, а «плотностные» факты. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Из плотностной гипотезы $D[\zeta(s), N(T, \nu)]$, где $N(T, \nu)=T^{1-2\nu} \ln^r T$ и $r \geqslant 1$ — константа, следует разрешимость уравнения в простых числах:*

$$|p+p'-N| \leqslant H_1, \quad H_1=\ln^{r+6} N. \tag{3. 3}$$

Теорема 4. *Из гипотезы Римана для всех рядов $L(s, \chi_q)$ по данному модулю $q \leqslant N/\ln^6 N$ следует разрешимость уравнения*

$$p+p'=N+qh, \tag{3. 4}$$

где $0 \leqslant h \leqslant \ln^6 N$, если только N четно при четном q.

Отсюда следует теорема.

Теорема 5. *Из расширенной гипотезы Римана следует разрешимость сравнений*

$$p+p' \equiv N \pmod{Q} \tag{3. 5}$$

для любого $Q \leqslant N/\ln^6 N$, если только N четно при четном Q.

§ 4. Рассмотрим доказательство теоремы 1. Примем гипотезу $R[\zeta(s)]$ и обозначим через $\rho_k = 1/2 + it_k$ нули $\zeta(s)$, нумеруемые, считая кратность, положительными числами k при $t_k > 0$ и отрицательными при $t_k < 0$. Для вычисления интеграла

$$\int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} (S(\vartheta, N))^2 e^{2\pi i\vartheta N} d\vartheta$$

надо выразить $S(\vartheta, N)$ через нули $\zeta(s)$.

Полагая $x = 1/N + 2\pi i\vartheta$, имеем (см. [1, 2]):

$$S(\vartheta, N) = \frac{1}{x} - \sum_{\rho_k} x^{-\rho_k} + O(\ln^3 N). \tag{4.1}$$

Обозначим

$$\sum_{\rho_k} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k) = S_1(\vartheta, N). \tag{4.2}$$

Тогда

$$x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k) = |x|^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k) e^{(\pi/2)t_k} e^{-t_k \operatorname{arctg}(1/2\pi N\vartheta)} e^{-(1/2)i(\pi/2 - \operatorname{arctg}(1/2\pi N\vartheta))}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J_1 = \int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} [S(\vartheta, N)]^2 e^{2\pi i\vartheta N_1} d\vartheta.$$

Имеем

$$J_1 = \int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} \frac{1}{x^2} e^{2\pi i\vartheta N_1} d\vartheta + R,$$

где

$$|R| \leqslant 2\int_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta + 2U_1 + 2U_2 + 2U_3 + O(\ln^6 N),$$

$$U_1 = \sqrt{\int_0^{\varkappa_N} \frac{d\vartheta}{|x|^2} \int_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta},$$

$$U_2 = \sqrt{\int_0^{\varkappa_N} \frac{d\vartheta}{|x^2|} \ln^6 N},$$

$$U_3 = \sqrt{\int_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ln^6 N}.$$

§ 5. Разобьем

$$S_1(\vartheta, N) = -\sum_{\rho_k} x^{-\rho_k}\Gamma(\rho_k)$$

на сумму

$$S_1(\vartheta, N) = S_2(\vartheta, N) + S_3(\vartheta, N),$$

где $S_2(\vartheta, N)$ содержит сумму по таким корням ρ_k, у которых $t_k \geqslant 0$, а $S_3(\vartheta, N)$ — по таким, у которых $t_k < 0$. Далее, разбивая интеграл $\int\limits_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta$ на сумму интегралов

$$\int\limits_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta = \int\limits_0^{4/N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta + \int\limits_{4/N}^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta,$$

получим:

$$J = \int\limits_{4/N}^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \leqslant 2\int\limits_{4/N}^{\varkappa_N} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta + 2\int\limits_{4/N}^{\varkappa_N} |S_3(\vartheta, N)|^2 d\vartheta. \quad (5.1)$$

Последние два интеграла будем оценивать порознь, разбив их на части вида

$$\int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}}, \quad \text{где} \quad \frac{\varkappa_N}{2^r} \geqslant \frac{4}{N}.$$

Рассмотрим один из таких интегралов:

$$\int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta. \quad (5.2)$$

Пусть

$$\rho_{k_1} = \beta_{k_1} + it_{k_1} \quad \text{и} \quad \rho_{k_2} = \beta_{k_2} + it_{k_2}$$

— два входящих в сумму члена. Так как

$$x = \frac{1}{N} + 2\pi i\vartheta,$$

то получаем

$$\int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} x^{-\rho_{k_1}}\overline{x^{-\rho_{k_2}}}\,\Gamma(\rho_{k_1})\,\Gamma(\overline{\rho_{k_2}})\,d\vartheta =$$

$$= \Gamma(\rho_{k_1})\,\Gamma(\overline{\rho_{k_2}})\,e^{-(\pi/2)(t_{k_1}+t_{k_2})}e^{-i(\pi/2)(\beta_{k_1}-\beta_{k_2})}\int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} \varphi_1(\vartheta)\,\varphi_2(\vartheta)\,d\vartheta,$$

где

$$\varphi_1(\vartheta) = e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\vartheta)}\, e^{i(\beta_{k_1}-\beta_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\vartheta)},$$

$$\varphi_2(\vartheta) = |x|^{-\rho_{k_1}-\overline{\rho_{k_2}}},$$

или, полагая

$$\int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\vartheta} \varphi_2(\vartheta)\, d\vartheta = \Phi(\vartheta),$$

находим:

$$\int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} \varphi_1(\vartheta)\,\varphi_2(\vartheta)\, d\vartheta = \int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} \varphi_1(\vartheta)\, d\Phi(\vartheta) =$$

$$= \varphi_1(\vartheta)\,\Phi(\vartheta)\Big|_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} - \int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} \Phi(\vartheta)\,\varphi_1'(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Положим $\Phi = \sup|\Phi(\vartheta)|$ в указанных пределах; тогда, ввиду того что t_{k_1} и $t_{k_2} > 0$, наш интеграл не будет превосходить выражения

$$\Phi\Bigg[2e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(2^r/2\pi N\varkappa_N)} +$$

$$+ \int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\vartheta)} \frac{t_{k_1}+t_{k_2}+1}{1+1/(2\pi N\vartheta)^2}\,\frac{d\vartheta}{2\pi N\vartheta^2}\Bigg].$$

Если $t_{k_1}+t_{k_2} \leqslant 1$, то это выражение не превосходит

$$\Phi\left(2 + \frac{2\cdot 2^r}{2\pi N\varkappa_N}\right) \leqslant c_1\Phi.$$

Если же $t_{k_1}+t_{k_2} > 1$, то ввиду того что

$$\int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\vartheta)} \frac{t_{k_1}+t_{k_2}+1}{1+1/(2\pi N\vartheta)^2}\,\frac{d\vartheta}{2\pi N\vartheta^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\vartheta)} \frac{t_{k_1}+t_{k_2}}{1+1/(2\pi N\vartheta)^2}\,\frac{d\vartheta}{2\pi N\vartheta^2} =$$

$$= 2e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\vartheta)}\Big|_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} \leqslant 2e^{\,(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(2^{r-1}/2\pi N\varkappa_N)},$$

найдем, что наш интеграл не будет превосходить

$$\Phi \cdot 2e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arc\,tg}(2^r/2\pi N\varkappa_N)}.$$

Далее, имеем

$$\Phi(\vartheta) = \int_{\varkappa_N/2^r}^{\vartheta} |x|^{-\beta_{k_1}-\bar\beta_{k_2}} d\vartheta = \int_{\varkappa_N/2^r}^{\vartheta} \left(\sqrt{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\vartheta^2}\right)^{-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}-i(t_{k_1}-t_{k_2})} d\vartheta.$$

Положим

$$u = \sqrt{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\vartheta^2}, \qquad \vartheta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{u^2-\frac{1}{N^2}};$$

тогда найдем, что интеграл (по второй теореме о среднем значении) будет равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varkappa_N/2^r}^{\vartheta} u^{-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}-i(t_{k_1}-t_{k_2})} \frac{du}{\sqrt{1-1/N^2u^2}}.$$

Здесь

$$u = \sqrt{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\vartheta^2} > \sqrt{\frac{1}{N^2}+\frac{4\pi^2\cdot 16}{N^2}} > \frac{4}{N}.$$

Ввиду этого, по второй теореме о среднем значении,

$$\Phi = \sup_{\varkappa_N/2^r \leqslant \vartheta \leqslant \varkappa_N/2^{r-1}} |\Phi(\vartheta)| \leqslant 2\sup\left|\int_{\vartheta=\varkappa_N/2^r}^{\vartheta} u^{-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}-i(t_{k_1}-t_{k_2})} du\right|.$$

При ϑ, меняющемся в пределах от $\varkappa_N/2^r$ до $\varkappa_N/2^{r-1}$, u не выходит из пределов $\varkappa_N/2^{r+1}$, $\varkappa_N/2^r$, поэтому искомый supremum не превосходит

$$\min\left\{\frac{(\varkappa_N/2^r)^{-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}+1}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|},\quad \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\}.$$

Далее, учитывая, что при $t_{k_2} \geqslant 0$

$$\Gamma(\rho_{k_1})\, e^{(\pi/2)\, t_{k_1}} = O\left(|t_{k_1}+1|^{\beta_{k_1}-1/2}\right),$$

а при $t_{k_1} < 0$

$$\Gamma(\rho_{k_1})\, e^{(\pi/2)\, t_{k_1}} = O\left(|t_{k_1}|+1\right)^{\beta_{k_1}-1/2} e^{-\pi|t_{k_1}|},$$

получаем:

$$\int_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} |S_2(\vartheta, N)|^2\, d\vartheta \leqslant \sum_{\rho_{k_1},\,\rho_{k_2}} |t_{k_1}+1|^{\beta_{k_1}-1/2}\, |t_{k_2}+1|^{\beta_{k_2}-1/2} \times$$

$$\times \min\left\{\frac{(\varkappa_N/2^r)^{-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}+1}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|},\quad \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\} \times$$

$$\times e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arc\,tg}(1/(2\pi N\varkappa_N/2^r))}. \tag{5.3}$$

Для $S_3(\vartheta, N)$, где t_{k_1} и $t_{k_2} < 0$, получим совершенно аналогично:

$$\int_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} |S_3(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \leqslant \sum_{\substack{\rho_{k_1}, \rho_{k_2} \\ t_{k_1}, t_{k_2} < 0}} (|t_{k_1}| + 1)^{\beta_{k_1}-1/2} \times$$

$$\times (|t_{k_2}| + 1)^{\beta_{k_2}-1/2} e^{-(\pi - \operatorname{arc\,tg}(1/2\pi N \varkappa_N/2^{1-r}))(|t_{k_1}|+|t_{k_2}|)} \times$$

$$\times \min\left\{\frac{(\varkappa_N/2^r)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}| + |t_{k_1}-t_{k_2}|}, \quad \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\}. \tag{5.4}$$

Окончательно находим

$$\int_{4/N}^{\varkappa_N} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll \sum_r \sum_{\rho_{k_1}, \rho_{k_2}} (t_{k_1} + 1)^{\beta_{k_1}-1/2} (t_{k_2} + 1)^{\beta_{k_2}-1/2} \times$$

$$\times \min\left\{\frac{(\varkappa_N/2^r)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}| + |t_{k_1}-t_{k_2}|}, \quad \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\} \times$$

$$\times e^{-(t_{k_1}+t_{k_2}) \operatorname{arc\,tg}(1/(2\pi N \varkappa_N/2^r))}, \tag{5.5}$$

$$\int_{4/N}^{\varkappa_N} |S_3(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \leqslant \sum_r \sum_{\rho_{k_1}, \rho_{k_2}} (|t_{k_1}| + 1)^{\beta_{k_1}-1/2} (|t_{k_2}| + 1)^{\beta_{k_2}-1/2} \times$$

$$\times \min\left\{\frac{(\varkappa_N/2^r)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}| + |t_{k_1}-t_{k_2}|} \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\} \times$$

$$\times e^{-(\pi - \operatorname{arc\,tg}(1/2\pi N \varkappa_N/2^{1-r}))(|t_{k_1}|+|t_{k_2}|)}. \tag{5.6}$$

§ 6. Введем теперь риманову гипотезу $R[\zeta(s)]$ и посмотрим, к чему она приводит в отношении J_1 и J_2. В этом случае $\beta_k = 1/2$ и, таким образом,

$$|S_2(\vartheta, N)| \leqslant \sum_{\rho_k} \left|\frac{1}{N} + 2\pi i\vartheta\right|^{-1/2} |\Gamma(\rho_k)| e^{(\pi/2) t_k} \cdot e^{-t_k \operatorname{arc\,tg}(1/2\pi N\vartheta)}. \tag{6.1}$$

Ввиду того что между T и $T+1$ в критической полосе лежит $O(\ln(|T|+1))$ нулей $\zeta(s)$, легко находим из (6.1):

$$S_1(\vartheta, N) \ll \left(\frac{1}{N^2} + 4\pi^2\vartheta^2\right)^{-1/4} (N\vartheta + 1) \ln(N\vartheta + 2).$$

Иначе: при $\vartheta > 4/N$ $S_1(\vartheta, N) \ll N\vartheta^{1/2} \ln N$, а при $0 < \vartheta < 4/N$

$$S_1(\vartheta, N) \ll N^{1/2}.$$

Отсюда выводим:

$$\int_0^{4/N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll 1.$$

Далее, оценка (5.5) дает:

$$\int_{4/N}^{\varkappa_N} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll \sum_r \sum_{\substack{\rho_{k_1}, \rho_{k_2} \\ t_{k_1}>0,\ t_{k_2}>0}} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2}) \operatorname{arc\,tg}(1/(2\pi N \varkappa_N/2^r))} \times$$

$$\times \min\left\{\frac{1}{|t_{k_1}-t_{k_2}|},\ \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\}. \tag{6.2}$$

Ввиду указанной выше оценки для числа нулей $\zeta(s)$ имеем:

$$\int_{4/N}^{\varkappa_N} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll \sum_r \sum_{k_1, k_2=2}^{\infty} \ln k_1 \cdot \ln k_2 \cdot e^{-(k_1+k_2) \operatorname{arc\,tg}(1/(2\pi N \varkappa_N/2^r))} \times$$

$$\times \min\left\{\frac{1}{|k_1-k_2|},\ \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\} \ll \sum_r \ln^2 N \cdot \ln N \cdot N \frac{\varkappa_N}{2^r} \ll N\varkappa_N \ln^3 N. \tag{6.3}$$

§ 7. Для $S_3(\vartheta, N)$ без труда находим такую же оценку и, соединяя оценки типа (6.2) и (6.3), получаем основную оценку:

$$\int_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll N\varkappa_N \ln^3 N + 1. \tag{7.1}$$

Оценим интеграл

$$\int_0^{\varkappa_N} \frac{d\vartheta}{|x|^2} = \int_0^{\varkappa_N} \frac{d\vartheta}{1/N^2 + 4\pi^2\vartheta^2}.$$

Легко подсчитать, что при всех $\varkappa_N$ этот интеграл $\ll N$ равномерно по $\varkappa_N$. Отсюда имеем при $\varkappa_N > 4/N$:

$$U_1 \ll \sqrt{N \cdot N\varkappa_N \ln^3 N} = N\varkappa_N^{1/2} \ln^{3/2} N,$$

$$U_2 \ll \sqrt{N} \ln^3 N,$$

$$U_3 \ll \sqrt{N\varkappa_N \ln^3 N \cdot \ln^6 N} \ll \sqrt{N}.$$

Окончательно это дает:

$$I_1 = \int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} \frac{1}{x^2} e^{2\pi i \vartheta N_1} d\vartheta + R_1,$$

$$|R_1| \ll N\varkappa_N \ln^3 N.$$

§ 8. Найдем асимптотическое выражение интеграла J_1:

$$J_1 = \int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} \frac{1}{(1/N + 2\pi i\vartheta)^2} e^{2\pi i \vartheta N_1} d\vartheta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1/N + 2\pi i\vartheta)^2} e^{2\pi i \vartheta N_1} d\vartheta + O\left(\frac{1}{\varkappa_N}\right).$$

Написанный интеграл легко вычисляется при помощи теории вычетов и оказывается равным $N_1 e^{-N_1/N}$, так что

$$J_1 = N_1 e^{-N_1/N} + O\left(\frac{1}{\varkappa_N}\right). \tag{8.1}$$

§ 9. Рассмотрим уравнение $|p+p'-N| \leqslant H$, где $H = \ln(N)^{3+\varepsilon_0}$, ε_0 — любое фиксированное число. Число решений такого уравнения совпадает с числом решений уравнения $p+p' = N+x$, где x пробегает целые числа: $-H \leqslant x \leqslant H$. Полагая, как и раньше,

$$Q(N_1) = \sum_{p+p'=N_1} \ln p \ln p',$$

имеем:

$$Q(N_1) = e \int_{-1/2}^{1/2} (S(\vartheta, N))^2 e^{2\pi i \vartheta N_1} d\vartheta + O(N^{3/4} \ln^4 N).$$

Пусть $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_r, 0 \leqslant x_i \leqslant H/r = H_1$, где $r = 2[1/\varepsilon_0] + 1$. Обозначим

$$T(\vartheta) = \sum_{0 \leqslant x_j \leqslant H_1} e^{2\pi i \vartheta x_j}$$

и рассмотрим при числах N_1, пробегающих выражения $N+x$:

$$\sum_{N_1} Q(N_1) = e \int_{-1/2}^{1/2} (S(\vartheta, N))^2 (T(\vartheta))^r e^{2\pi i \vartheta N} d\vartheta =$$

$$= e \int_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} (S(\vartheta, N))^2 (T(\vartheta))^r e^{2\pi i \vartheta N} d\vartheta +$$

$$+ e \left(\int_{-1/2}^{-\varkappa_N} + \int_{\varkappa_N}^{1/2} ((S(\vartheta, N))^2 (T(\vartheta))^r e^{2\pi i \vartheta N} d\vartheta \right).$$

Заметим, что $T(\vartheta) \ll 1/|\vartheta|$ и что при $\vartheta \in [\varkappa_\nu, 1/2]$

$$T(\vartheta) \ll \frac{1}{\varkappa_N}.$$

Положим $\varkappa_N = (\ln N)^{-3-\varepsilon_0/2}$; тогда для нашего сегмента получим:

$$|T(\vartheta)| \ll \frac{1}{\varkappa_N} \ll \frac{H}{(\ln N)^{\varepsilon_0/2}},$$

$$|T(\vartheta)|^r \ll \frac{H^r}{(\ln N)^{\varepsilon_0 r/2}} \ll \frac{H^r}{\ln^2 N}.$$

Отсюда следует:

$$\left(\int\limits_{-1/2}^{-\varkappa_N} + \int\limits_{\varkappa_N}^{1/2} |S(\vartheta)|^2 |T(\vartheta)|^r d\vartheta\right) \ll \frac{H^r}{\ln^2 N} \cdot \int\limits_0^1 |S(\vartheta)|^2 d\vartheta.$$

Ввиду тривиальной оценки

$$\int\limits_0^1 |S(\vartheta)|^2 d\vartheta \ll N \ln N$$

находим для наших интегралов оценку $H^r N/\ln N$. Отсюда следует

$$\sum_{N_1} Q(N_1) = e \sum_{N_1} \int\limits_{-\varkappa_N}^{\varkappa_N} (S(\vartheta))^2 e^{2\pi i \vartheta N_1} d\vartheta + B \frac{H^r N}{\ln N},$$

где B — ограниченная величина, не всегда одна и та же. Согласно предыдущему,

$$\sum_{N_1} Q(N_1) = eN \sum_{N_1} e^{-N_1/N} + BN \sum_{N_1} \varkappa_N \ln^3 N + B \frac{H^r N}{\ln N},$$

$$N_1 = N + x_1 + \ldots + x_r, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant H/r.$$

Имеем:

$$\sum_{N_1} \varkappa_N \ln^3 N = \sum_{N_1} \frac{1}{(\ln N)^{\varepsilon_0/2}} \ll \frac{H^r}{(\ln N)^{\varepsilon_0/2}},$$

$$cN \sum_{N_1} e^{-N_1/N} > c_0 H^r N \quad (c_0 > 0 \text{ — константа}).$$

Таким образом,

$$\sum Q(N_1) > \frac{c_0}{2} H^r N$$

при достаточно большом N, что и доказывает разрешимость уравнения

$$|p + p' - N| \leqslant H \text{ при } H = (\ln N)^{3+\varepsilon_0}.$$

Несколько усложнив доказательство, можно было бы вывести асимптотическую формулу для совокупного числа решений уравнений $|p + p' - N| \leqslant H$, но мы этот вывод опускаем.

§ 10. Посмотрим, что дает замена римановой гипотезы $R[\zeta(s)]$ на плотностную теорему или гипотезу о числе нулей $\zeta(s): D[\zeta(s), N(T, \nu)]$. Число нулей $\zeta(s)$ при $|t| \leqslant T$, $1/2 + \nu \leqslant \sigma \leqslant 1$ не превосходит

$$N(T, \nu) \ll T^{1-\varphi(\nu)} \ln^r T, \tag{10.1}$$

где $r \geqslant 1$ — константа. Желая дать оценку для интеграла

$$\int\limits_0^{\varkappa_N} |S_1(\vartheta, N)|^2 d\vartheta,$$

обратимся к выражению:

$$\int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll$$

$$\ll \sum_{\rho_{k_1}, \rho_{k_2}} (t_{k_1}+1)^{\beta_{k_1}-1/2} (t_{k_2}+1)^{\beta_{k_2}-1/2} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2}) \operatorname{arctg} (1/(2\pi N \varkappa_N/2^r))} \times$$

$$\times \min\left\{\frac{(\varkappa_N/2^r)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|}, \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\}.$$

Разобьем полосу $[1/2, 1]$ на вертикальные полосы толщиной $1/\ln^2 N$ в количестве $\ll \ln^2 N$; обозначим их через $S_1, \ldots, S_R$, где $R \ll \ln^2 N$. Тогда

$$\int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} |S_2(\vartheta, N)|^2 d\vartheta \ll \ln^2 N \sum_{k=1}^{R} \sum_{\rho_{k_1}, \rho_{k_2} \in S_k} (t_{k_1}+1)^{\beta_{k_1}-1/2} (t_{k_2}+1)^{\beta_{k_2}-1/2} \times$$

$$\times e^{-(t_{k_1}+t_{k_2}) \operatorname{arctg} (1/(2\pi N \varkappa_N/2^r))} \cdot \min\left\{\frac{(\varkappa_N/2^r)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|},\right.$$

$$\left.\left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\}, \tag{10.2}$$

где суммирование идет по ρ_{k_1} и ρ_{k_2} в полосе S_u. Пусть в полосе S_u имеем

$$\frac{1}{2}+\nu \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2}+\nu+\frac{1}{\ln^2 N}.$$

Число нулей ρ_{k_1} или ρ_{k_2} в этой полосе при $|t| \leqslant T$ будет

$$N(T, \nu) \ll T^{1-\varphi(\nu)} \ln^r T,$$

поэтому часть суммы (10.2), относящаяся к полосе S_u, будет

$$\ll \left(N \frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{2\nu} \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{-2\nu} N(T, \nu) \ln^2 T \ll N^{2\nu} \left(N \frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\varphi(\nu)} \ln^{r+2} N.$$

Эта оценка действует при $\nu \leqslant 1/2 - 1/(\ln N)^{10/11}$, а при $\nu > 1/2 - 1/(\ln N)^{10/11}$ соответствующая сумма пуста (см. [3]). Мы видим, что если для всех полос

$$N^{2\nu} \left(N \frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\varphi(\nu)} \ll \frac{N}{\ln^{r+6} N},$$

то

$$\int\limits_{\varkappa_N/2^r}^{\varkappa_N/2^{r-1}} |S_2(\vartheta, N)|^2\, d\vartheta \text{ будет } \ll \frac{N}{\ln^2 N}.$$

Таким образом, нам достаточно неравенства

$$N^{1+2\nu-\varphi(\nu)} \left(\frac{\varkappa_N}{2^r}\right)^{1-\varphi(\nu)} \ll \frac{N}{\ln^{r+6} N}$$

или

$$\varkappa_N \ll \frac{1}{(\ln N)^{(r+6)/(1-\varphi(\nu))}} \frac{1}{N^{(2\nu-\varphi(\nu))/(1-\varphi(\nu))}}$$

для $0 \leqslant \nu \leqslant 1/2 - 1/(\ln N)^{10/11}$. Если $\varphi(\nu) < 2\nu$, то минимальное $\varkappa_N$ получается при максимуме выражения $(1-2\nu)/(1-\varphi(\nu))$. Если же $\varphi(\nu) \geqslant 2\nu$, то минимальное $\varkappa_N$ получается при $\nu = 0$. В частности, если $\varphi(\nu) = 2\nu$, то достаточно взять

$$\varkappa_N = \frac{1}{(\ln N)^{r+6}}.$$

Для $S_3(\vartheta, N)$ получается аналогичная оценка; используя ее так же как при доказательстве теоремы 2, мы докажем теорему 3.

§ 11. Пусть при заданном N q — целое число, $1 \leqslant q \leqslant N$, M — возрастающая функция N, для которой $qM \leqslant N/\ln N$, N_1 — целое число, $N_1 \leqslant 2N$. Примем риманову гипотезу $R[L(s, \chi_q)]$ относительно всех рядов $L(s, \chi_q)$ по модулю q и посмотрим, что она дает в отношении вычисления интеграла

$$J_q(N_1) = \sum_{(a,q)=1} \int\limits_{-1/qM}^{1/qM} \left(S\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)\right)^2 e^{2\pi i N_1 (a/q+\alpha)}\, d\alpha. \tag{11.1}$$

Полагая

$$A_\chi(\alpha) = \sum_n \chi(n)\Lambda(n)\, e^{-n/N} e^{-2\pi i \alpha n},$$

где χ — какой-либо характер $(\mathrm{mod}\, q)$ (который может быть и непримитивным), найдем (см. [2]) при $\vartheta = a/q + \alpha$:

$$S(\vartheta) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_\chi \chi(a)\, \bar{\tau}_\chi A_\chi(\alpha) + B \ln q,$$

где

$$\tau_\chi = \sum_{l \bmod q} \chi(l)\, e^{2\pi i l/q}.$$

Отсюда

$$J_q(N_1) = \frac{1}{(\varphi(q))^2} \sum_{(a,q)=1} \sum_{\chi, \chi_1} \chi(a)\chi_1(a)\bar{\tau}_\chi \bar{\tau}_{\chi_1} e^{2\pi i N_1 l/q} \times$$

$$\times \int_{-1/qM}^{1/qM} A_\chi(\alpha) A_{\chi_1}(\alpha) e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha + B \ln^2 q \sqrt{N}. \tag{11.2}$$

Далее, имеем (см. [2]):

$$|\tau_\chi| = \begin{cases} \mu^2\left(\frac{q}{Q}\right)\sqrt{Q}, \text{ если } \left(Q, \frac{q}{Q}\right) = 1, \\ 0 \quad \text{ в других случаях.} \end{cases}$$

Выделяя главный характер χ_0, для которого $\tau_\chi = \mu(q)$, приходим к формуле

$$J_q(N_1) = J_q^{(0)}(N_1) + J_q^{(1)}(N_1) + J_q^{(2)}(N_1) + B \ln^2 q \cdot \sqrt{N},$$

где

$$J_q^{(0)}(N_1) = \frac{\mu^2(q)}{(\varphi(q))^2} \int_{-1/qM}^{1/qM} (A_{\chi_0}(\alpha))^2 e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha,$$

$$J_q^{(1)}(N_1) = 2\frac{\mu(q)}{(\varphi(q))^2} \sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} \sum_\chi{}' \chi(a)\bar{\tau}_\chi \times$$

$$\times \int_{-1/qM}^{1/qM} A_{\chi_0}(\alpha) A_\chi(\alpha) e^{2\pi i N_1 a} d\alpha,$$

$$J_q^{(2)}(N_1) = \frac{1}{(\varphi(q))^2} \sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} \times$$

$$\times \sum_{\chi, \chi_1}{}' \chi(a)\chi_1(a)\bar{\tau}_\chi \bar{\tau}_{\chi_1} \cdot \int_{-1/qM}^{1/qM} A_\chi(\alpha) A_{\chi_1}(\alpha) e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha.$$

Здесь штрихи при суммах означают выпуск главного характера. При этом получаем (см. [2]):

$$J_q^{(1)}(N_1) \leqslant \frac{1}{(\varphi(q))^2} \int_{-1/qM}^{1/qM} d\alpha \sum_{(a,q)=1} \left| \sum_{\chi, \chi_1}{}' \chi(a)\chi_1(a)\bar{\tau}_\chi \bar{\tau}_{\chi_1} \cdot A_\chi(\alpha) A_{\chi_1}(\alpha) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(\varphi(q))^2} \int_{-1/qM}^{1/qM} d\alpha \sum_{(a,q)=1} \left| \sum_\chi{}' \chi(a)\bar{\tau}_\chi A_\chi(d) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q}{\varphi(q)} \sum_\chi{}' \int_{-1/qM}^{1/qM} |A_\chi(\alpha)| \, |A_\chi(\alpha)| \, d\alpha \leqslant \frac{q}{\varphi(q)} \sum_\chi{}' \int_{-1/qM}^{1/qM} |A_\chi(\alpha)|^2 \, d\alpha.$$

Обозначая через $\rho_\chi = 1/2 + it_k$ нули $L(s, \chi)$ (мы приняли гипотезу $R[L(s, \chi_q)]$) и полагая $x = 1/N + 2\pi i\alpha$, получим, как раньше:

$$A_\chi(\alpha) = \frac{E(\chi)}{x} - \sum_{\rho_\chi} \chi^{-\rho_\chi}\Gamma(\rho_\chi) + O(\ln^3 N).$$

Вычисления, совершенно аналогичные проведенным в § 5—7 (см. также [2]), приведут нас к оценкам:

$$|J_q^{(1)}(N_1) + J_q^{(2)}(N_1)| \ll \frac{N}{M} \ln^4 N, \tag{11.3}$$

$$J_q^{(0)}(N_1) = \frac{N_1}{e} \frac{\mu^2(q)}{(\varphi(q))^2} \sum_{(a, q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q}(1 + o(1)). \tag{11.4}$$

§ 12. Мы можем теперь доказать теорему о том, что в условиях гипотезы $R[L(s, \chi_q)]$ уравнение $p + p' = N + qh$ разрешимо при $1 \leqslant q \leqslant N/\ln^6 N$ и $0 \leqslant h \leqslant H$, где $H = \ln^6 N$. Для доказательства заметим, что число решений нашего уравнения равно

$$J_0 = \int_{-1/2}^{1/2} (S(\vartheta, N))^2 T(\vartheta) e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta,$$

где

$$T(\vartheta) = \sum_{h \leqslant H} e^{2\pi i q h\vartheta}.$$

При $|\vartheta - a/q| \geqslant 1/qM$, где $M = (\ln N)^{4,5}$, имеем:

$$|T(\vartheta)| < \frac{1}{((q\vartheta))} < M = \frac{H}{(\ln N)^{1,5}},$$

поэтому

$$J_0 = \sum_{a=0}^{q-1} \int_{-1/qM}^{1/qM} \left(S\left(\frac{a}{q} + \alpha\right)\right)^2 T\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) e^{2\pi i N(a/q_1 + \alpha)} d\alpha =$$

$$= \sum_{q_1|q} \sum_{(a, q_1)=1} \int_{-1/qM}^{1/qM} \left(S\left(\frac{a}{q_1} + \alpha\right)\right)^2 T\left(\frac{a}{q_1} + \alpha\right) e^{2\pi i N(a/q_1 + \alpha)} d\alpha + O\left(\frac{NH}{\ln^{1.5} N}\right).$$

При этом для $q_1 = 1$ допускается значение $a = 0$. Полагая $N_1 = N + qh$, получим:

$$J_0 = \sum_{q_1|q} \sum_{N_1} \frac{N_1}{e} \frac{\mu^2(q_1)}{(\varphi(q_1))^2} \sum_{(a, q_1)=1} e^{2\pi i N_1 a/q_1} + B \sum_{N_1} \frac{N_1 \ln^4 N}{M} + B \frac{NH}{\ln^{1.5} N} =$$

$$= \frac{1}{e} \sum_{N_1} N_1 \sum_{q_1|q} \frac{\mu^2(q_1)}{(\varphi(q_1))^2} \sum_{(a, q_1)=1} e^{2\pi i N a/q_1} + B \frac{NH}{\ln N}.$$

Далее имеем:

$$\sum_{q_1|q} \frac{\mu^2(q)}{(\varphi(q_1))^2} \sum_{(a,\, q_1)=1} e^{2\pi i N a/q_1} = S(N) = \prod_{p|q} (1 + \Psi_N(p)),$$

где $\Psi_N(p) = 1/(p-1)$, если $p \mid N$, и $\Psi_N(p) = -1/(p-1)^2$, если p не делит N. Будем считать, что N четно, если q четно. Тогда наша сумма будет равна

$$\sum_{N_1} \frac{N_1}{e} S(N) + B \frac{NH}{\ln N},$$

где

$$S(N) > c_0 \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right).$$

Ввиду этого наша сумма больше cN_1H и уравнение имеет решения.

Итак, если $Q \leqslant N/\ln^6 N$, то, принимая гипотезу $R\,[L(s, \chi_Q)]$, можно утверждать разрешимость сравнения $p+p'-N \equiv 0 \pmod Q$, если только N четно при четном Q. В частности, если верна расширенная гипотеза Римана, то такие сравнения разрешимы для любого $Q \leqslant N/\ln^6 N$. Это доказывают теоремы 4 и 5.

§ 13. Примем расширенную гипотезу Римана и посмотрим, к чему она приводит.

Если каждое $\alpha \in [0, 1]$ мы изобразим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad q \leqslant \tau, \quad \ln^6 N \leqslant \tau \leqslant \sqrt{N},$$

то получим, согласно предыдущему,

$$J_q(N) = \sum_{(a,\, q)=1} \int_{-1/q\tau}^{1/q\tau} \left(S\left(\frac{a}{q} + \alpha\right)\right)^2 e^{2\pi i N (a/q+\alpha)} d\alpha =$$

$$= \frac{N}{e} \frac{\mu^2(q)}{(\varphi(q))^2} \sum_{(a,\, q)=1} e^{2\pi i N a/q} + B \frac{N \ln^4 N}{\tau}. \qquad (13.1)$$

Этих выражений, однако, недостаточно для подсчета интеграла

$$\int_0^1 (S(\vartheta, N))^2 e^{2\pi i N \vartheta} d\vartheta,$$

так как остаточный член (13.1) $BN \ln^4 N/\tau$ не выдерживает суммирования по $q \leqslant \tau$.

(Заметим, что затруднения, связанные с тем, что интервалы интегрирования могут перекрываться при $q \geqslant \tau/4$, можно обойти и можно ставить вопрос о сложении наших интегралов при $q \leqslant \tau$.)

В противоположность аддитивным задачам «небинарного» типа может оказаться, что основное значение будут иметь слагаемые с большими q, а слагаемые с малыми q не будут существенны. Для примера рассмотрим ту же бинарную проблему Гольдбаха:

$$p+p'=2N.$$

Пусть N — простое число, $X_N(n)$ — какой-либо неглавный характер по модулю N и $\bar{X}_N(n)$ — сопряженный характер. Мы получим:

$$Q(2N)=\sum_{n+n'=2N}\Lambda(n)\Lambda(n')=X_N(-1)\sum_{n+n'=2N}X_N(n)\Lambda(n)\bar{X}_N(n')\Lambda(n').$$

Введем сумму

$$S(\vartheta,\ N,\ X_N)=\sum_{n\geqslant 2}X_N(n)\Lambda(n)\,e^{-2\pi i\vartheta n}e^{-n/N}.$$

Тогда интересующее нас количество будет равно:

$$Q(2N)=e^2X_N(-1)\cdot\int_0^1 S(\vartheta,\ N,\ X_N)\cdot S(\vartheta,\ N,\ \bar{X}_N)\,e^{2\pi i N\vartheta}d\vartheta.$$

Положим $\tau=\sqrt{N}$ и произведем разбиение $\alpha=a/q+\theta/q\tau$, $q\leqslant\tau$. Если мы примем расширенную гипотезу Римана и учтем, что все ряды $L(s,\ \chi_q,\ X_N)$ и $L(s,\ \chi_q,\ \bar{X}_N)$ суть ряды с характерами неглавными, то, согласно предыдущему, найдем:

$$\sum_{(a,\,q)=1}\int_{-1/q\tau}^{1/q\tau}S\left(\frac{a}{q}+\alpha,\ N,\ X_N\right)\cdot S\left(\frac{a}{q}+\alpha,\ N,\ \bar{X}_N\right)e^{2\pi iN\,(a/q+\alpha)}d\alpha=$$

$$=B\frac{N\ln^4 N}{\tau}\tag{13.2}$$

для всех $q\leqslant\tau$ (включая $q=1$). Это показывает, что суммирование по $q\leqslant\tau/\ln^5 N$, приводя к члену порядка $N/\ln N$, не дает существенного вклада и главную роль должны играть большие q, суммирование по которым должно дать величину порядка N.

Литература

1. Линник Ю. В. Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарных задач с простыми числами. — ДАН СССР, 1951, т. 77, № 1, с. 15—18.
2. Линник Ю. В. Простые числа и степени двойки. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1951, т. 38, с. 152—169.
3. Tchudakoff N. G. On the difference between two neighbouring prime numbers. — Мат. сб., 1936, т. 1, вып. 6, с. 799—814.

СКЛАДЫВАНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ СО СТЕПЕНЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ ЧИСЛА

Мат. сб., 1953, т. 32, вып. 1, с. 3—60

§ 1. В работе [1] мною была указана условная асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$N = p + p' + 2^{x_1} + 2^{x_2} + \ldots + 2^{x_k}, \tag{1.1}$$

где p, p' — простые числа, k — константа, а N — большое четное число. Именно, в предположении верности расширенной гипотезы Римана давалось следующее асимптотическое выражение для числа решений $Q_k(N)$ уравнения (1. 1):

$$Q_k(N) = \sum_{(N_1)} \mathfrak{S}(N_1) \frac{N_1}{\ln^2 N_1} + \rho(N), \quad k \geqslant 3,$$

где N_1 распространено по всем четным числам вида $N - 2^{x_1} - - 2^{x_2} - \ldots - 2^{x_k} \geqslant 2$,

$$\mathfrak{S}(N_1) = \prod_{p \mid N_1} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{p \nmid N_1} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > c_0 > 0,$$

$$|\rho(N)| < CN \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{k-2} (1-\eta)^{k-2},$$

причем C, η — абсолютные положительные константы,

$$\sum_{(N_1)} > c_1 N \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{k-2}.$$

В настоящей работе осуществляется обход гипотезы Римана в этом вопросе при помощи доказанных за последнее время «плотностных» теорем. Исследуется уравнение

$$N = p + p' + g^{x_1} + g^{x_2} + \ldots + g^{x_k}, \tag{1.2}$$

где $g \geqslant 2$ — фиксированное целое число, а N — большое число одинаковой четности с числом kg.

Т е о р е м а I. *Для всякого большого числа N одинаковой четности с kg уравнение* (1. 2) *разрешимо. Если, кроме того, N не делится на степень числа g, превосходящую* $(\ln N)^{100}$, *то имеет место следующая асимптотическая формула. Положим*

$$Q_k(N, g) = \sum \ln p \ln p', \tag{1.3}$$

где суммирование распространяется по всем решениям уравнения **(1. 2)**. *Тогда*

$$Q_k(N, g) = \sum_{(N_1)} \mathfrak{S}(N_1) N_1 + \rho(N), \tag{1.4}$$

где N_1 распространяется по всем четным числам вида $N - g^{x_1} - \ldots - g^{x_k} \geqslant 2$,

$$\mathfrak{S}(N_1) = \prod_{p \mid N_1}\left(1 + \frac{1}{p-1}\right)\prod_{p \nmid N_1}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) > c_0 > 0,$$

$$|\rho(N)| < cN\left(\frac{\ln N}{\ln g}\right)^k [(1-\eta)^{k-2} + \eta_1(\eta)], \tag{1.5}$$

причем при данном фиксированном g $C > 0$ — константа, $\eta > 0$ — произвольно малое фиксированное число, $\eta_1(\eta)$ — число сколь угодно малое при достаточно малом η,

$$\sum_{(N_1)} > c_1 N\left(\frac{\ln N}{\ln g}\right)^k. \tag{1.6}$$

Мы видим, что при достаточно большом фиксированном k уравнение (1.2) будет иметь решения и формула (1.4) будет иметь нетривиальный смысл. Именно, нужно сперва выбрать η столь малым, чтобы

$$C\eta_1(\eta) < \frac{c_1}{4}$$

(c_1 — константа из неравенства (1.6)), и затем взять k столь большим, чтобы

$$C(1-\eta)^{k-2} < \frac{c_1}{4}.$$

Тогда остаточный член не будет превосходить половины главного.

Заметим, что если асимптотическая формула (1.4) доказана для чисел $N \not\equiv 0 \pmod{g^l}$ при $g^l > (\ln N)^{100}$, то разрешимость уравнения (1.2) получается уже для всех больших чисел $N \equiv kg \pmod 2$ при больших фиксированных k. В самом деле, если N делится на высокую степень g, то $N-g$ не делится даже на g^2, и для него будет верна формула (1.4).

Имеет место и такая теорема.

Теорема II. *Существует константа K_0, для которой выполняется следующее условие: если записать какое-либо большое четное число N в двоичной системе счисления, то достаточно не более чем в K_0 местах заменить цифру 0 на цифру 1 или цифру 1 на цифру 0, чтобы получить сумму двух простых чисел.*

Заметим, что теорема II не следует из теоремы I, но доказывается аналогичным методом.

В данной статье мы будем заниматься только теоремой I.

Ввиду сказанного выше будем считать, что

$$N \not\equiv 0 \pmod{g^l} \text{ при } g^l > (\ln N)^{100}. \tag{1.7}$$

§ 2. Для сокращения изложения мы будем считать в дальнейшем $g=2$; для любого g рассуждения будут совершенно аналогичны. Буквы $C_0, C_1, \ldots, c_0, c_1, \ldots, K_0, K_1, \ldots, k_0, k_1, \ldots$ будут обозначать положительные константы; η, η_0, η_1, ..., γ, γ_0, γ_1, ... — малые положительные константы; B — число, ограниченное по модулю, не всегда одно и то же.

Введем обозначения:

$$S(\vartheta) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n/N} e^{-2\pi i \vartheta n} \Lambda(n),$$

$$T(\vartheta) = \sum_{m \leqslant \lg_2 N} e^{-2^m/N} e^{-2\pi i \vartheta \cdot 2^m}.$$

Полагая $Q_k(N) = Q_k(N, 2)$ ($Q_k(N, 2)$ получется из (1.3) при $g = 2$), найдем после тривиальных подсчетов:

$$Q_k(N) = e \cdot \int_0^1 S^2(\vartheta) T^k(\vartheta) e^{2\pi i \vartheta N} d\vartheta + R(N), \tag{2.1}$$

где $R(N) = O(N^{5/6})$. Считаем $k \geqslant 3$.

В дальнейшем будем заниматься интегралом

$$J(N) = \int_0^1 S^2(\vartheta) T^k(\vartheta) e^{2\pi i \vartheta N} d\vartheta. \tag{2.2}$$

Введем число $\eta_2 \leqslant 10^{-3}$, которое фиксируем в дальнейшем, и число $\eta_3 \leqslant 0.01\eta_2$. Положим $\tau = N^{\eta_2}$. Каждое число $\vartheta \in [0, 1]$ можно изобразить в виде

$$\vartheta = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \ q \leqslant \tau. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех сегментов вида

$$\left[\frac{a}{q} - \frac{2}{q\tau}, \ \frac{a}{q} + \frac{2}{q\tau}\right], \quad q \leqslant (\ln N)^{1000};$$

при достаточно большом N эти сегменты не пересекаются. Дополнение к $\mathfrak{M}$ в сегменте $[0, 1]$ обозначим через $\mathfrak{m}$; каждое число этого дополнения можно представить в виде (2.3) с $(\ln N)^{1000} < q \leqslant \tau$. Тогда получим:

$$J(N) = J_0(N) + J_1(N), \tag{2.4}$$

где

$$J_0(N) = \int_{\mathfrak{M}} S^2(\vartheta) T^k(\vartheta) e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta, \tag{2.5}$$

$$J_1(N) = \int_{\mathfrak{m}} S^2(\vartheta) T^k(\vartheta) e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta. \tag{2.6}$$

§ 3. Пусть N_1 — целое число, для которого $|N_1| \leqslant K_1 N$, и $\delta \leqslant N^{\eta_3}/N$; δ_1 и $\delta_2 = \delta_1 + \delta$ — такие числа, что $0 \leqslant \delta_1 < \delta_2 < 2/q\tau$. Мы будем рассматривать интеграл

$$I_q(N_1) = \sum_{(a,\,q)=1} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left\{ S\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) \right\}^2 e^{2\pi i N_1 (a/q+\alpha)}\, d\alpha. \tag{3.1}$$

Если через χ будем обозначать характеры по модулю q и положим

$$A_\chi(\alpha) = \sum_{n \geqslant 2} \chi(n)\, \Lambda(n)\, e^{-n/N} e^{-2\pi i \alpha n},$$

$$\tau_\chi = \sum_{l \bmod q} \chi(l)\, e^{2\pi i l/q},$$

то получим (см. [1]):

$$S\left(\frac{a}{q} + \alpha\right) = \sum_{n \geqslant 2} \Lambda(n)\, e^{-n/N} e^{-2\pi i (a/q+\alpha) n} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \chi(a)\, \bar{\tau}_\chi A_\chi(\alpha) + B \ln^2 q$$

и

$$I_q(N_1) = \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,\,q)=1} \sum_{\chi,\, \chi_1} \chi(a)\, \chi_1(a)\, \bar{\tau}_\chi \bar{\tau}_{\chi_1} e^{2\pi i N_1 a/q} \times$$

$$\times \int_{\delta_1}^{\delta_2} A_\chi(\alpha)\, A_{\chi_1}(\alpha)\, e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha + B N^{0.6}. \tag{3.2}$$

Далее, как и в работе [1], имеем:

$$I_q(N_1) = I_q^{(0)}(N_1) + I_q^{(1)}(N_1) + I_q^{(2)}(N_1) + B N^{0.6}, \tag{3.3}$$

где

$$I_q^{(0)}(N_1) = \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,\,q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \{A_{\chi_0}(\alpha)\}^2 e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha,$$

$$I_q^{(1)}(N_1) = 2\,\frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,\,q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} \sum_{\chi}{}' \chi(a)\, \bar{\tau}_\chi \int_{\delta_1}^{\delta_2} A_{\chi_0}(\alpha)\, A_{\chi_1}(\alpha)\, e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha,$$

$$I_q^{(2)}(N_1) = \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,\,q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} \sum_{\chi,\, \chi_1}{}' \chi(a)\, \chi_1(a)\, \bar{\tau}_\chi \bar{\tau}_{\chi_1} \int_{\delta_1}^{\delta_2} A_\chi(\alpha)\, A_{\chi_1}(\alpha)\, e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha,$$

где штрих означает, что пропускается главный характер. Введем также интегралы

$$I_{aq}(N_1) = \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{\chi,\, \chi_1}{}' \chi(a)\, \chi_1(a)\, \bar{\tau}_\chi \bar{\tau}_{\chi_1} e^{2\pi i N_1 a/q} \int_{\delta_1}^{\delta_2} A_\chi(\alpha)\, A_{\chi_1}(\alpha)\, e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha. \tag{3.4}$$

Тогда

$$I_q(N_1) = \sum_{(a,\,q)=1} I_{aq}(N_1) + B N^{0.6}. \tag{3.5}$$

Соответственно разбиению (3.5) разобьем и интегралы $I_q^{(0)}(N_1)$, $I_q^{(1)}(N_1)$, $I_q^{(2)}(N_1)$ на соответствующие интегралы $I_{aq}^{(0)}(N_1)$, $I_{aq}^{(1)}(N_1)$, $I_{aq}^{(2)}(N_1)$, так что

$$I_q^{(j)}(N_1) = \sum_{(a,\,q)=1} I_{aq}^{(j)}(N_1). \tag{3.6}$$

§ 4. Мы дадим теперь оценку сверху для $I_q^{(1)}(N_1)$ и $I_q^{(2)}(N_1)$. Интеграл $I_q^{(2)}(N_1)$ мы оценим двояко.

Первая оценка будет, как и в работе [1]:

$$|I_q^{(2)}(N_1)| \leqslant \frac{1}{\varphi^2(q)} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \sum_{(a,\,q)=1} \left| {\sum_{\chi,\,\chi_1}}' \chi(a)\chi_1(a)\bar{\tau}_\chi \bar{\tau}_{\chi_1} A_\chi(\alpha) A_{\chi_1}(\alpha) \right| d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi^2(q)} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \sum_{(a,\,q)=1} \left| {\sum_{\chi}}' \chi(a)\bar{\tau}_\chi A_\chi(\alpha) \right|^2 d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi(q)} \int_{\delta_1}^{\delta_2} {\sum_{\chi}}' |\bar{\tau}_\chi|^2 |A_\chi(\alpha)|\,|A_{\bar{\chi}}(\alpha)|\, d\alpha \leqslant \frac{q}{\varphi(q)} {\sum_{\chi}}' \int_{\delta_1}^{\delta_2} |A_\chi(\alpha)|\,|A_{\bar{\chi}}(\alpha)|\, d\alpha.$$

Если применим неравенство

$$|A_\chi(\alpha)|\,|A_{\bar{\chi}}(\alpha)| \leqslant \frac{|A_\chi(\alpha)|^2 + |A_{\bar{\chi}}(\alpha)|^2}{2},$$

то найдем окончательно:

$$|I_q^{(2)}(N_1)| \leqslant \frac{q}{\varphi(q)} {\sum_{\chi}}' \int_{\delta_1}^{\delta_2} |A_\chi(\alpha)|^2\, d\alpha. \tag{4.1}$$

Вторую оценку для $I_q^{(2)}(N_1)$ мы получим, производя суммирование по a. В силу того что

$$\left| \sum_{(a,\,q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} \chi\chi_1(a) \right| \leqslant 8\sqrt{q\cdot(q,\,N_1)},$$

выводим:

$$|I_q^{(2)}(N_1)| \leqslant \frac{1}{\varphi^2(q)}\, 8\sqrt{q\cdot(q,\,N_1)} {\sum_{\chi,\,\chi_1}}' |\bar{\tau}_\chi \bar{\tau}_{\chi_1}| \int_{\delta_1}^{\delta_2} |A_\chi(\alpha) A_{\chi_1}(\alpha)|\, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8q^{3/2}\sqrt{(q,\,N_1)}}{\varphi^2(q)} {\sum_{\chi,\,\chi_1}}' \left(\int_{\delta_1}^{\delta_2} |A_\chi(\alpha)|^2\, d\alpha \cdot \int_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi_1}(\alpha)|^2\, d\alpha \right)^{1/2}. \tag{4.2}$$

Обе эти оценки будут нужны в разных случаях.

Для $I_q^{(1)}(N_1)$, суммируя по a, получаем оценку

$$|I_q^{(1)}(N_1)| \leqslant \frac{2q}{\varphi^2(q)} {\sum_{\chi}}' \left(\int_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2\, d\alpha \cdot \int_{\delta_1}^{\delta_2} |A_\chi(\alpha)|^2\, d\alpha \right)^{1/2}. \tag{4.3}$$

Далее, из (3.4) найдем:

$$| I_{aq}^{(2)}(N_1) | \leqslant \frac{q}{\varphi^2(q)} \sum_{\chi, \chi_1}{}' \left(\int_{\delta_1}^{\delta_2} | A_\chi(\alpha) |^2 d\alpha \cdot \int_{\delta_1}^{\delta_2} | A_{\chi_1}(\alpha) |^2 d\alpha \right)^{1/2}. \tag{4.4}$$

§ 5. Мы будем теперь заниматься оценкой интегралов вида

$$I = \int_{\delta_1}^{\delta_2} | A_\chi(\alpha) |^2 d\alpha$$

для неглавных χ при помощи известных в настоящее время теорем о густоте нулей L-рядов. Ввиду того что

$$A_\chi(-\alpha) = \overline{A_{\bar{\chi}}(\alpha)},$$

мы сможем потом от отрицательных δ_1 и $\delta_2 = \delta_1 + \delta$ перейти к положительным.

Полагая $x = 1/N + 2\pi i\alpha$, найдем (см. [2])

$$A_\chi(\alpha) = -\sum_\rho x^{-\rho}\Gamma(\rho) + O(\ln^3 N), \tag{5.1}$$

где ρ — нули $L(s, \chi)$ в критической полосе. Разобьем эту полосу на $[\ln^2 N]$ вертикальных полос ширины $1/[\ln^2 N]$.

Обозначим через $\mathfrak{S}_\beta$ полосу между абсциссами $\beta - 1/[\ln^2 N]$ и β и положим

$$A_{\chi, \beta}(\alpha) = -\sum_{\rho \in \mathfrak{S}_\beta} x^{-\rho}\Gamma(\rho), \tag{5.2}$$

так что сумма $A_\chi(\alpha)$, не считая остатка $O(\ln^3 N)$, будет составляться из $[\ln^2 N]$ сумм $A_{\chi, \beta}(\alpha)$, среди которых могут быть и пустые. Положим $\nu = \beta - 1/2$. Мы получим:

$$| I | \leqslant \ln^4 N \sum_\nu \int_{\delta_1}^{\delta_2} | A_{\chi, \beta}(\alpha) |^2 d\alpha + B\delta \ln^6 N. \tag{5.3}$$

Мы будем теперь оценивать интегралы

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} | A_{\chi, \beta}(\alpha) |^2 d\alpha \tag{5.4}$$

порознь при разных β.

Обращаясь к (5.2), находим при $x = 1/N + 2\pi i\alpha$ и $\rho = \beta_k + it_k$:

$$x^{-\rho}\Gamma(\rho) = | x |^{-\rho} \Gamma(\rho) e^{(\pi/2)t_k} e^{-t_k \operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha)} e^{-i\beta_k(\pi/2 - \operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha))}. \tag{5.5}$$

Принимая во внимание асимптотику $\Gamma(\rho) = B(|t_k| + 1)^{\beta_k - 1/2} e^{-(\pi/2)|t_k|}$, имеем:

$$|x^{-\rho}\Gamma(\rho)| \leqslant K_2 \left(\sqrt{\frac{1}{N^2} + 4\pi^2\alpha^2}\right)^{-1/2-\nu} (|t_k| + 1)^{\nu} e^{-(\pi/2)(|t_k| - t_k)} \times$$
$$\times e^{-t_k \operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha)}, \tag{5.6}$$

где через ν обозначено $\beta - 1/2$ (β — крайняя абсцисса $\mathfrak{S}_\beta$). Будем сначала считать $0 < \alpha \leqslant 4/N$; при этих условиях получим для $A_{\chi,\beta}(\alpha)$ оценку

$$|A_{\chi,\beta}(\alpha)| \leqslant K_2 N^{1/2+\nu} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_\nu} e^{-(\pi/2)(|t_k| - t_k) - a_0 t_k} (|t_k| + 1)^{\nu}, \tag{5.7}$$

где $a_0 = \operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha)$, так что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{8\pi} \leqslant a_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{5.8}$$

Мы можем теперь применить известную оценку (см. [3]): число нулей $L(s, \chi)$ в отрезке критической полосы между ординатами T и $T+1$ не превосходит

$$B \ln q(|T| + 1). \tag{5.9}$$

Ввиду этого суммирование по $\rho \in \mathfrak{S}_\nu$ дает, если принять во внимание неравенство (5.8):

$$|A_{\chi,\beta}(\alpha)| = BN^{1/2+\nu} \ln N. \tag{5.10}$$

Тогда получим:

$$\int_0^{4/N} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2 \, d\alpha = BN^{2\nu} \ln^2 N, \tag{5.11}$$

и если $0 \leqslant \delta_1 \leqslant 4/N$, то

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2 \, d\alpha = BN^{2\nu} \ln^2 N. \tag{5.12}$$

Заметим, что $-1/2 \leqslant \nu \leqslant 1/2$.

§ 6. Будем теперь считать, что $\delta_1 > 4/N$, и разобьем сегмент $[\delta_1, \delta_2]$ на $B \ln N$ сегментов вида $[\delta_2/2^k, \delta_2/2^{k-1}]$; крайний левый сегмент должен иметь своим левым концом δ_1, если $\delta_1 \neq \delta_2/2^k$. Пусть $\alpha \in [\delta_2/2^r, \delta_2/2^{r-1}]$. В силу соотношения (5.6) оценка (5.2) примет вид:

$$|A_{\chi,\beta}(\alpha)| \leqslant$$
$$\leqslant K_2 \alpha^{-1/2-\nu} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_\nu} (|t_k| + 1)^{\nu} e^{-\frac{\pi}{2}(|t_k| - t_k) - t_k \operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha)}. \tag{6.1}$$

Разобьем $A_{\chi,\beta}(\alpha)$ на две суммы:

$$A_{\chi,\beta}(\alpha)=A^{(+)}_{\chi,\beta}(\alpha)+A^{(-)}_{\chi,\beta}(\alpha), \tag{6.2}$$

где первая сумма распространена по таким $\rho=\beta_k+it_k\in\mathfrak{S}_\nu$, что $t_k\geqslant 0$, а вторая — по таким ρ, что $t_k<0$. Сначала оценим $A^{(-)}_{\chi,\beta}(\alpha)$, применяя (5.9). Получим:

$$\left|A^{(-)}_{\chi,\beta}(\alpha)\right|\leqslant K_2\left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-1/2-\nu}\sum_{\substack{\rho\in\mathfrak{S}_\nu\\ t_k<0}}(|t_k|+1)^\nu e^{-(\pi/2)|t_k|}.$$

Применяя тривиальную оценку (5.9), найдем:

$$\left|A^{(-)}_{\chi,\beta}(\alpha)\right|\leqslant K_2\left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-1/2-\nu}\ln N. \tag{6.3}$$

Для $A^{(+)}_{\chi,\beta}(\alpha)$ нельзя применять тривиальных оценок. Из (6.1) получаем:

$$\left|A^{(+)}_{\chi,\beta}(\alpha)\right|\leqslant K_2\left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-1/2-\nu}\sum_{\substack{\rho\in\mathfrak{S}_\nu\\ t_k\geqslant 0}}(t_k+1)^\nu e^{-t_k 2^r/8\pi N\delta_2}, \tag{6.4}$$

ибо при наших значениях α

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2\pi N\alpha}>\frac{2^r}{8\pi N\delta_2}.$$

Введем функцию $Q(T,\nu_1,\chi)$, равную количеству нулей ряда $L(s,\chi)$ в области $|t|\leqslant T$, $\sigma\geqslant 1/2+\nu_1$. Полагая $\mu=1/[\ln^2 N]$, получим следующую оценку:

$$\left|A^{(+)}_{\chi,\beta}(\alpha)\right|\leqslant K_3\left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-1/2-\nu}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{N\delta_2}{2^r}2^m\right)^\nu\times$$

$$\times Q\left(\frac{N\delta_2}{2^r}\cdot 2^m,\ \nu-\mu,\ \chi\right)e^{-2^m/8\pi}. \tag{6.5}$$

Для дальнейшего пользуемся оценкой (см. [4])

$$Q(T,\nu_1,\chi)<K_4 q^{2\nu_1}T^{1-\nu_1/(1-\nu_1)}\ln^{10}T+K_5 q^{30}. \tag{6.6}$$

Ввиду сравнительной малости μ можно написать

$$Q\left(\frac{N\delta_2}{2^r}\cdot 2^m,\ \nu-\mu,\ \chi\right)=Bq^{2\nu}\cdot\left(\frac{N\delta_2}{2^r}\cdot 2^m\right)^{1-\nu/(1-\nu)}\ln^{10}N+Bq^{30}. \tag{6.7}$$

Подставляя это выражение в (6.5), находим:

$$\left|A^{(+)}_{\chi,\beta}(\alpha)\right|=Bq^{2\nu}\left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-1/2-\nu}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{N\delta_2}{2^r}\cdot 2^m\right)^{1-\nu^2/(1-\nu)}\ln^{10}N+\right.$$

$$+\left(\frac{N\delta_2}{2^r}\cdot 2^m\right)^\nu q^{30}\Big]e^{-2^m/8\pi}=$$

$$=Bq^{2\nu}\left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-1/2-\nu}\left[\left(\frac{N\delta_2}{2^r}\right)^{1-\nu^2/(1-\nu)}\ln^{10}N+\left(\frac{N\delta_2}{2^r}\right)^\nu q^{30}\right]=$$

$$=Bq^{2\nu}\left[N^{1-\nu^2/(1-\nu)}\left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{1/2-\nu^2/(1-\nu)}\ln^{10}N+N^\nu\left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-1/2}q^{30}\right]. \qquad (6.8)$$

Если $\alpha\in[\delta_1, \delta_2]$, то, очевидно, правая часть оценки для $A^{(+)}_{\chi,\beta}(\alpha)$ не может превосходить суммы правых частей (6.8) для всех допустимых r, т. е.

$$Bq^{2\nu}[N^{1-\nu^2/(1-\nu)}(\delta_2^{1/2-\nu/(1-\nu)}+\delta_1^{1/2-\nu/(1-\nu)})\ln^{10}N+N^\nu\delta_1^{-1/2}q^{30}]. \qquad (6.9)$$

Отсюда и из (6.3) получим:

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}|A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha=B\delta q^{4\nu}[N^{2-2\nu^2/(1-\nu)}(\delta_2^{1-2\nu/(1-\nu)}+\delta_1^{1-2\nu/(1-\nu)})\ln^{20}N+$$
$$+N^{2\nu}\delta_1^{-1}q^{60}]. \qquad (6.10)$$

Эта оценка будет играть основную роль для дальнейшего, однако при $\nu>0.4$ нам понадобится другая, более сложная оценка для того же интеграла.

§ 7. Обращаясь к соотношению (5.5), рассмотрим операцию почленного интегрирования по α квадрата модуля суммы

$$A^{(+)}_{\chi,\beta}(\alpha)=-\sum_{\substack{\rho\in\mathfrak{S}_\nu\\ t_k\geqslant 0}}x^{-\rho}\Gamma(\rho) \qquad (7.1)$$

по интервалу $[\delta_2/2^r, \delta_2/2^{r-1}]$.

Используя (5.5), для $\rho_{k_1}=\beta_{k_1}+it_{k_1}$, $\rho_{k_2}=\beta_{k_2}+it_{k_2}$ найдем

$$\int\limits_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}}x^{-\rho_{k_1}}\overline{x^{-\rho_{k_2}}}\Gamma(\rho_{k_1})\overline{\Gamma(\rho_{k_2})}\,d\alpha=$$

$$=\Gamma(\rho_{k_1})\Gamma(\overline{\rho_{k_2}})e^{-(\pi/2)(t_{k_1}+t_{k_2})}e^{-i(\pi/2)(\beta_{k_1}-\beta_{k_2})}\int\limits_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}}\varphi_1(\alpha)\varphi_2(\alpha)\,d\alpha,$$

где

$$\varphi_1(\alpha)=e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha)}e^{i(\beta_{k_1}-\beta_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha)},$$

$$\varphi_2(\alpha)=|x|^{-\rho_{k_1}-\bar\rho_{k_2}},$$

или, полагая

$$\int\limits_{\delta_2/2^r}^{\alpha}\varphi_2(\alpha)\,d\alpha=\Phi(\alpha),$$

получим

$$\int_{\delta_2/2^r}^{\delta_2 2^{r-1}} \varphi_1(\alpha)\varphi_2(\alpha)\,d\alpha = \int_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}} \varphi_1(\alpha)\,d\Phi(\alpha) =$$

$$= \varphi_1(\alpha)\,\Phi(\alpha)\Big|_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}} - \int_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}} \Phi(\alpha)\,\varphi_1'(\alpha)\,d\alpha.$$

Положим $\Phi = \sup|\Phi(\alpha)|$ в указанных пределах. Тогда, так как $t_{k_1}, t_{k_2} \geqslant 0$, наш интеграл не будет превосходить

$$\Phi\left[2e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(2^{r-1}/2\pi N\delta_2)} + \right.$$

$$\left. + \int_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha)} \frac{t_{k_1}+t_{k_2}+1}{1+1/(2\pi N\alpha)^2}\frac{d\alpha}{2\pi N\alpha^2}\right].$$

Если $t_{k_1}+t_{k_2} \leqslant 1$, то последнее выражение не превосходит

$$\Phi\left(2+\frac{2\cdot 2^r}{2\pi N\delta_2}\right) \leqslant K_6\Phi. \qquad (7.2)$$

Если же $t_{k_1}+t_{k_2} > 1$, то, ввиду того что

$$\int_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha)} \frac{t_{k_1}+t_{k_2}+1}{1+1/(2\pi N\alpha)^2}\frac{d\alpha}{2\pi N\alpha^2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}} e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha)} \frac{t_{k_1}+t_{k_2}}{1+1/(2\pi N\alpha)^2}\frac{d\alpha}{2\pi N\alpha^2} =$$

$$= 2e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(1/2\pi N\alpha)}\Big|_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}} \leqslant 2e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(2^{r-1}/2\pi N\delta_2)},$$

наш интеграл не будет превосходить

$$4\Phi e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(2^{r-1}/8\pi N\delta_2)}.$$

Далее имеем:

$$\Phi(\alpha) = \int_{\delta_2/2^r}^{\alpha} |x|^{-\rho_{k_1}-\overline{\rho_{k_2}}}\,d\alpha = \int_{\delta_2/2^r}^{\alpha}\left(\sqrt{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\alpha^2}\right)^{-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}-i(t_{k_1}-t_{k_2})} d\alpha.$$

Положим

$$u = \sqrt{\frac{1}{N^2}+4\pi^2\alpha^2}, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi}\sqrt{u^2-\frac{1}{N^2}};$$

тогда интересующий нас интеграл будет равен

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha=\delta_2/2^r}^{\alpha} u^{-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}-i(t_{k_1}-t_{k_2})}\frac{du}{\sqrt{1-1/N^2u^2}}.$$

Здесь $u=\sqrt{1/N^2+4\pi^2\alpha^2}>4/N$, ибо $\delta_2/2^r\geqslant\delta_1\geqslant 4/N$. Поэтому, по второй теореме о среднем значении,

$$\Phi=\sup_{\delta_2/2^r\leqslant\alpha\leqslant\delta_2/2^{r-1}}|\Phi(\alpha)|\leqslant 2\sup_{\delta_2/2^r\leqslant\alpha\leqslant\delta_2/2^{r-1}}\left|\int\limits_{\alpha=\delta_2/2^r}^{\alpha} u^{-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}-\nu(t_{k_1}-t_{k_2})}\,du\right|.$$

При α, меняющемся в пределах от $\delta_2/2^r$ до $\delta_2/2^{r-1}$, u не выходит из пределов $\delta_2/2^{r+1}$, $\delta_2/2^{r-2}$. Поэтому искомый интеграл не превосходит

$$\min\left\{\frac{2\,(\delta_2/2^{r+1})^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|},\ \left(\frac{\delta_2}{2^{r+1}}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\right\}$$

(мы считаем, что β_{k_1}, $\beta_{k_2}\geqslant 0.9$). Учитывая, далее, асимптотику для $\Gamma(\rho_{k_1})$ и $\Gamma(\rho_{k_2})$, получим, принимая во внимание (7.2):

$$\int\limits_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}}|A^{(+)}_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha=B\sum_{\substack{\rho_{k_1},\rho_{k_2}\in\mathfrak{S}_\nu\\ t_{k_1},t_{k_2}\geqslant 0}}(t_{k_1}+1)^{\beta_{k_1}-1/2}(t_{k_2}+1)^{\beta_{k_2}-1/2}\times$$
$$\times\left(\frac{\delta_2}{2^{r+1}}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\min\left\{\frac{1}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|},\ 1\right\}\times$$
$$\times e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})\operatorname{arctg}(2^{r-1}/2\pi N\delta_2)}. \qquad (7.3)$$

Совершенно аналогично получаем для суммы $A^{(-)}_{\chi,\beta}(\alpha)$:

$$\int\limits_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}}|A^{(-)}_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha=B\sum_{\substack{\rho_{k_1},\rho_{k_2}\in\mathfrak{S}_\nu\\ t_{k_1},t_{k_2}<0}}(|t_{k_1}|+1)^{\beta_{k_1}-1/2}(|t_{k_2}|+1)^{\beta_{k_2}-1/2}\times$$
$$\times\left(\frac{\delta_2}{2^{r+1}}\right)^{1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}}\min\left\{\frac{1}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|},\ 1\right\}\times$$
$$\times e^{-(\pi-\operatorname{arctg}(2^{r-1}/2\pi N\delta_2))(|t_{k_1}|+|t_{k_2}|)}. \qquad (7.4)$$

§ 8. Положим $N_0=2\pi N\delta_2/2^r$ (r фиксированно). Получим, учитывая, что β_{k_1}, $\beta_{k_2}\leqslant 1/2+\nu$:

$$\int\limits_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}}|A^{(+)}_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha=B\sum_{\substack{\rho_{k_1},\rho_{k_2}\in\mathfrak{S}_\nu\\ t_{k_2}\geqslant t_{k_1}\geqslant 0}}(t_{k_1}+1)^{\nu}(t_{k_2}+1)^{\nu}\times$$
$$\times\left(\frac{\delta_2}{2^{r+1}}\right)^{-2\nu}\min\left\{\frac{1}{|1-\beta_{k_1}-\beta_{k_2}|+|t_{k_1}-t_{k_2}|},\ 1\right\}e^{-(t_{k_1}+t_{k_2})(1/2N_0)}. \qquad (8.1)$$

Пусть $N_1 = 2N_0$, $N_2 = 2N_1, \ldots N_s = 2N_{s-1}, \ldots$. Рассмотрим $\rho_{k_1} = \beta_{k_1} + it_{k_1}$ с условием $N_s \leqslant t_{k_1} < N_{s+1}$ и произведем суммирование по β_{k_2}, где $t_{k_2} \geqslant t_{k_1}$.

Сначала возьмем t_{k_2} с тем же условием: $N_s \leqslant t_{k_2} < N_{s+1}$. Для количества таких t_{k_2} возьмем тривиальную оценку (5. 9), которая дает для соответствующей части (8. 1) оценку

$$BN_s^{\nu} N_s^{\nu} \left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-2\nu} \cdot \ln^2 N \cdot e^{-2^s}. \tag{8. 2}$$

Пусть теперь $N_v \leqslant t_{k_2} < N_{v+1}$, где $v > s$. Тогда суммирование по таким t_{k_2} при фиксированном t_{k_1} дает:

$$BN_s^{\nu} N_v^{\nu} \left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-2\nu} \frac{1}{N_v} e^{-N_v/2N_0} \ln N \cdot N_v = BN_0^{2\nu} 2^{2v} e^{-2^{v-1}} \ln N \cdot \left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-2\nu}.$$

Суммируя по $v \geqslant s$, получим:

$$BN_0^{2\nu} \cdot e^{-2^{s-2}} \cdot \ln N \cdot \left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-2\nu}. \tag{8. 3}$$

Объединяя (8. 2) и (8. 3), выводим оценку

$$BN_0^{2\nu} \cdot e^{-2^{s-2}} \cdot \ln^2 N \cdot \left(\frac{\delta_2}{2^r}\right)^{-2\nu}. \tag{8. 4}$$

Эта оценка относится к одному ρ_{k_1} при условии $N_s \leqslant t_{k_1} < N_{s+1}$. Таких ρ_{k_1} должно быть не более

$$Q(2N_s,\ \nu - \mu,\ \chi) = Q\left(\frac{2\pi N\delta_2}{2^r} \cdot 2^{s+1},\ \nu - \mu,\ \chi\right).$$

Замечая далее, что $N_0 = 2\pi N\delta_2/2^r$ и что выражение (8. 4) можно переписать как

$$BN^{2\nu} \ln^2 N \cdot e^{-2^{s-2}},$$

получаем окончательную оценку левой части (7. 3):

$$\int\limits_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}} |A_{\chi,\beta}^{(+)}(\alpha)|^2\, d\alpha =$$

$$= BN^{2\nu} \cdot \ln^2 N \cdot \sum_{s=0}^{\infty} Q\left(\frac{2\pi N\delta_2}{2^r} \cdot 2^{s+1},\ \nu - \mu,\ \chi\right) e^{-2^{s-2}}. \tag{8. 5}$$

Совершенно аналогичная оценка получается для

$$\int\limits_{\delta_2/2^r}^{\delta_2/2^{r-1}} |A_{\chi,\beta}^{(-)}(\alpha)|^2\, d\alpha. \tag{8. 6}$$

Если в сегменте $[\delta_1, \delta_2]$ укладывается несколько сегментов $[\delta_2/2^r, \delta_2/2^{r-1}]$, надо произвести суммирование по соответствующим r в оценках (8. 5) и (8. 6).

§ 9. Мы имели $\delta \leqslant N^{\eta_3}/N$, $\tau = N^{\eta_2}$, $\delta_2 - \delta_1 = \delta$. Положим $\eta_4 = 500\eta_2$. Нашей задачей будет доказательство следующей леммы.

Лемма I. *При* $\nu \leqslant 0.01$ *имеем оценку*

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi, \beta}(\alpha)|^2 \, d\alpha = B \frac{N}{q\tau^{0.89}}. \tag{9.1}$$

При $0.01 \leqslant \nu \leqslant 1/2 - 10^{-4}$ *имеем оценку*

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi, \beta}(\alpha)|^2 \, d\alpha = B \frac{N}{(q\tau)^6}. \tag{9.2}$$

Наконец, при $1/2 - 10^{-4} \leqslant \nu \leqslant 1$ *и при условии* $\delta_1 \geqslant N^{\eta_4}/N$ *имеем оценку*

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi, \beta}(\alpha)|^2 \, d\alpha = B \frac{N}{(q\tau)^6}. \tag{9.3}$$

Доказательство. Начнем с вывода оценки (9. 1). Пусть сначала $0 \leqslant \delta_1 < 4/N$, тогда (5. 12) дает

$$\int_{\delta_1}^{4/N} |A_{\chi, \beta}(\alpha)|^2 \, d\alpha = BN^{2\nu} \ln^2 N = BN^{0.03} \quad \text{при} \quad \nu \leqslant 0.01,$$

что значительно меньше (9. 1). При $0.01 < \nu \leqslant 1/2 - 10^{-4}$ получается оценка

$$BN^{1-1/5000} \cdot \ln^2 N, \tag{9.4}$$

что также меньше (9. 2). В силу этого можно считать $\delta_1 \geqslant 4/N$.

Мы можем тогда использовать оценку (6. 10). Мы заметим, что экспонента $1-2\nu/(1-\nu)$, стоящая там при δ_2 и δ_1, будет неотрицательна при $\nu \leqslant 1/3$ и отрицательна при $\nu > 1/3$. Поэтому при $\nu \leqslant 1/3$ в выражении $\delta_2^{1-2\nu/(1-\nu)} + \delta_1^{1-2\nu/(1-\nu)}$ надлежит брать наибольшее возможное значение $\delta_2 = 2/q\tau$. Тогда (6. 10) дает при замене большее возможное значение $\delta_2 = 2/q\tau$. Тогда (6. 10) дает при замене δ на N^{η_3}/N оценку

$$BN^{\eta_3} \cdot N^{1-2\nu^2/(1-\nu)} \cdot \ln^{20} N \cdot q^{2\nu/(1-\nu)-1+4\nu} \tau^{2\nu/(1-\nu)-1} + BN^{2\nu+\eta_3} q^{60}. \tag{9.5}$$

При $\nu < 0.01$ заменим (9. 5) менее выгодной оценкой:

$$BN^{\eta_3} \frac{N}{q\tau} q^{0.03+0.04} \tau^{0.03} + BN^{0.02+\eta_3} \tau^{60}.$$

Так как $\tau = N^{\eta_2}$, $\eta_2 < 10^{-6}$, $\eta_3 = 0.01\eta_2$, то (9.5) не превосходит

$$B\frac{N}{q\tau}\tau^{0.01}\tau^{0.1} + BN^{0.04} = B\frac{N}{q\tau^{0.89}}, \tag{9.6}$$

что и доказывает оценку (9.1).

§ 10. Теперь приступаем к доказательству оценки (9.2). Сначала пусть $0.01 < \nu \leqslant 1/3$. Мы вправе использовать (9.5), что дает

$$BN^{\eta_3}N^{1-0.0002}\cdot\ln^{20}N\cdot q^{4/3} + BN^{2/3+\eta_3}q^{60}. \tag{10.1}$$

Ввиду того что

$$q \leqslant N^{\eta_2},\quad qN^{\eta_3} < N^{2\cdot 10^{-6}},$$

(10.1) можно заменить худшей оценкой

$$B\frac{N}{(q\tau)^6}. \tag{10.2}$$

Пусть теперь $1/3 < \nu < 1/2 - 10^{-4}$. В этом случае ввиду отрицательности экспоненты $1 - 2\nu/(1-\nu)$ надлежит заменить δ_2 и δ_1 наименьшим возможным значением $4/N$. Тогда получим оценку:

$$Bq^{4\nu}\left(N^{1-2\nu^2/(1-\nu)}N^{2\nu/(1-\nu)-1}N^{\eta_3}\ln^{20}N + N^{2\nu+\eta_3}q^{60}\right) = Bq^{4\nu}N^{\eta_3}\ln^{20}N\cdot N^{2\nu} +$$
$$+ BN^{2\nu+\eta_3}q^{62} = BN^{1-2\cdot 10^{-4}+\eta_3+2\eta_2}\ln^{20}N + BN^{1-2\cdot 10^{-4}+\eta_3+60\eta_2} =$$
$$= BN^{1-10^{-4}} = \frac{BN}{(q\tau)^6}.$$

Далее доказываем оценку (9.3). Здесь уже предполагаем $\delta_1 \geqslant N^{\eta_4}/N$ $(\eta_4 = 500\eta_2)$. Тогда (6.10) дает

$$BN^{\eta_3}q^2N^{1-2\nu^2/(1-\nu)}N^{2\nu/(1-\nu)-1}N^{\eta_4(1-2\nu/(1-\nu))}\ln^{20}N + BN^{2\nu}N^{\eta_3}N^{-\eta_4}q^{60} =$$
$$= BN\cdot N^{\eta_3+2\eta_2-\eta_4/3}\ln^{20}N + BN^{\eta_3+60\eta_2-\eta_4} = BN^{1-(1/6)\eta_4} = BN^{1-83\eta_2} = B\frac{N}{(q\tau)^6},$$

что и доказывает (9.3).

§ 11. Мы видим, что особую опасность представляют случаи, когда δ_2 (и, значит, δ_1) не превосходит N^{η_4}/N.

В дополнение к лемме I мы докажем, однако, следующую лемму.

Лемма II. *Пусть* $\delta_2 \leqslant N^{4\eta_4}/N$, а $\nu < 0.01$. *Тогда имеем*:

$$\int_0^{\delta_2} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha = B\frac{N}{(q\tau)^6}. \tag{11.1}$$

Доказательство. Как и в § 9, имеем:

$$\int_0^{4/N} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha = BN^{0.03} = B\frac{N}{(q\tau)^6}, \tag{11.2}$$

так что достаточно оценить лишь $\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2 d\alpha$ при $\delta_1 = 4/N$, если $\delta_2 > 4/N$. Оценка (6.10) дает величину, не превосходящую

$$BN^{4\eta_4}q^{0.04}\left[N\left(\frac{N^{4\eta_4}}{N}\right)^{1-0.03}\ln^{20}N + N^{2\nu+4\eta_4}q^{60}\right] =$$
$$= BN^{0.03+8\eta_4+0.04\eta_2} + BN^{0.02+4\eta_4+60\eta_2} = BN^{1/2} = B\,\frac{N}{(q\tau)^6}.$$

Это и доказывает нашу лемму.

Для изучения поведения $\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2 d\alpha$ при $\nu > 1/2 - 10^{-4}$ и $\delta_1 \leqslant N^{\eta_3}/N$ нам понадобятся оценка (8.5) и новая плотностная лемма К. А. Родосского [5]. Мы дадим здесь краткое доказательство этой леммы в несколько ухудшенном виде, достаточном для наших целей.

§ **12.** Обозначим через $Q(\beta, T_1, T_2, q)$ число нулей всех L-рядов по модулю q в прямоугольнике $\beta \leqslant \sigma \leqslant 1$, $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$ и через $Q_1(\beta, T_1, T_2, q)$ — число этих же нулей, за исключением нулей $L(s, \chi_0)$.

Лемма К. А. Родосского [5]. *При* $0.9 < \beta \leqslant 1$, $T \geqslant q^3$, $q > K_6$ *имеем*:

$$Q(\beta, -T, T, q) = B\,(q^2T)^{(9/2\beta)(1-\beta)}\ln^{16}qT. \tag{12.1}$$

Ввиду особой важности леммы К. А. Родосского приведем краткое ее доказательство, следуя изложению заметки [5]. Для этого оценим отдельно числа нулей $L(s, \chi)$ с неглавными χ вида $Q(\beta, T_1, 2T_1, q)$ при $T_1 \geqslant \exp((11/10)\ln\ln q + (4/3)(1-\beta)q) = T_1'$ и $Q(\beta, 0, T_1', q)$.

Последняя оценка следует из другой теоремы К. А. Родосского [6], которая гласит, что

$$Q\left(\beta,\ T-\frac{1}{2},\ T+\frac{1}{2},\ q\right) < 445000\,(q^2T')^{(3/\beta)(1-\beta)}\ln^8 qT',$$

где $T' = |T| + \sqrt{5}/2$. В самом деле, разделяя сегмент $[-T_1', T_1']$ на участки длины 1, получим:

$$Q(\beta, 0, T_1', q) = B\,(q^2T_1')^{(3/\beta)(1-\beta)}\ln^8 q^2T_1'\,(\ln q)^{11/10}\,(q^2T_1')^{(4/3)(1-\beta)} =$$
$$= B\,(q^2T_1)^{(4/3+3/\beta)(1-\beta)}\ln^{10}qT_1 = B\,(q^2T_1)^{(9/2\beta)(1-\beta)}\ln^{10}qT_1,$$

ибо $3/\beta + 4/3 < 9/2\beta$ при $0.9 \leqslant \beta \leqslant 1$.

Теперь переходим к оценке $Q_1(\beta_1, T_1, 2T_1, q)$ при $T_1 \geqslant T_1'$. Будем исходить из тождества, верного для всякого ρ и $z \geqslant 1$:

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant z}\frac{\chi(m)\mu(m)}{m^\rho}\sum_{1\leqslant n\leqslant z/m}\frac{\chi(n)}{n^\rho} = 1.$$

Далее, используя формулу Хейльбронна [7]

$$L(s, \chi)=\sum_{1\leqslant n\leqslant \alpha q}\chi(n)\,n^{-s}+O(\alpha^{1-\sigma}t^{-1}), \tag{12. 2}$$

верную для неглавного характера (mod q) при $3/4\leqslant\sigma\leqslant 2$, $3\leqslant t\leqslant\alpha$, и приближенное функциональное уравнение для $L(s, \chi)$ (см. [4] и [8]), получим

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant y} m^{-\beta_1}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant z/m}\chi(n)\,n^{-\rho}\right|<K_7\,(q^{1/2}T_1^{1/2}yz^{-\beta_1}+qyz^{-\beta_1}+$$
$$+T_1^{-1/2}z^{1-\beta_1}\ln z+qT^{1/2}y^2z^{-1-\beta_1}+q^{\beta_1-1}T_1^{-1}z^{1-\beta_1}\ln z)=A,$$

где $\rho=\beta_1+i\tau_1$ — нуль $L(s, \chi)$ в прямоугольнике $\beta<\beta_1<1$, $T_1\leqslant\tau_1\leqslant 2T_1$. Выбирая $y=qT_1$, $z=K_8(qT_1)^{3/2\beta}$ в случае $T_1\geqslant q^2$ и $z=K_9q^{2/\beta}T^{3/2\beta}$ в случае $T_1<q^2$, получим

$$0<A<\frac{1}{2}.$$

Отсюда, очевидно, имеем:

$$\left|\sum_{y<m\leqslant z}\chi(m)\,\mu(m)\,m^{-\rho}\sum_{1\leqslant n\leqslant z/m}\chi(n)\,n^{-\rho}\right|=\left|\sum_{y<n\leqslant z}\chi(n)\,a_n n^{-\rho}\right|\geqslant\frac{1}{2}, \tag{12. 3}$$

где

$$a_n=\sum_{d|n,\ d>y}\mu(d).$$

Заметим, что неравенство (12. 3) можно получить и без помощи приближенного функционального уравнения и формулы (12. 2), но с некоторым ухудшением окончательного результата.

Каждому $\rho=\beta_1+i\tau_1$ поставим в соответствие число $\nu=[\tau_1]$ ($[\tau_1]$ — целая часть τ_1). Тогда можно утверждать, что найдется такое число $\xi_p\in[y, z]$, что

$$\left|\sum_{y<n\leqslant\xi_\rho}\chi(n)\,a_n n^{-i\nu}\right|>c_1\frac{\xi_\rho^\beta}{\ln z} \tag{12. 4}$$

при подходящей положительной константе c_1.

В самом деле, полагая

$$S(m)=\sum_{y<n\leqslant m}\chi(n)\,a_n n^{-i\nu},$$

получим при $\gamma_1=\{\tau_1\}$ ($\{\tau_1\}$ — дробная часть τ_1)

$$\sum_{y<n\leqslant z}\chi(n)\,a_n n^{-\rho}=\sum_{y<m\leqslant z}\frac{S(m)-S(m-1)}{m^{\beta_1+i\gamma_1}}$$

и, производя преобразование Абеля, найдем, что если для всех $\xi_\rho\in[y, z]$ мы имели бы

$$|S(\xi_\rho)|<c_1\frac{\xi_\rho^\beta}{\ln z},$$

то сумма (12. 4) при достаточно малом c_1 оказалась бы меньше $1/2$, что невозможно.

Покажем теперь, что найдется $\xi\in[y, z]$, такое, что для $Q_2 > c_2Q_1(\beta_1, T_1, 2T_1, q)\xi^{\beta-1}/\ln z$ различных пар $\{\chi, \nu\}$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{y<n\leqslant\xi}\chi(n)\,a_n n^{-i\nu}\right| > c_1\frac{\xi^\beta}{\ln z}.$$

В самом деле, разобьем участок $[y, z]$ на участки вида $[z/2^k, z/2^{k-1}]$ (последний может быть короче). Одно и то же ν может отвечать нескольким $\rho=\beta_1+i\tau_1$, но не более чем $B\ln qT$, согласно (5. 9). Поэтому различных пар (χ, ν) будет не менее

$$c_3Q(\beta, T_1, 2T_1, q)\frac{1}{\ln z}.$$

Им отвечают числа ξ_ρ, из которых по крайней мере $c_4Q_1(\beta_1, T_1, 2T_1, q)\,1/\ln^2 z$ попадет в один и тот же участок, который мы обозначим через $[Z_1, Z_2]$. Далее поступаем так же, как в статье [6]. Возьмем $H=c_5 Z_1^\beta/\ln^{5/2} Z_1$ и построим новые сегменты $[\xi_\rho-H, \xi_\rho]$ и $[\xi_\rho, \xi_\rho+H]$. Один из них целиком лежит в $[Z_1, Z_2]$. Для каждого числа x из такого сегмента

$$\left|\sum_{y<\nu\leqslant x}a_\nu\chi(\nu)\right| > \left|\sum_{y<\nu\leqslant\xi_\rho}a_\nu\chi(\nu)\right| - \sum_{\nu\in[\xi_\rho, x]}|a_\nu| > c_6\frac{x^\beta}{\ln^{5/4}x},$$

как доказывается в работе [6] (с. 402). Общая длина построенных новых сегментов будет не меньше $Hc_4Q_1(\beta, T_1, 2T_1, q)/\ln^2 z$, и они расположены на сегменте, длина которого не превосходит $Z_2\leqslant 2Z_1$. Значит, они перекрываются в какой-либо точке $\xi\in[y, z]$ в количестве, не меньшем

$$Q' > c_4HQ_1(\beta, T_1, 2T_1, q)\frac{1}{\ln^2 z}\frac{1}{Z_1} >$$
$$> c_7Q_1(\beta, T_1, 2T_1, q)\frac{Z_1^{\beta-1}}{\ln^5 z} > c_8Q_1(\beta, T_1, 2T_1, q)\frac{\xi^{\beta-1}}{\ln^5 z}, \qquad (12.5)$$

для различных пар $\{\chi, \nu\}$, для каждой из которых имеем

$$\left|\sum_{y<n\leqslant\xi}\chi(n)\,a_n n^{-i\nu}\right| > c_1\xi^\beta\frac{1}{\ln z}. \qquad (12.6)$$

Множество различных пар $\{\chi, \nu\}$, для которых имеет место (12. 5), обозначим через E. Из (12. 5) и (12. 6) получим:

$$\sum_{\{\chi,\nu\}\in E}\left|\sum_{y<n\leqslant\xi}\chi(n)\,a_n n^{-i\nu}\right|^2 > c_8Q_1(\beta, T_1, 2T_1, q)\frac{\xi^{\beta-1}}{\ln^5 z}\frac{\xi^{2\beta}}{\ln^2 z} =$$
$$= c_9Q_1(\beta, T_1, 2T_1, q)\frac{\xi^{3\beta-1}}{\ln^7 z}. \qquad (12.7)$$

Положим теперь $\lambda = 1/8[\ln z]$ и оценим сумму (см. [8])

$$S = \sum_{T_1\lambda^{-1} \leqslant \nu \leqslant 2T_1\lambda^{-1}} \sum_{\chi} \Big| \sum_{y < n \leqslant \xi} \chi(n) a_n n^{-i\lambda\nu} \Big|^2,$$

в которой суммирование распространяется на все характеры, включая главный. Имеем оценку

$$S = Bq \ln z \Bigg[T_1 \sum_{y < n \leqslant \xi} \tau(n) + \sum_{y < n \leqslant \xi} \tau(n) \chi_0(n) \sum_{\substack{n < m \leqslant \xi \\ m \equiv n \pmod q}} |a_n| + \\ + \sum_{\substack{y < n < m \leqslant \xi \\ m \equiv n \pmod q}} \frac{\tau(n)\tau(m) n}{m - n} \Bigg]. \qquad (12.8)$$

При оценке среднего члена применяем лемму 1 из работы [6]. После этого сравнение (12.8) и (12.7) дает:

$$Q_1(\beta, T_1, 2T_1, q) = B(qT_1)\xi^{2-3\beta} \ln^{14} z + \xi^{3(1-\beta)} \ln^{15} z. \qquad (12.9)$$

Эту оценку мы мажорируем, полагая $\xi = z$.

Экспонента $2 - 3\beta < 0$, и мы должны заменить ξ наименьшим возможным z:

$$z = q^{2/\beta} T_1^{3/2\beta} > (qT_1)^{3/2\beta}.$$

Имеем: $\beta \geqslant 0.9$ и

$$(qT_1)(qT_1)^{(3/2\beta)(2-3\beta)} < (qT_1)^{(3/2)(2-3\cdot 0.9)+1} = (qT_1)^{-0.05}.$$

Итак, первым членом (12.9) можно пренебречь.

Во втором члене полагаем $\xi = z = K_8 (qT_1)^{3/2\beta}$, что дает оценку

$$B(qT_1)^{(9/2\beta)(1-\beta)} \ln^{15} qT_1.$$

Собирая эти оценки по T_1 и присоединяя оценку для $Q_1(\beta, 0, T_1', q)$, получим требуемую оценку (12.1). Присоединение нулей $L(s, \chi_0)$ не изменяет оценки.

§ 13. Теперь мы можем доказать весьма существенную лемму III.

Лемма III. *При N_1 — числе, указанном в § 3 (впрочем, и при любом целом N_1), имеем оценку*

$$I_\Delta(N_1) = \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{(a, q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} \sum_{\chi, \chi_1}{}' \chi(a)\chi_1(a) \bar{\tau}_\chi \bar{\tau}_{\chi_1} \times \\ \times \int_{-\Delta}^{\Delta} A_\chi(\alpha) A_{\chi_1}(\alpha) e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha = B \frac{N\sqrt{(q, N_1)}}{q^{0.49}} \ln^{40} N \qquad (13.1)$$

при $0 < \Delta \leqslant N^{\gamma_4}/N$.

Доказательство. Используя оценку (4.2), находим:

$$|I_\Delta(N_1)| \leqslant \frac{q^{3/2}\sqrt{(q, N_1)}}{\varphi^2(q)} \sum_{\chi, \chi_1}{}' \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha \cdot \int_{-\Delta}^{\Delta} |A_{\chi_1}(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2}. \qquad (13.2)$$

Далее, имеем, вводя суммы $A_{\chi,\beta}(\alpha)$:

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_\chi(\alpha)|^2\,d\alpha = \int_0^{\Delta} |A_\chi(\alpha)|^2\,d\alpha + \int_0^{\Delta} |A_{\bar\chi}(\alpha)|^2\,d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \ln^4 N \sum_\beta \int_0^{\Delta} \left\{ |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2 + |A_{\bar\chi,\beta}(\alpha)|^2 \right\} d\alpha. \tag{13.3}$$

Для дальнейшего удобно ввести число $\nu=\beta-1/2$. При $\nu=0.01$ имеем, согласно лемме II:

$$\int_0^{\Delta} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha = B\frac{N}{(q\tau)^6}.$$

Ввиду этого

$$\sum_{\nu\leqslant 0.01} \int_0^{\Delta} \left\{ |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2 + |A_{\bar\chi,\beta}(\alpha)|^2 \right\} d\alpha = B\frac{N\ln^2 N}{(q\tau)^6}. \tag{13.4}$$

Далее, согласно лемме I (см. (9.2)), при $0.01<\nu\leqslant 1/2-10^{-4}$ имеем оценку

$$\int_0^{\Delta} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha = B\frac{N}{(q\tau)^6},$$

так что

$$\sum_{0.01<\nu\leqslant 1/2-10^{-4}} \int_0^{\Delta} \left\{ |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2 + |A_{\bar\chi,\beta}(\alpha)|^2 \right\} d\alpha = B\frac{N\ln^2 N}{(q\tau)^6}. \tag{13.5}$$

Объединяя оценки (13.4) и (13.5), получим

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_\chi(\alpha)|^2\,d\alpha \leqslant \ln^4 N \sum_{\nu>1/2-10^{-4}} \int_0^{\Delta} \left\{ |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2 + |A_{\bar\chi,\beta}(\alpha)|^2 \right\} d\alpha + R_\Delta, \tag{13.6}$$

где

$$R_\Delta = B\frac{N\ln^6 N}{(q\tau)^6}.$$

§ 14. Займемся оценкой $\int_0^{\Delta} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha$ при каком-либо $\nu>1/2-10^{-4}$. Для этого используем (8.5), полагая там $\delta_2=\Delta$, и объединим оценки для $A^{(+)}_{\chi,\beta}(\alpha)$ и $A^{(-)}_{\chi,\beta}(\alpha)$:

$$\int_{\Delta/2^r}^{\Delta/2^{r-1}} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha = BN^{2\nu}\ln^2 N \sum_{s=0}^{\infty} Q\left(\frac{2\pi N\Delta}{2^r}\cdot 2^{s+1},\ \nu-\mu,\ \chi\right) e^{-2^{s-2}}. \tag{14.1}$$

При этом считаем $\Delta/2^r \geqslant 4/N$.

Заметим теперь, что при $2^{s-2} \geqslant \ln^2 N$ мы можем взять для $Q((2\pi N\Delta/2^r)\,2^{s+1},\ \nu-\mu,\ \chi)$ тривиальную оценку $B(N\Delta/2^r)\,2^{s+1} \times \times \ln(q(N_\Delta/2^r)\,2^{s+1})$, и суммирование по таким s даст величину порядка $e^{-(1/2)\ln^2 N}$, так что получим вместо правой части (14.1)

$$BN^{2\nu}\ln^2 N \sum_{2^s \leqslant 4\ln^2 N} Q\left(\frac{2\pi N\Delta}{2^r}\,2^{s+1},\ \nu-\mu,\ \chi\right)e^{-2^{s-2}} + Be^{-(1/2)\ln^2 N}. \quad (14.2)$$

Далее, производим грубую замену:

$$\sum_{2^s \leqslant 4\ln^2 N} Q\left(\frac{2\pi N\Delta}{2^r}\,2^{s+1},\ \nu-\mu,\ \chi\right)e^{-2^{s-2}} \leqslant \ln N \cdot Q(16\pi N\Delta\ln^2 N, \nu-\mu, \chi). \quad (14.3)$$

Ввиду того что $\Delta \leqslant N^{\eta_4}/N$, (14.3) не превосходит

$$\ln N \cdot Q(M,\ \nu-\mu,\ \chi), \quad (14.4)$$

где

$$M = 16\pi N^{\eta_4}\ln^2 N. \quad (14.5)$$

Отсюда имеем при $\Delta/2^r \geqslant 4/N$:

$$\int_{\Delta/2^r}^{\Delta/2^{r-1}} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha = BN^{2\nu}\ln^3 N \cdot Q(M,\ \nu-\mu,\ \chi) + Be^{-(1/2)\ln^2 N}. \quad (14.6)$$

При $\Delta/2^r < 4/N$ встает задача оценки интеграла $\int_0^{4/N} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha$.

Оценка (5.11), дающая $BN^{2\nu}\ln^2 N$, здесь недостаточна. Чтобы получить нужную более точную оценку, вернемся к (5.7):

$$|A_{\chi,\beta}(\alpha)| = BN^{1/2-\nu}\sum_{\rho\in\mathfrak{S}_\nu} e^{-(\pi/2)(|t_k|-t_k)-a_0 t_k}(|t_k|+1)^\nu,$$

где

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{8\pi} \leqslant a_0 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Возьмем при $|t_k| \leqslant M = 16\pi N^{\eta_4}\ln^2 N$ оценку числа нулей ρ $Q(M,\ \nu-\mu,\ \chi)$, а при $|t_k| > M$ — тривиальную оценку (5.9). Тогда получим:

$$|A_{\chi,\beta}(\alpha)| = BN^{1/2+\nu}Q(M,\ \nu-\mu,\ \chi) + Be^{-N^{\eta_4}}.$$

Отсюда выводим:

$$\int_0^{4/N} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha = BN^{2\nu}Q^2(M,\ \nu-\mu,\ \chi) + Be^{-\ln^2 N}.$$

Объединяя последнюю оценку (14.6) и беря всевозможные $r \leqslant \lg_2 N$, получим окончательно:

$$\int_0^\Delta |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2 \, d\alpha = BN^{2\nu} \ln^4 N \cdot Q^2(M, \nu-\mu, \chi) + Be^{-(1/4)\ln^2 N}. \tag{14.7}$$

§ **15.** Заметим теперь, что, очевидно,

$$Q(M, \nu-\mu, \bar{\chi}) = Q(M, \nu-\mu, \chi).$$

Поэтому

$$\int_0^\Delta \{|A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2 + |A_{\bar{\chi},\beta}(\alpha)|^2\} \, d\alpha = BN^{2\nu} \ln^4 N \cdot Q^2(M, \nu-\mu, \chi) + Be^{-(1/4)\ln^2 N}. \tag{15.1}$$

Составим теперь оценку произведения

$$\int_0^\Delta \{|A_{\chi,\beta_1}(\alpha)|^2 + |A_{\bar{\chi},\beta_1}(\alpha)|^2\} \, d\alpha \cdot \int_0^\Delta \{|A_{\chi_1,\beta_2}(\alpha)|^2 + |A_{\bar{\chi}_1,\beta_2}(\alpha)|^2\} \, d\alpha \tag{15.2}$$

для β_1 и β_2 из участка $[1-10^{-4}, 1]$.

Обозначим через $E(\beta)$ множество характеров χ, для которых $Q(M, \nu-\mu, \chi) \neq 0$. Тогда для произведения (15.2) при $\beta_1 = 1/2 + \nu_1$, $\beta_2 = 1/2 + \nu_2$ получим оценку

$$BN^{2\nu_1+2\nu_2} \ln^8 N \cdot Q^2(M, \nu-\mu, \chi) \, Q^2(M, \nu-\mu, \chi_1) + Be^{-(1/8)\ln^2 N} \tag{15.3}$$

при

$$\chi \in E(\beta_1), \quad \chi_1 \in E(\beta_2) \tag{15.4}$$

и оценку

$$Be^{-(1/8)\ln^2 N}, \tag{15.5}$$

если

$$\chi \,\bar{\in}\, E(\beta_1) \text{ или } \chi_1 \,\bar{\in}\, E(\beta_2). \tag{15.6}$$

Введем $U(\chi, \beta)$, принимающую значение (15.1) при $\chi \in E(\beta)$ и значение $Be^{-(1/8)\ln^2 N}$, если $\chi \,\bar{\in}\, E(\beta)$. Тогда оценки (15.3) и (15.5) в условиях (15.2) и (15.6) можно объединить в одной оценке:

$$U(\chi, \beta_1) \, U(\chi_1, \beta_2). \tag{15.7}$$

Для данных χ и χ_1, если учесть (13.6), имеем:

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_\chi(\alpha)|^2 \, d\alpha \cdot \int_{-\Delta}^{\Delta} |A_{\chi_1}(\alpha)|^2 \, d\alpha = B\frac{N^2 \ln^{12} N}{(q\tau)^{12}} +$$

$$+ B\frac{N \ln^{10} N}{(q\tau)^6} \left(\sum_{\beta_1} U(\chi, \beta_1) + \sum_{\beta_2} U(\chi_1, \beta_2) \right) +$$

$$+ B \ln^8 N \sum_{\beta_1, \beta_2} U(\chi, \beta_1) \, U(\chi_1, \beta_2). \tag{15.8}$$

Применяя очевидное неравенство

$$\sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leqslant \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}$$

для неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, получим:

$$\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_{\chi}(\alpha)|^2 d\alpha \cdot \int_{-\Delta}^{\Delta} |A_{\chi_1}(\alpha)|^2 d\alpha\right)^{1/2} =$$

$$= B\frac{N\ln^6 N}{(q\tau)^6} + B\frac{N^{1/2}\ln^5 N}{(q\tau)^3}\left(\sum_{\beta_1}(U(\chi, \beta_1))^{1/2} + \sum_{\beta_2}(U(\chi_1, \beta_2))^{1/2}\right) +$$
$$+ B\ln^4 N\sum_{\beta_1, \beta_2}(U(\chi, \beta_1))^{1/2}\cdot(U(\chi_1, \beta_2))^{1/2}.$$

Рассмотрим теперь при данных β_1, β_2 сумму $\sum'_{\chi, \chi_1}(U(\chi, \beta_1))^{1/2} \times$ $\times (U(\chi_1, \beta_2))^{1/2}$, распространенную по всем парам неглавных характеров χ, χ_1.

Фиксируем сначала χ и будем суммировать по χ_1. Если $\chi \overline{\in} E(\beta_1)$, то сумма таких членов даст, очевидно, выражение

$$Be^{-(1/16)\ln^2 N}. \tag{15.9}$$

Если же $\chi \in E(\beta_1)$, то сумма по χ_1 не превосходит

$$(U(\chi, \beta_1))^{1/2}\sum_{\chi_1 \in E(\beta_2)}(U(\chi_1, \beta_2))^{1/2} + Be^{-(1/8)\ln^2 N}. \tag{15.10}$$

Далее,

$$\sum_{\chi_1 \in E(\beta_2)}(U(\chi_1, \beta_2))^{1/2} = BN^{\nu_2}\ln^2 N\cdot\sum_{\chi_1}Q(M, \nu_2 - \mu, \chi_1) + Be^{-(1/8)\ln^2 N} =$$
$$= BN^{\nu_2}\ln^2 N\cdot Q(\beta_2 - \mu, -M, M, q) + Be^{-(1/8)\ln^2 N} =$$
$$= BN^{\nu_2}(q^2M)^{9/2(\beta_2-\mu)\cdot(1-\beta_2+\mu)}\ln^{18} N,$$

согласно лемме К. А. Родосского (см. (12.1)). Поскольку $q^2M \leqslant$ $\leqslant N^{2\eta_4}$ и $\mu = 1/[\ln^2 N]$, получаем оценку

$$BN^{\nu_2}N^{2\eta_4(1/2-\nu_2)}\ln^{18} N,$$

так что

$$\sum_{\chi_1 \in E(\beta_2)}\{U(\chi_1, \beta_2)\}^{1/2} = BN^{1/2}N^{(\nu_2-1/2)(1-2\eta_4)}\ln^{18} N = BN^{1/2}\ln^{18} N, \tag{15.11}$$

ибо $\nu_2 \leqslant 1/2$, $1 - 2\eta_4 > 0$. Итак, выражение (15.10) оценивается как

$$(U(\chi, \beta_1))^{1/2}BN^{1/2}\ln^{18} N + Be^{-(1/8)\ln^2 N}.$$

Суммируя по всем $\chi \in E(\beta_1)$ и применяя (15.11) с заменой χ_1 на χ и β_2 на β_1, получим:

$$BN\ln^{36} N + Be^{-(1/16)\ln^2 N}.$$

В силу предыдущего

$$\sum_{\chi,\,\chi_1}{}' (U(\chi,\ \beta_1))^{1/2} (U(\chi_1,\ \beta_2))^{1/2} = BN \ln^{36} N. \tag{15.12}$$

Далее, из (15.11) следует:

$$\sum_{\chi}{}' (U(\chi,\ \beta_1))^{1/2} = BN^{1/2} \ln^{18} N. \tag{15.13}$$

Обратимся к (15.9). Число различных чисел β_1 не превосходит $\ln^2 N$, то же справедливо относительно чисел β_2. Ввиду этого (15.12) и (15.13) дают при подстановке в (15.8) и суммировании по χ, χ_1:

$$\sum_{\chi,\,\chi_1}{}' \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha \cdot \int_{-\Delta}^{\Delta} |A_{\chi_1}(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} = (\varphi(q))^2 \frac{N \ln^6 N}{(q\tau)^6} +$$
$$+ B \frac{N \ln^{20} N}{(q\tau)^3} \ln^2 N + BN \ln^{36} N \cdot \ln^4 N = BN \ln^{40} N. \tag{15.14}$$

Подставляя оценку (15.14) в (13.2) и учитывая, что при любом $\varepsilon > 0$ $\varphi(q) > c_\varepsilon q^{1-\varepsilon}$, получим:

$$I_\Delta(N_1) = B \frac{q^{3/2} \sqrt{(q,\ N_1)}}{c_\varepsilon^2 q^{2-2\varepsilon}} N \ln^{40} N = B \frac{N \sqrt{(q,\ N_1)}}{q^{0.49}} \ln^{40} N,$$

что и доказывает (13.1) и лемму III.

Дополнение к лемме III.

$$I_\Delta(a,\ N_1) = \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{\chi,\,\chi_1}{}' \chi(a)\, \chi_1(a)\, \bar{\tau}_\chi \bar{\tau}_{\chi_1} e^{2\pi i N_1 a/q} \times$$
$$\times \int_{-\Delta}^{\Delta} A_\chi(\alpha)\, A_{\chi_1}(\alpha)\, e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha = B \frac{N}{q^{0.99}} \ln^{40} N. \tag{15.15}$$

Для доказательства используем оценку (4.4) и далее применяем все рассуждения § 13—15.

§ 16. Мы должны теперь перейти к аналогичной оценке для интеграла типа $I_q^{(1)}(N_1)$ (см. (4.3)).

Лемма IV. *При тех же значениях* Δ, $0 \leqslant \Delta \leqslant N^{\eta_4}/N$, *имеем для величины*

$$J_\Delta(N_1) = 2 \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,\,q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} \sum_{\chi}{}' \chi(a)\, \bar{\tau}_\chi \cdot \int_{-\Delta}^{\Delta} A_{\chi_0}(\alpha)\, A_\chi(\alpha)\, e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha$$

оценку

$$|J_\Delta(N_1)| = B \frac{N \ln^{22} N}{q^{0.9}} \tag{16.1}$$

при любых целых N_1.

Доказательство. Используем оценку (4.3), которая дает:

$$|J_\Delta(N_1)| \leqslant \frac{2q}{\varphi^2(q)} \sum_\chi{}' \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2 \, d\alpha \cdot \int_{-\Delta}^{\Delta} |A_\chi(\alpha)|^2 \, d\alpha \right)^{1/2}. \qquad (16.2)$$

Имеем:

$$A_{\chi_0}(\alpha) = \sum_{n \geqslant 2} \chi_0(n) \Lambda(n) e^{-n/N} e^{-2\pi i \alpha n};$$

отсюда

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2 \, d\alpha \leqslant \int_{-1/2}^{1/2} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2 \, d\alpha = \sum_{n \geqslant 2} \chi_0(n) (\Lambda(n))^2 e^{-2n/N} = BN \ln^2 N,$$

так что

$$|J_\Delta(N_1)| = B \frac{q}{\varphi^2(q)} N^{1/2} \ln N \sum_\chi{}' \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_\chi(\alpha)|^2 \, d\alpha \right)^{1/2}.$$

Оценка интеграла $\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_\chi(\alpha)|^2 \, d\alpha \right)^{1/2}$ дает, согласно § 15, выражение

$$\left(B \frac{N}{(q\tau)^6} \ln^{12} N \right)^{1/2} + B \ln^2 N \sum_{\beta > 1 - 10^{-4}} \{U(\chi, \beta)\}^{1/2},$$

так что

$$\sum_\chi{}' \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_\chi(\alpha)|^2 \, d\alpha \right)^{1/2} = B \frac{N^{1/2} \ln^6 N}{(q\tau)^3} \varphi(q) + B \sum_\chi{}' \sum_{\beta > 1 - 10^{-4}}{}' (U(\chi, \beta))^{1/2} \ln^2 N.$$

Согласно (15.13), находим:

$$\sum_\chi{}' \left(\int_{-\Delta}^{\Delta} |A_\chi(\alpha)|^2 \, d\alpha \right)^{1/2} = BN^{1/2} \ln N + BN^{1/2} \ln^{22} N. \qquad (16.3)$$

Используя (16.3), получаем:

$$|J_\Delta(N_1)| = B \frac{N \ln^{22} N}{q^{0.9}}. \qquad (16.4)$$

§ **17.** Вернемся теперь к исходному интегралу $J(N)$ из § 2 и рассмотрим выражения (2.2)—(2.6).

Мы должны изучить поведение суммы

$$T(\vartheta) = \sum_{m \leqslant \lg_2 N} e^{-2^m/N} e^{-2\pi i \vartheta \cdot 2^m}. \qquad (17.1)$$

Легко находим

$$T(0) = \sum_{m \leqslant \lg_2 N} e^{-2^m/N} = \frac{\ln N}{\ln 2} + B = \lg_2 N + B.$$

Для дальнейшего важна следующая лемма.

Лемма V.

$$\int\limits_0^1 |S(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta < C_1 N \ln^2 N. \tag{17.2}$$

Доказательство. Имеем:

$$S(\vartheta) = \sum_{n \geqslant 2} e^{-n/N} e^{-2\pi i \vartheta n} \Lambda(n).$$

Полагая

$$S_1(\vartheta) = \sum_{p \geqslant 2} \ln p \cdot e^{-p/N} e^{-2\pi i \vartheta p},$$

$$S_2(\vartheta) = S(\vartheta) - S_1(\vartheta),$$

найдем:

$$\int\limits_0^1 |S(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta \leqslant \int\limits_0^1 |S_1(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta + \int\limits_0^1 |S_2(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta. \tag{17.3}$$

Далее, очевидно,

$$\int\limits_0^1 |S_2(\vartheta)|^2 d\vartheta = BN^{1/2}\ln^4 N, \quad |T(\vartheta)| \leqslant T(0) = B\ln N,$$

так что (17. 3) дает:

$$\int\limits_0^1 |S(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta = \int\limits_0^1 |S_1(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta + BN^{0.6}. \tag{17.4}$$

Пусть для всякого целого $u \geqslant 2$ $\Psi(u)$ означает $\sum \ln p \ln p'$, распространенную по всем парам простых чисел p, p', каждое из которых участвует в решении уравнения

$$p + 2^m = u \tag{17.5}$$

при ограничительном условии $m \leqslant \lg_2 N$.

Если обозначим через $\psi_0(u)$ число решений уравнения (17. 5) без всяких ограничительных условий, то получим, очевидно,

$$\Psi(u) \leqslant \psi_0^2(u)\ln^2 u.$$

Далее обращаемся к работе Н. П. Романова [9], в которой, в частности, доказано, что

$$\sum_{u \leqslant M} \psi_0^2(u) \leqslant C_2 M. \tag{17.6}$$

Получаем:

$$\int_0^1 | S_1(\vartheta) T(\vartheta) |^2 d\vartheta = \sum_{u=2}^{\infty} \Psi(u) e^{-2u/N} \leqslant \sum_{u=2}^{\infty} \psi_0^2(u) \ln^2 u \cdot e^{-2u/N} = \sum_{r=1}^{\infty} V_r,$$

где

$$V_1 = \sum_{u \leqslant N} \psi_0^2(u) \ln^2 u \cdot e^{-2u/N},$$

$$V_r = \sum_{N \cdot 2^{r-1} \leqslant u \leqslant N \cdot 2^r} \psi_0^2(u) \ln^2 u \cdot e^{-2u/N} \quad (r = 2, 3, \ldots).$$

На основании (17.6) имеем, очевидно:

$$V_r \leqslant \ln^2(N \cdot 2^r) e^{-2^r} N 2^r \leqslant N \ln^2 N \cdot 2^r e^{-2^r} +$$
$$+ N \ln^2(2^r) e^{-2^r} 2^r \leqslant 2N \ln^2 N \cdot 2^r e^{-2^r} \ln^2(2^r).$$

Суммируя по r, находим:

$$\sum_{r=1}^{\infty} V_r < C_3 N \ln^2 N;$$

присоединяя сюда соотношение (17.4), получаем (17.2).

§ 18. Теперь мы должны перейти к изучению свойств суммы

$$T(\vartheta) = \sum_{m \leqslant \lg_2 N} e^{-2^m/N} e^{-2\pi i \vartheta \cdot 2^m}.$$

Пусть N_0 — параметр, стремящийся к ∞, $L_0 = \lg_2 N_0$, и пусть задано положительное число $\gamma < 0.01$.

Рассмотрим сумму

$$V(\beta) = \sum_{m \leqslant L_0} r_m e^{2\pi i \beta \cdot 2^m}, \tag{18.1}$$

где

$$r_m = r^{2^{A+m}}, \quad r = e^{-1/N}, \quad N \geqslant 2^{A+L_0}.$$

Имеем:

$$V(0) = L_0 + B. \tag{18.2}$$

В самом деле,

$$V(0) = \sum_{m \leqslant L_0} r_m = \sum_{m \leqslant L_0} e^{-(1/N) \cdot 2^{A+m}} =$$
$$= [L_0] + B \sum_{m \leqslant L_0} \frac{2^{A+m}}{N} = [L_0] + B \frac{2^{A+L_0+1}}{N} = L_0 + B.$$

Назовем *критическим множеством* суммы (18.1) и обозначим через $\mathscr{E}_\gamma(N_0)$ множество точек $\beta \in [0, 1]$, для которых

$$| V(\beta) | \geqslant (1 - \gamma) V(0). \tag{18.3}$$

Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма VI.

$$\text{I. } \operatorname{mes} \mathcal{E}_{\gamma}(N_0) \leqslant K_9 \frac{N_0^{\gamma_1}}{N_0}, \tag{18.4}$$

где

$$\gamma_1 = \gamma_1(\gamma) = \frac{2}{\ln 2}\left(3\sqrt{\gamma}\ln\frac{1}{\gamma} + \frac{8\ln^2 2}{\ln(1/\gamma)}\right). \tag{18.5}$$

II. *Число различных комбинаций знаков среди первых* $[L_0]$ *знаков двоичного разложения чисел* $\beta \in \mathcal{E}_{\gamma}(N_0)$ *не превосходит*

$$K_{10} N^{\gamma_1}. \tag{18.6}$$

Доказательство. Положим $\beta_m = \beta \cdot 2^m$. Если $\beta \in \mathcal{E}_{\gamma}(N_0)$, то из (18.3) имеем:

$$\left|\sum_{m \leqslant L_0} r_m e^{2\pi i \beta_m}\right| \geqslant (1-\gamma) \sum_{m \leqslant L_0} r_m.$$

Поэтому существует $\varphi \in [0, 1)$, такое, что

$$\sum_{m \leqslant L_0} r_m \cos 2\pi(\beta_m - \varphi) \geqslant (1-\gamma) \sum_{m \leqslant L_0} r_m. \tag{18.7}$$

Теперь можно утверждать, что среди целых чисел $m = 1, 2, \ldots, [L_0]$ найдется по крайней мере

$$L_1 \geqslant (1 - \sqrt{\gamma}) L_0$$

таких, что

$$\cos 2\pi(\beta_m - \varphi) > 1 - 2\sqrt{\gamma}. \tag{18.8}$$

В самом деле, будь это не так, мы получили бы, учитывая монотонность r_m:

$$\sum_{m \leqslant L_0} r_m \cos 2\pi(\beta_m - \varphi) \leqslant \sum_{m \leqslant (1-\sqrt{\gamma}) L_0} r_m + (1 - 2\sqrt{\gamma}) \sum_{(1-\sqrt{\gamma}) L_0 \leqslant m \leqslant L_0} r_m =$$

$$= \sum_{m \leqslant L_0} r_m - 2\sqrt{\gamma} \sum_{(1-\sqrt{\gamma}) L_0 \leqslant m \leqslant L_0} r_m <$$

$$< L_0 - 2\sqrt{\gamma}\sqrt{\gamma}\, L_0 + B = L_0(1-2\gamma) + B = V(0)(1-2\gamma) + B,$$

что противоречит соотношению (18.7). Итак, существует $L_1 \geqslant (1 - \sqrt{\gamma}) L_0$ чисел β_m, для которых справедливо неравенство (18.8) при достаточно больших N_0.

Элементарным путем получаем следующее: по каждому такому числу β_m найдется целое число k_m, такое, что

$$|2\pi(\beta_m - \varphi) + 2k_m\pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{6}\,\gamma^{1/4}, \text{ если } \gamma < \frac{\pi^2}{24}. \tag{18.9}$$

Ввиду того что наших чисел β_m будет $L_1 \geqslant (1 - \sqrt{\gamma}) L_0$ и $\gamma < 0.01$, среди чисел β_m непременно найдутся соседние β_n и $\beta_{n+1} = 2\beta_n$. Выписывая для них соотношение (18.9), найдем

$$|2\pi(\beta_n - \varphi) + 2k_n\pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{6}\,\gamma^{1/4}, \quad |2\pi(\beta_{n+1} - \varphi) + 2k_{n+1}\pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{6}\,\gamma^{1/4},$$

откуда, удвоив первое неравенство, выводим:

$$|2\pi\varphi + 2k\pi| \leqslant \frac{3\pi}{2}\sqrt{6}\,\gamma^{1/4}, \text{ где } k \text{ — целое число.}$$

Подставляя в (18.9), получим

$$|2\pi\beta_m + 2k'_m\pi| \leqslant 2\pi\sqrt{6}\,\gamma^{1/4},$$

k'_m — целое, или

$$((\beta_m)) \leqslant \sqrt{6}\,\gamma^{1/4}, \qquad (18.10)$$

где $((\beta_m))$ — расстояние $\beta_m = \beta \cdot 2^m$ до ближайшего целого числа. Чтобы соотношение (18.10) было нетривиальным, считаем здесь $\sqrt{6}\,\gamma^{1/4} < 1/4$ и $\gamma < 2^{-10}$.

Для дальнейшего запишем число β в двоичной системе счисления,

$$\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{2^k}, \quad g_k = 0,\ 1, \qquad (18.11)$$

причем будем избегать записи, оканчивающейся бесконечным рядом единиц.

Для каждого из наших L_1 чисел, для которых выполняется условие (18.10), находим

$$\beta \cdot 2^m = Z_m + \frac{g_{m+1}}{2} + \frac{g_{m+2}}{2^2} + \ldots,$$

где Z_m — целое. Ввиду того что $\gamma < 2^{-10}$, из (18.10) получим

$$((\beta \cdot 2^m)) < 2^{-r(\gamma)},$$

где

$$r(\gamma) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\lg_2\frac{1}{\gamma} \geqslant 4.$$

Теперь можно утверждать, что для каждого из наших m имеет место одно из двух обстоятельств ($r = r(\gamma)$):

$$\text{либо } g_{m+1} = g_{m+2} = \ldots = g_{m+r-2} = 0,$$
$$\text{либо } g_{m+1} = g_{m+2} = \ldots = g_{m+r-2} = 1.$$

В самом деле, пусть это не так. Тогда, очевидно,

$$\{\beta \cdot 2^m\} \geqslant \frac{1}{2^{r-2}},$$

где $\{\ \}$ — знак дробной части, и

$$\{\beta \cdot 2^m\} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots - \frac{1}{2^{r-2}} = 1 - \frac{1}{2^{r-2}},$$

откуда

$$((\beta \cdot 2^m)) \geqslant \frac{1}{2^{r-2}} > \frac{1}{2^{r(\gamma)}},$$

что противоречит предыдущему.

Итак, в двоичном разложении числа β для каждого из L_1 чисел m индекс g_m ведет за собой серию из $r-2$ (или более) нулей или единиц.

Рассмотрим теперь первые $[L_0]$ цифр $g_1, g_2, \ldots, g_{[L_0]}$ двоичного разложения β. Согласно предыдущему, легко находим следующую оценку для числа возможных систем цифр $g_1, g_2, \ldots, g_{[L_0]}$:

$$B \cdot C_{[L_0]}^{[L_0]-L_1} \cdot 2^{L_0-L_1} \cdot 2^{L_1/(r-2)}. \tag{18.12}$$

(18.12) не превосходит

$$B \cdot C_{[L_0]}^{[L_0\sqrt{\gamma}]} \cdot 2^{L_0\sqrt{\gamma}} \cdot 2^{L_0/(r-2)}. \tag{18.13}$$

Применяя формулу Стирлинга, найдем:

$$C_{[L_0]}^{[L_0\sqrt{\gamma}]} = BL_0^2 \frac{L_0^{L_0}e^{-L_0}}{(L_0\sqrt{\gamma})^{L_0\sqrt{\gamma}}\,(L_0(1-\sqrt{\gamma}))^{L_0(1-\sqrt{\gamma})}\,e^{-L_0}} =$$

$$= BL_0^2 \exp L_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\ln\frac{1}{\gamma} - (1-\sqrt{\gamma})\ln(1-\sqrt{\gamma})\right), \tag{18.14}$$

$$2^{L_0\sqrt{\gamma}} = \exp(L_0 \ln 2 \cdot \sqrt{\gamma}), \tag{18.15}$$

$$2^{L_0/(r-2)} \leqslant 2^{2L_0/r} = \exp\left(2\ln 2 \cdot \frac{L_0}{r}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(8\ln 2 \cdot \frac{L_0}{\lg_2(1/\gamma)}\right) = \exp\left(8\ln^2 2 \cdot \frac{L_0}{\ln(1/\gamma)}\right). \tag{18.16}$$

Собирая эти оценки вместе, найдем оценку

$$BL_0^2 \exp L_0\left(3\sqrt{\gamma}\ln\frac{1}{\gamma} + \frac{8\ln^2 2}{\ln(1/\gamma)}\right). \tag{18.17}$$

Имеем, далее, $2^{L_0} = N_0$, $e^{L_0} = N_0^{1/\ln 2}$, так что выражение (18.17) приобретает вид

$$B\ln^2 N_0 \cdot N_0^{(1/\ln 2)\left(3\sqrt{\gamma}\ln(1/\gamma) + 8\ln^2 2/\ln(1/\gamma)\right)}. \tag{18.18}$$

Тогда для меры множества чисел $\beta \in \mathcal{E}_\gamma(N_0)$ получим оценку

$$B\ln^2 N_0 \cdot N_0^{(1/\ln 2)\left(3\sqrt{\gamma}\ln(1/\gamma) + 8\ln^2 2/\ln(1/\gamma)\right)-1} \leqslant N_0^{\gamma_1 - 1}$$

для больших N_0, где

$$\gamma_1 = \frac{2}{\ln 2}\left(3\sqrt{\gamma}\ln\frac{1}{\gamma} + \frac{8\ln^2 2}{\ln(1/\gamma)}\right) = \gamma_1(\gamma), \tag{18.19}$$

что и требовалось доказать. Мы видим, что $\gamma_1 = \gamma_1(\gamma) \to 0$ вместе с γ.

§ 19. Лемма VII. *Множество $\mathcal{E}_\gamma(N_0)$ можно заключить в совокупность $N_\gamma = BN_0^{2\gamma_1(2\gamma)}$ интервалов, длина каждого из которых не превосходит $BN_0^{\gamma_1(\gamma)-1}$.*

Доказательство. Пусть $\beta \in \mathcal{E}_\gamma(N_0)$. Тогда

$$|V(\beta)| > (1-\gamma)\, V(0).$$

Если N_0 достаточно большое и $|\xi| \leqslant \Delta = 1/(N_0 \ln N_0)$, то, очевидно,

$$|V(\beta+\xi)| > (1-2\gamma)\, V(0).$$

Отсюда ясно, что $\mathcal{E}_\gamma(N_0)$ входит в систему дизъюнктных сегментов в количестве, не превышающем

$$\frac{\operatorname{mes} \mathcal{E}_{2\gamma}(N_0)}{\Delta} = BN_0 \ln N_0 \cdot N_0^{\gamma_1(2\gamma)-1} = BN_0^{2\gamma_1(2\gamma)},$$

согласно лемме VI.

Обращаясь теперь к числам η_2 и η_3, введенным в § 2, фиксируем η_2 как какое-либо число, не превосходящее 10^{-6}, и выбираем число $\gamma_1 = \eta_3'$ так, чтобы

$$\gamma_1 = \eta_3' \leqslant 0.005\eta_2 \text{ и } 2\gamma_1(2\gamma) \leqslant 0.005\eta_2. \tag{19. 1}$$

Такое γ_1 можно выбрать, беря достаточно малое $\gamma = \eta_1$. Возьмем теперь сумму

$$T(\vartheta) = \sum_{m \leqslant \lg_2 N} e^{-2^m/N} e^{-2\pi i \vartheta \cdot 2^m}$$

и построим для нее множество $\mathcal{E}_{\eta_1}(N)$.

В § 2 при помощи числа $\tau = N^{\eta_2}$ сегмент $[0, 1]$ был разбит на множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{m}$. Если обозначим через F_q совокупность $\varphi(q)$ сегментов вида

$$\left[\frac{a}{q} - \frac{2}{q\tau},\ \frac{a}{q} + \frac{2}{q\tau}\right],$$

где a пробегает $\varphi(q)$ чисел, взаимно-простых с q и меньших q, то $\mathfrak{M}$ получается как объединение всех F_q с $q \leqslant (\ln N)^{1000}$, а $\mathfrak{m}$ — как дополнение его в $[0, 1]$ (точка 0 отождествляется с 1). Легко замечаем, что $\mathfrak{m}$ покрывается суммой множеств F_q, где $(\ln N)^{1000} < q \leqslant \tau$, причем эти последние F_q могут частично перекрываться.

Далее, беря число $\eta_4 = 500\eta_2$ из § 9, полагаем $\Lambda = N^{\eta_4}/N$ и вводим новые множества $F_q(\Lambda)$ — совокупность $\varphi(q)$ сегментов

$$\left[\frac{a}{q} - \Lambda,\ \frac{a}{q} + \Lambda\right].$$

Очевидно, эти $F_q(\Lambda)$ не пересекаются при большом N. Разность множеств $F_q - F_q(\Lambda)$ обозначим через F_q'; объединение всех F_q' при $(\ln N)^{1000} < q \leqslant \tau$ (они могут и перекрываться) обозначим через G'.

Нас будет прежде всего интересовать пересечение $\mathcal{E}_{\eta_1}(N) \cap G'$. Положим $\eta_3 = 0.01\eta_2$ и докажем следующую лемму.

Лемма VIII. *Множество $\mathcal{E}_\eta(N)$ может быть вложено не более чем в N^{η_3} множеств F_q $(1 \leqslant q \leqslant \tau)$. При этом каждое пересечение $\mathcal{E}_\eta(N) \cap F'_q$ вкладывается не более чем в N^{η_3} сегментов, каждый протяжением не более чем N^{η_3}/N, при достаточно большом N.*

Доказательство. Пусть $\beta \in \mathcal{E}_\eta(N)$. Найдем $q \leqslant \tau$ и a, для которых выполняются условия

$$\left|\frac{a}{q} - \beta\right| \leqslant \frac{1}{q\tau}, \quad (a, q) = 1.$$

Очевидно, сегмент

$$\left[\frac{a}{q} - \frac{2}{q\tau}, \ \frac{a}{q} + \frac{2}{q\tau}\right]$$

покроет точку β и тот интервал, указанный в лемме VII, который ее содержит, ибо $1/q\tau \geqslant 1/\tau^2 = N^{-2\eta_2}$, а длина указанного интервала, по лемме VII, не превосходит $BN^{\gamma_1(\eta)-1} = BN^{0.05\eta_2}/N$. Берем какой-либо другой интервал леммы VII и совершаем ту же операцию. Так в конце концов выделим совокупность F_q, покрывающую $\mathcal{E}_\eta(N)$ полностью.

Отметим здесь же, что такая операция может быть и неоднозначной, так как отдельные F_q могут и перекрываться. Но это не существенно; мы можем взять любую систему таких покрывающих $\mathcal{E}_\eta(N)$ множеств F_q. Очевидно, число их не будет превосходить числа интервалов, покрывающих $\mathcal{E}_\eta(N)$, которое, по лемме VII, не превосходит

$$BN^{2\gamma_1(2\eta)} = BN^{0.005\eta_2} = BN^{\eta_3/2}.$$

Это доказывает первую часть леммы VIII.

Систему множеств F_q, покрывающих $\mathcal{E}_\eta(N)$, обозначим через $F(\mathcal{E}_\eta(N))$, а систему соответствующих им $F'_q = F_q - F_q(\Lambda)$ — через $F'(\mathcal{E}_\eta(N))$.

§ **20.** Каждый из интервалов, содержащих $\mathcal{E}_\eta(N)$, имеет длину $BN^{0.005\eta_2}/N$, и число их равно $BN^{0.005\eta_2}$. F'_q состоит из $\varphi(q)$ пар сегментов на удалении, не меньшем $1/q \geqslant N^{-\eta_2}$. Это и доказывает вторую часть леммы VIII.

Нас будет теперь интересовать пересечение

$$\mathfrak{m} \cap \mathcal{E}_\eta(N). \tag{20.1}$$

Если мы рассмотрим объединение $\sum\limits_{(\ln N)^{1000} < q \leqslant \tau} F_q(\Lambda)$, то, очевидно, оно целиком входит в $\mathfrak{m}$.

Объединение $\sum_{(\ln N)^{1000} < q \leqslant \tau} F'_q$ (F'_q могут и перекрываться) мы обозначили в § 19 через G'. Положим

$$\mathfrak{m} - \sum_{(\ln N)^{1000} < q \leqslant \tau} F_q(\Lambda) = \mathfrak{m}', \tag{20. 2}$$

$$\sum_{(\ln N)^{1000} < q \leqslant \tau} F_q(\Lambda) = \mathfrak{m}(\Lambda). \tag{20. 3}$$

Тогда

$$\mathfrak{m} \cap \mathcal{E}_\eta(N) = \mathfrak{m}(\Lambda) \cap \mathcal{E}(N) + \mathfrak{m}' \cap \mathcal{E}_\eta(N). \tag{20. 4}$$

Наконец,

$$\mathfrak{m}' \cap \mathcal{E}_\eta(N) \subset F'(\mathcal{E}_{\tau_1}(N)).$$

По лемме VIII, множество $F'(\mathcal{E}_{\tau_1}(N))$ состоит не более чем из $N^{\tau_{13}}$ сегментов, каждый протяжением не более $N^{\tau_{12}}/N$.

Обращаясь теперь к интегралу (2. 6)

$$J_1(N) = \int\limits_{\mathfrak{m}} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta,$$

где k считаем любым фиксированным числом, $k \geqslant 3$, мы будем сначала вычислять часть его

$$J_1(N, \mathfrak{m} \cap \mathcal{E}_\eta(N)) = \int\limits_{\mathfrak{m} \cap \mathcal{E}_{\tau_1}(N)} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta. \tag{20. 5}$$

Согласно разбиению (20. 4),

$$J_1(N, \mathfrak{m} \cap \mathcal{E}_\eta(N)) = J_1(N, \mathfrak{m}(\Lambda) \cap \mathcal{E}_{\tau_1}(N)) + J_1(N, \mathfrak{m}' \cap \mathcal{E}_\eta(N)). \tag{20. 6}$$

В силу (20. 5) получаем:

$$|J_1(N, \mathfrak{m}' \cap \mathcal{E}_\eta(N))| = \left| \int\limits_{\mathfrak{m}' \cap \mathcal{E}_{\tau_1}(N)} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{F'(\mathcal{E}_{\tau_1}(N))} |S(\vartheta)|^2 \, |T(\vartheta)|^k \, d\vartheta. \tag{20. 7}$$

Заменяя здесь $|T(\vartheta)|$ максимальным его значением $T(0)$, найдем:

$$|J_1(N, \mathfrak{m}' \cap \mathcal{E}_\eta(N))| \leqslant T^k(0) \int\limits_{F'(\mathcal{E}_{\tau_1}(N))} |S(\vartheta)|^2 \, d\vartheta. \tag{20. 8}$$

Далее, имеем:

$$\int\limits_{F'(\mathcal{E}_{\tau_1}(N))} |S(\vartheta)|^2 \, d\vartheta = \sum_{F'_q \in F'(\mathcal{E}_{\tau_1}(N))} \int\limits_{F'_q \cap \mathcal{E}_{\tau_1}(N)} |S(\vartheta)|^2 \, d\vartheta, \tag{20. 9}$$

где сумма берется по всем q, для которых F'_q входят в $F'(\mathcal{E}_{\tau_1}(N))$.

§ **21.** Нам нужно доказать следующую лемму.

Лемма IX. *Для каждого из указанных* q

$$\int\limits_{F'_q \cap \mathscr{E}_{\tau_1}(N)} |S(\vartheta)|^2 d\vartheta = B\frac{N}{\tau^{0.84}}. \tag{21.1}$$

Доказательство. Пусть Δ — какой-либо сегмент, целиком лежащий в каком-либо из сегментов F'_q и состоящий из точек

$$\left[\frac{a_1}{q}+\delta_1,\ \frac{a_1}{q}+\delta_2\right],\ (a,\ q)=1.$$

По конструкции F'_q очевидно, что δ_1 и δ_2 либо оба положительны, либо оба отрицательны.

Мы оценим сначала

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}\left|S\left(\frac{a_1}{q}+\alpha\right)\right|^2 d\alpha = I_q(\Delta). \tag{21.2}$$

Ввиду очевидного равенства

$$\left|S\left(\frac{a_1}{q}+\alpha\right)\right| = \left|S\left(1-\frac{a_1}{q}-\alpha\right)\right| = \left|S\left(\frac{q-a_1}{q}-\alpha\right)\right|$$

интеграл (21.2) будет равен

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}\left|S\left(\frac{q-a_1}{q}-\alpha\right)\right|^2 d\alpha = \int\limits_{-\delta_2}^{-\delta_1}\left|S\left(\frac{q-a_1}{q}+\alpha\right)\right|^2 d\alpha.$$

Следовательно, можно считать, не нарушая общности, что δ_1 и δ_2 в (21.2) положительны.

Полагая

$$J_q(\Delta) = \sum_{(a,q)=1}\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}\left|S\left(\frac{a}{q}+\alpha\right)\right|^2 d\alpha, \tag{21.3}$$

найдем

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}\left|S\left(\frac{a_1}{q}+\alpha\right)\right|^2 d\alpha \leqslant J_q(\Delta) \tag{21.4}$$

и займемся оценкой $J_q(\Delta)$. Соответственно (3.2) получим:

$$J_q(\Delta) = \frac{1}{\varphi^2(q)}\sum_{(a,q)=1}\sum_{\chi,\chi_1}\chi(a)\bar{\chi}_1(a)\bar{\tau}_\chi\tau_{\chi_1}\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}A_\chi(\alpha)\bar{A}_{\chi_1}(\alpha)\,d\alpha + BN^{0.6}. \tag{21.5}$$

Учитывая, что для χ_0 $|\tau_{\chi_0}|\leqslant 1$, а для неглавных χ $|\tau_\chi|\leqslant\sqrt{q}$, найдем:

$$J_q(\Delta) \leqslant \frac{1}{\varphi(q)}\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}|A_{\chi_0}(\alpha)|^2 d\alpha + \frac{q}{\varphi(q)}\sum_{\chi}{}'\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2}|A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha + BN^{0.6}. \tag{21.6}$$

Оценим теперь интеграл $\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha$ для неглавных χ. Согласно (5.3), каждый такой интеграл не превосходит

$$\ln^4 N \sum_\nu \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2 d\alpha + B\delta \ln^6 N,$$

где $\delta = \delta_2 - \delta_1$. Будем считать, что

$$\delta < \frac{N^{\eta_3}}{N}. \tag{21.7}$$

Заметим, что, по конструкции F'_q,

$$\delta_1 \geqslant \Lambda = \frac{N^{\eta_1}}{N}. \tag{21.8}$$

Ввиду этого, согласно оценкам (9.1) — (9.3), (5.3) дает оценку

$$\ln^4 N \cdot B \frac{N}{q\tau^{0.89}},$$

так что

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha = B \frac{N \ln^4 N}{q\tau^{0.89}}. \tag{21.9}$$

Подставляя (21.9) в (21.6), получим:

$$J_q(\Delta) = \frac{B}{\varphi(q)} \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2 d\alpha + B \frac{N \ln^4 N}{\tau^{0.89}}. \tag{21.10}$$

Пользуясь (21.10), мы можем перейти и к оценке

$$\int\limits_{F'_q \cap \mathcal{E}_\eta(N)} |S(\vartheta)|^2 d\vartheta. \tag{21.11}$$

Рассмотрим какой-либо сегмент Δ_n пересечения; пусть это будет сегмент

$$\left[\frac{a_1}{q} + \delta_1^{(n)}, \ \frac{a_1}{q} + \delta_2^{(n)}\right].$$

Таких сегментов будет не более N^{η_3}, $n \leqslant N^{\eta_3}$. Каждому такому сегменту сопоставим конгруэнтный сегмент

$$\left[\frac{1}{q} + \delta_1^{(n)}, \ \frac{1}{q} + \delta_2^{(n)}\right].$$

Тогда в паре сегментов

$$\left[\frac{1}{q}-\frac{2}{q\tau},\ \frac{1}{q}-\Lambda\right] \text{ и } \left[\frac{1}{q}+\Lambda,\ \frac{1}{q}+\frac{2}{q\tau}\right]$$

образуется новое множество D из наших сегментов, конгруэнтных Δ_n. Они могут налегать друг на друга, но мы не будем считать их кратностей и налегающие сегменты будем объединять в один сегмент.

Новое множество D будет состоять из $R \leqslant N^{\eta_3}$ дизъюнктных сегментов, каждый длины не более $N^{\eta_3}(N^{\eta_3}/N)=N^{2\eta_3}/N$. Каждый сегмент длины, большей N^{η_3}/N, будем разделять на сегменты длины N^{η_3}/N и остаток, тогда получим не более $N^{2\eta_3}$ сегментов длины не более N^{η_3}/N, которые могут иметь общими лишь концы. Полученное множество D переносим к точкам a/q, $(a, q)=1$, создавая там конгруэнтные множества. Обозначим полученное таким образом множество через $F_q'(D)$. Очевидно, что

$$F_q' \cap \mathscr{E}_\eta(N) \subset F_q'(D). \tag{21.12}$$

Для каждого сегмента $\Delta^{(n)}$ из D и конгруэнтных ему сегментов имеем, согласно (21.10):

$$J_q(\Delta^{(n)}) = \frac{B}{\varphi(q)} \int\limits_{\delta_{1n}}^{\delta_{2n}} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2\, d\alpha + B\,\frac{N \ln^4 N}{\tau^{0.89}}, \tag{21.13}$$

где δ_{1n}, δ_{2n} — числа, аналогичные δ_1, δ_2.

Мы применяем теперь приведенную ниже лемму XI (см. (23.4)), согласно которой, если учесть число сегментов $[\delta_{1n}, \delta_{2n}]$, найдем:

$$\sum_n \int\limits_{\delta_{1n}}^{\delta_{2n}} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2\, d\alpha = BN^{2\eta_3}\frac{N}{\tau^{0.88}} = B\,\frac{N}{\tau^{0.86}}. \tag{21.14}$$

Теперь имеем, используя (21.12)—(21.14) и обозначая через R число сегментов $\Delta^{(n)}$:

$$\int\limits_{F_q' \cap \mathscr{E}_\eta(N)} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta \leqslant \int\limits_{F_q'(D)} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta = \sum_n J_q(\Delta^{(n)}) =$$

$$= B\cdot R\cdot\left(\frac{N}{\tau^{0.86}} + \frac{N \ln^4 N}{\tau^{0.89}}\right).$$

Но, как мы видели выше, $R \leqslant N^{2\eta_3}$ и

$$\frac{R}{\tau^{0.86}} \leqslant \frac{N^{0.02\eta_2}}{N^{0.86\eta_2}} = \frac{1}{\tau^{0.84}}.$$

Отсюда заключаем наконец:

$$\int\limits_{F_q' \cap \mathscr{E}_\eta(N)} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta = B\,\frac{N}{\tau^{0.84}}, \tag{21.15}$$

что и доказывает (21.1).

§ **22.** Обратимся теперь к системе множеств $F(\mathcal{E}_\eta(N))$ и $F'(\mathcal{E}_\eta(N))$, покрывающих $\mathcal{E}_\eta(N)$ и изучавшихся в § 19.

Мы имели, согласно (20.5):

$$\mathfrak{m}' \cap \mathcal{E}_\eta(N) \subset F'(\mathcal{E}_\eta(N)).$$

При помощи лемм VIII и IX докажем лемму X.

Лемма X.

$$\int\limits_{\mathfrak{m}' \cap \mathcal{E}_\eta(N)} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta = B\, \frac{N}{\tau^{0.83}}. \tag{22.1}$$

Доказательство. Прежде всего имеем:

$$\int\limits_{\mathfrak{m}' \cap \mathcal{E}_\eta(N)} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta \leqslant \int\limits_{F'(\mathcal{E}_\eta(N))} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta. \tag{22.2}$$

Далее,

$$\int\limits_{F'(\mathcal{E}_\eta(N))} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta = \sum_{F'_q \in F'(\mathcal{E}_\eta(N))} \int\limits_{F'_q \cap \mathcal{E}_\eta(N)} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta. \tag{22.3}$$

Согласно лемме VIII, количество множеств $F'_q \subset F'(\mathcal{E}_\eta(N))$ не превосходит N^{η_3}. Далее, $(\ln N)^{1000} < q \leqslant \tau$. Поэтому (22.3) дает при использовании (21.1)

$$\int\limits_{F'(\mathcal{E}_\eta(N))} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta = B\, \frac{N}{\tau^{0.84}}\, N^{\eta_3} = B\, \frac{N}{\tau^{0.83}}, \tag{22.4}$$

что ввиду (22.2) доказывает лемму X.

§ **23.** Обратимся теперь к множеству $\mathfrak{M}$, состоящему из непересекающихся систем F_q с $q \leqslant (\ln N)^{1000}$. Выделим из него системы $F_q(\Lambda)$ и обозначим аналогично (20.3):

$$\sum_{q \leqslant (\ln N)^{1000}} F_q(\Lambda) = \mathfrak{M}(\Lambda), \tag{23.1}$$

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{M}(\Lambda) = \mathfrak{M}'. \tag{23.2}$$

Нас будет интересовать интеграл

$$\int\limits_{\mathfrak{M}' \cap \mathcal{E}_\eta(N)} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta. \tag{23.3}$$

Чтобы получить для него оценки сверху, нам надо будет оценить интеграл $\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2\, d\alpha$, где $\delta_1 \geqslant N^{\eta_4}/N$, $\delta_2 - \delta_1 = \delta \leqslant N^{\eta_3}/N$.

Лемма XI. *В указанных условиях имеем*:

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2\, d\alpha = B\, \frac{N}{\tau^{0.88}}. \tag{23.4}$$

Доказательство. Имеем, как и в соотношении (5.1),

$$A_{\chi_0}(\alpha)=x^{-1}-\sum_{\rho}x^{-\rho}\Gamma(\rho)+O(\ln^3 N)=\frac{1}{x}-A(\alpha)+B\ln^3 N, \qquad (23.5)$$

где

$$A(\alpha)=\sum_{\rho}x^{-\rho}\Gamma(\rho). \qquad (23.6)$$

Сумма (23.6) ведет себя так же, как и аналогичная сумма (5.1) для неглавного характера, имея даже лучшие оценки для соответствующих количеств нулей ($q=1$). В силу этого будет действовать лемма I, и мы получим, согласно этой лемме и оценке (5.3):

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2}|A(\alpha)|^2\,d\alpha=B\frac{N}{\tau^{0.89}}\ln^4 N=B\frac{N}{\tau^{0.88}}. \qquad (23.7)$$

Далее, имеем:

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{d\alpha}{|x|^2}\leqslant\int_{\delta_1}^{\infty}\frac{d\alpha}{\alpha^2}=\delta_1^{-1}\leqslant\frac{N}{N^{\eta_4}}. \qquad (23.8)$$

Отсюда легко найдем

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2}|A_{\chi_0}(\alpha)|^2\,d\alpha\leqslant 3\int_{\delta_1}^{\delta_2}\left\{\frac{1}{|x|^2}+|A(\alpha)|^2+B\ln^6 N\right\}d\alpha=B\frac{N}{\tau^{0.88}}, \qquad (23.9)$$

что и доказывает лемму XI.

§ 24. Для оценки интеграла

$$\int_{\mathfrak{M}'\cap\mathcal{E}_\eta(N)}|S(\vartheta)|^2\,d\vartheta$$

мы можем действовать совершенно так же, как действовали в § 21 и 22 при оценке

$$\int_{\mathfrak{m}'\cap\mathcal{E}_\eta(N)}|S(\vartheta)|^2\,d\vartheta.$$

Мы применим лемму XI, согласно которой

$$\int_{\delta_{1n}}^{\delta_{2n}}|A_{\chi_0}(\alpha)|^2\,d\alpha=B\frac{N}{\tau^{0.88}}, \qquad (24.1)$$

и оценку для числа сегментов $n\leqslant N^{2\eta_3}=N^{0.02\eta_2}$, откуда получим:

$$\sum_n\int_{\delta_{1n}}^{\delta_{2n}}|A_{\chi_0}(\alpha)|^2\,d\alpha=B\frac{N}{\tau^{0.88}}\tau^{0.02}=B\frac{N}{\tau^{0.86}}. \qquad (24.2)$$

Далее, рассуждая так же, как в § 22, выведем следующую оценку:

$$\int\limits_{\mathfrak{M}'\cap\mathcal{E}_\eta(N)} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta = B\frac{N}{\tau^{1/2}}. \tag{24.3}$$

§ 25. Дальнейшим важным пунктом явилась бы оценка интеграла

$$\int\limits_{\mathfrak{m}(\Lambda)\cap\mathcal{E}_\eta(N)} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta, \tag{25.1}$$

где

$$\mathfrak{m}(\Lambda) = \sum_{(\ln N)^{1000} < q \leqslant \tau} F_q(\Lambda). \tag{25.2}$$

Непосредственно ее получить не удается, и приходится избирать обходной путь.

Разобьем участок $[(\ln N)^{1000}, \tau]$ на $B \ln N$ участков $[\tau/2^r, \tau/2^{r-1}]$ (последний может быть короче). Пусть $[Q, 2Q]$ — один из таких участков; тогда обозначим:

$$\sum_{Q<q\leqslant 2Q} F_q(\Lambda) = G_Q(\Lambda). \tag{25.3}$$

Рассмотрим для какого-либо $F_q(\Lambda) \subset G_Q(\Lambda)$

$$\int\limits_{F_q(\Lambda)} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta = J(N, F_q(\Lambda)). \tag{25.4}$$

Очевидно,

$$|J(N, F_q(\Lambda))| \leqslant \int\limits_{F_q(\Lambda)} |S(\vartheta)\, T(\vartheta)|^2\, |T(\vartheta)|^{k-2}\, d\vartheta. \tag{25.5}$$

Займемся, далее, суммой

$$T(\vartheta) = \sum_{m\leqslant \lg_2 N} e^{-2^m/N} e^{-2\pi i\vartheta\cdot 2^m}. \tag{25.6}$$

Введем обозначение $L = [\lg_2 N]$. Ввиду того что $Q < \tau = N^{\eta_2}$ и $\eta_2 < 10^{-6}$, имеем:

$$\frac{L}{\lg_2 Q} > \frac{0.9}{\eta_2} > 9\cdot 10^5.$$

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма XII. *Если Q таково, что*

$$\lg_2 Q \geqslant L^{2/3}, \tag{25.7}$$

то можно выбрать такое целое число l_Q, которое будет удовлетворять условиям:

$$\text{(A)}\quad 3\lg_2 Q \leqslant l_Q \leqslant 12 \lg_2 Q \tag{25.8}$$

и

$$\text{(B)} \quad \left\{\frac{L}{l_Q}\right\} \geqslant 1-\frac{B}{\sqrt{l_Q}}, \quad \textit{где } \{\ \} - \textit{знак дробной части.}$$

При этом предполагается, как обычно, что число N достаточно велико.

Доказательство. Рассмотрим целые числа l в сегменте $[3\lg_2 Q,\ 12\lg_2 Q]$. Положим $l'=6\lg_2 Q$. Тогда

$$v=\left[\frac{L}{l'}\right]=BL^{1/3}=B\sqrt{\lg_2 Q}$$

в силу (25.7).

Рассмотрим числа lv, где l — числа из сегмента (25.8). Очевидно,

$$v\cdot l_{\max}>\frac{3}{2}L, \quad v\cdot l_{\min}<\frac{2}{3}L.$$

Поэтому в сегменте (25.8) найдем целое l, для которого $0<vl-L<v$ или $1>L/l-(v-1)>1-v/l$. Это означает, что

$$\left\{\frac{L}{l}\right\}>1-\frac{v}{l}=1-\frac{B}{\sqrt{\lg_2 Q}}=1-\frac{B}{\sqrt{l}}.$$

Полагая $l_Q=l$, придем к доказательству леммы XII.

§ 26. Каждому Q, для которого выполняется условие (25.7), сопоставим именно такое l_Q, которое находится в лемме XII. Если же Q не удовлетворяет условию (25.7), т. е. $\lg_2 Q<L^{2/3}$, то в качестве l_Q условимся назначать число $[3\lg_2 Q+1]$.

Обращаясь к сумме $T(\vartheta)$, разобьем ее на частные последовательные суммы $T_j(\vartheta)$ по l_Q членов ($j=1, 2, \ldots, \nu$); $T_\nu(\vartheta)$ может быть короче остальных, но ненамного, если выполнено условие (25.7). Имеем:

$$\nu=\left[\frac{L}{l_Q}\right]+1,$$

если выполнено условие (25.7), и

$$\nu=\left[\frac{L}{l_Q}\right]+1 \ \text{или} \ \left[\frac{L}{l_Q}\right],$$

если не выполнено условие (25.7).

Получим

$$T(\vartheta)=\sum_{j=1}^{\nu} T_j(\vartheta),$$

откуда, по известному неравенству,

$$|T(\vartheta)|^{k-2}\leqslant \nu^{k-2-1}\sum_{j=1}^{\nu}|T_j(\vartheta)|^{k-2}. \tag{26.1}$$

Имеем:

$$T_j(\vartheta) = \sum_{m=1}^{l_Q} e^{-2^{A_j+m}/N} e^{-2\pi i\vartheta \cdot 2^{A_j+m}} \tag{26.2}$$

при $j \leqslant \nu - 1$, $A_j = (j-1)\,l_Q$.

Положим $\eta_1 = 3\eta_4$. Тогда при $j \leqslant (1-\eta_1)\nu$, $m \leqslant l_Q$

$$2^{A_j+m} \leqslant 2^{(\nu(1-\eta_1)+1)l_Q} \leqslant 2^{L(1-0.9\eta_1)} = B\frac{N}{N^{2.7\eta_4}}. \tag{26.3}$$

Эта оценка будет нам нужна в дальнейшем. Затем нам нужны будут оценки, вытекающие из (18.2):

$$\left.\begin{aligned} &T(0) = L + B,\quad T_j(0) = l_Q + B,\quad j \leqslant \nu - 1,\\ &T_\nu(0) = l_Q + B\sqrt{l_Q},\ \text{если выполнено условие (25.7)},\\ &T_\nu(0) \leqslant l_Q\ \text{всегда}. \end{aligned}\right\} \tag{26.4}$$

Рассмотрим теперь суммы $T_j(\vartheta)$ при $j \leqslant \nu(1-\eta_1)$ и отметим их критические множества $\mathcal{E}_j$ как множества точек ϑ, для которых

$$|T_j(\vartheta)| > (1-\eta)\,T(0). \tag{26.5}$$

Лемма XIII. *Если ни одно из указанных выше критических множеств $\mathcal{E}_j$ не пересекается с $F_q(\Lambda)$, то для $J(N, F_q(\Lambda))$ справедлива оценка*

$$|J(N, F_q(\Lambda))| \leqslant \int\limits_{F_q(\Lambda)} |S(\vartheta)\,T(\vartheta)|^2\,d\vartheta \cdot L^{k-2}\left(1 + \frac{B}{L^{1/3}}\right)^{k-2} \times$$
$$\times [(1-\eta)^{k-2} + \eta_1]. \tag{26.6}$$

Доказательство. Имеем:

$$|J(N, F_q(\Lambda))| \leqslant \int\limits_{F_q(\Lambda)} |S(\vartheta)\,T(\vartheta)|^2\,|T(\vartheta)|^{k-2}\,d\vartheta \leqslant$$
$$\leqslant \nu^{k-2-1}\sum_{j=1}^{\nu}\ \int\limits_{F_q(\Lambda)} |S(\vartheta)\,T(\vartheta)|^2\,|T_j(\vartheta)|^{k-2}\,d\vartheta \leqslant$$
$$\leqslant \nu^{k-2-1}\sum_{j\leqslant\nu(1-\eta_1)}\ \int\limits_{F_q(\Lambda)} |S(\vartheta)\,T(\vartheta)|^2\,|T_j(0)\,(1-\eta)|^{k-2}\,d\vartheta +$$
$$+ \nu^{k-2-1}\sum_{\nu(1-\eta_1)<j\leqslant\nu}\ \int\limits_{F_q(\Lambda)} |S(\vartheta)\,T(\vartheta)|^2\,d\vartheta \cdot (T_j(0))^{k-2} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{F_q(\Lambda)} |S(\vartheta)\,T(\vartheta)|^2\,d\vartheta\,[\nu\nu^{k-2-1}l_Q^{k-2}(1-\eta)^{k-2} + \eta_1\nu\nu^{k-2-1}l_Q^{k-2}] =$$
$$= \int\limits_{F_q(\Lambda)} |S(\vartheta)\,T(\vartheta)|^2\,d\vartheta \cdot (\nu l_Q)^{k-2}\,[(1-\eta)^{k-2} + \eta_1].$$

Если выполнено условие (25.7), т. е. $\lg_2 Q \geqslant L^{2/3}$, то, по выбору l_Q,

$$\nu l_Q = L + B\sqrt{l_Q} = L + B\sqrt{L} \text{ и } (\nu l_Q)^{k-2} = L^{k-2}\left(1 + \frac{B}{\sqrt{L}}\right)^{k-2}.$$

Если же (25.7) не выполнено и $\lg_2 Q < L^{2/3}$, то

$$\nu l_Q = L + Bl_Q = L + BL^{2/3} \text{ и } (\nu l_Q)^{k-2} = L^{k-2}\left(1 + \frac{B}{L^{1/3}}\right)^{k-2},$$

что и доказывает (26.6).

§ 27. Мы должны показать, что в множестве $G_Q(\Lambda)$ сравнительно мало таких $F_q(\Lambda)$, которые пересекаются хотя бы с одним из наших $\mathcal{E}_j$ при $j \leqslant \nu(1-\eta_1)$.

Лемма XIV. *Количество множеств* $F_q(\Lambda) \subset G_Q(\Lambda)$ (*т. е. таких, где* $Q < q \leqslant 2Q$), *которые пересекаются с суммой* $\mathcal{E}_j$, *т. е. с* $\sum\limits_{j \leqslant (1-\eta_1)\nu} \mathcal{E}_j$, *не превосходит*

$$BQ^{12\gamma_1(\eta)} \ln^2 N,$$

где

$$\gamma_1(\eta) = \frac{2}{\ln 2}\left(3\sqrt{\eta}\ \ln\frac{1}{\eta} + \frac{8\ln^2 2}{\ln(1/\eta)}\right).$$

Если $Q \geqslant (\ln N)^{1000}$ *и* η *было выбрано достаточно малым (что мы и будем предполагать), то оно не превосходит*

$$BQ^{0.1}. \tag{27.1}$$

Доказательство. Возьмем какое-либо из указанных выше

$$T_j(\vartheta) = \sum_{m=1}^{l_Q} e^{-2^{Aj+m}/N} e^{-2\pi i\vartheta \cdot 2^{Aj+m}}, \tag{27.2}$$

и рассмотрим его критическое множество $\mathcal{E}_j$, состоящее из точек ϑ, для которых

$$|T_j(\vartheta)| > (1-\eta)\, T_j(0).$$

Полагая $\beta = \{\vartheta \cdot 2^{Aj}\}$, видим, что каждому $\vartheta \in \mathcal{E}_j$ отвечает одно β, для которого

$$|V(\beta)| > (1-\eta)\, V(0), \tag{27.3}$$

где

$$V(\beta) = \sum_{m=1}^{l_Q} e^{-2^{Aj+m}/N} e^{-2\pi i\beta \cdot 2^m}.$$

Согласно лемме VI, п. II, если написать первые l_Q знаков двоичного разложения числа β, то среди них будет не больше $K_{10} N_Q^{\gamma_1}$ различных комбинаций знаков, где $N_Q = 2^{l_Q}$ и

$$\gamma_1 = \gamma_1(\eta) = \frac{2}{\ln 2}\left(3\sqrt{\eta}\ \ln\frac{1}{\eta} + \frac{8\ln^2 2}{\ln(1/\eta)}\right).$$

Введем теперь множества $F_q(\Lambda, 2^A j)$, под которыми будем понимать совокупности сегментов вида

$$\left[\frac{a}{q} - 2^A j\Lambda, \ \frac{a}{q} + 2^A j\Lambda\right], \quad (a, q) = 1. \tag{27.4}$$

Заметим, что ввиду соотношения (26.3)

$$2^A j = B \frac{N}{N^{2.7\eta_4}}$$

и определения $\Lambda = N^{\eta_4}/N$ имеем:

$$2^A j\Lambda = \frac{B}{N^{1.7\eta_4}}. \tag{27.5}$$

Возьмем теперь все числа β критического множества, определяемого условием (27.3). Рассматривая первые l_Q знаков их двоичного разложения, мы заметим, что число их комбинаций равно $BN_Q^{\gamma_1(\eta)}$. Мы можем поэтому разбить их на $BN_Q^{\gamma_1(\eta)}$ классов, где эти первые l_Q знаков будут совпадать. Если β_1 и β_2 — два числа одного класса, то, очевидно, будем иметь:

$$|\beta_1 - \beta_2| \leqslant \frac{1}{2^{l_Q}} \leqslant \frac{1}{2^{3\lg_2 Q}} = \frac{1}{Q^3}. \tag{27.6}$$

Отсюда следует, что числа одного класса не могут входить в различные множества $F_q(\Lambda, 2^A j)$ при $q = 1, 2, \ldots, 2Q$.

В самом деле, если бы мы имели

$$\beta_1 \in F_{q_1}(\Lambda, 2^A j), \quad \beta_2 \in F_{q_2}(\Lambda, 2^A j), \quad q_1, q_2 < 2Q,$$

то

$$|\beta_1 - \beta_2| > \frac{1}{q_1 q_2} - 2 \cdot 2^A j\Lambda = \frac{1}{q_1 q_2} - \frac{2}{N^{1.7\eta_4}} \geqslant \frac{1}{4Q^2} - \frac{2}{N^{1.7\eta_4}}.$$

Но $Q \leqslant \tau = N^{\eta_2}$, $\eta_4 = 500\eta_2$. Отсюда $|\beta_1 - \beta_2| \geqslant 1/8Q^2$, что противоречит (27.6). Этим доказано наше утверждение.

Таким образом, мы видим, что множество чисел β может пересекаться не более чем с $BN_Q^{\gamma_1(\eta)}$ множествами $F_q(\Lambda, 2^A j)$ ($q = 1, 2, \ldots, 2Q$).

Теперь рассмотрим числа ϑ основного критического множества $\mathscr{E}_j$. Пусть такое число ϑ входит в какое-либо множество $F_q(\Lambda)$. Пусть $q = 2^r q_1$, где q_1 нечетно. Имеем:

$$\vartheta = \frac{a}{q} + \theta\Lambda, \quad |\theta| \leqslant 1, \quad (a, q) = 1;$$

отсюда

$$2^{\Lambda j}\vartheta = \frac{2^{\Lambda j}}{2^r q_1} + \theta\Lambda \cdot 2^{\Lambda j},$$

$$\{2^{\Lambda j}\vartheta\} = \beta = \frac{2^{\Lambda j}}{2^r q_1} + m + \theta\Lambda \cdot 2^{\Lambda j},$$

где m — целое число. Это означает, что

$$\beta \in F_{q'}(\Lambda,\ 2^{\Lambda j}),$$

где $q' = 2^{r'} q_1$ с $r' \leqslant r$ (в частности, может быть $q' = 1$). Одному и тому же такому q' могут отвечать множества $F_q(\Lambda)$ с $q = q' 2^{r'}$, $2^{r'} \leqslant 2Q$.

Итак, всякому пересечению $\mathcal{E}_j$ с $F_q(\Lambda)$ отвечает пересечение множества точек β с $F_{q'}(\Lambda,\ 2^{\Lambda j})$, и притом одному и тому же q' могут отвечать не более $B \ln N$ множеств $F_q(\Lambda)$. Отсюда, согласно предыдущему, следует, что множество $\mathcal{E}_j$ может пересекаться не более чем с $BN_Q^{\gamma_1(\eta)} \ln N$ множествами $F_q(\Lambda)$.

Число всех множеств $\mathcal{E}_j$ не превосходит

$$(1 - \eta_1)\nu \leqslant L < \lg_2 N.$$

Поэтому не более $BN_Q^{\gamma_1(\eta)} \ln^2 N$ множеств $F_q(\Lambda)$ будут пересекаться с суммою множеств $\mathcal{E}_j$.

Далее,

$$N_Q = 2^{lQ} \leqslant 2^{12 \lg_2 Q} = Q^{12}.$$

Отсюда

$$BN_Q^{\gamma_1(\eta)} \ln^2 N = BQ^{12\gamma_1(\eta)} \cdot \ln^2 N.$$

При достаточно малом η и $Q > (\ln N)^{1000}$ это дает оценку $BQ^{0.1}$ и доказывает нашу лемму.

Обозначим, далее,

$$\mathcal{E} = \sum_{j \leqslant (1-\eta_1)\nu} \mathcal{E}_j,$$

$$I_{aq}(\Lambda) = \left[\frac{a}{q} - \Lambda;\ \frac{a}{q} + \Lambda\right],$$

так что

$$F_q(\Lambda) = \sum_{(a,q)=1} I_{aq}(\Lambda).$$

Будем считать по-прежнему, что $F_q(\Lambda) \subset G_Q(\Lambda)$. Докажем такое утверждение.

Дополнение к лемме XIV. *Пусть $F_q(\Lambda)$ пересекается с $\mathcal{E}$ и $q=2^{r'}q'$, где q' нечетно. Тогда число интервалов $I_{aq}(\Lambda)$, входящих в $F_q(\Lambda)$ и пересекающихся с $\mathcal{E}$, не превосходит*

$$B2^{r'}Q^{0.1}\ln N. \tag{27.7}$$

Доказательство. Пусть $\vartheta\in\mathcal{E}_j$ и $\vartheta\in I_{aq}(\Lambda)$. Введя, как и при доказательстве леммы XIV, числа $\beta=\{\vartheta\cdot 2^{Aj}\}$, замечаем, что β будет принадлежать сегменту

$$\left[\frac{2^{A}ja}{q}-2^{A}j\Lambda,\quad \frac{2^{A}ja}{q}+2^{A}j\Lambda\right],$$

который надлежит рассматривать по модулю 1.

Имеем $q=2^{r'}q'$. Разберем два случая: 1) $A_j\geqslant r'$, 2) $A_j<r'$. В случае 1)

$$\frac{2^{A}ja}{q}=\frac{2^{Aj-r'}a}{q'}.$$

Число различных сегментов вида $[a'/q'-2^{A}j\Lambda,\quad a'/q'+2^{A}j\Lambda]$, пересекающихся с множеством чисел β, будет на основании тех же рассуждений, что и в доказательстве леммы XIV, оцениваться числом

$$BQ^{0.1}. \tag{27.8}$$

Но принадлежность β к одному из таких сегментов может вызываться принадлежностью ϑ к одному из сегментов $[a/2^{r'}q'-\Lambda,$ $a/2^{r'}q'+\Lambda]$, причем легко заметить, что число таких новых сегментов, приходящихся на один старый, будет $B\cdot 2^{r'}$. Поэтому число сегментов $I_{aq}(\Lambda)$, пересекающихся с $\mathcal{E}_j$, равно

$$BQ^{0.1}2^{r'},$$

а число сегментов, пересекающихся с $\mathcal{E}$, равно

$$B\cdot 2^{r'}Q^{0.1}\ln N. \tag{27.9}$$

В случае 2) имеем

$$\frac{2^{A}ja}{q}=\frac{a}{2^{r'-A}jq},$$

и рассуждения, такие же, как и выше, показывают, что число интервалов, пересекающихся с $\mathcal{E}_j$, равно

$$B\cdot 2^{A}jQ^{0.1}=B\cdot 2^{r'}Q^{0.1},$$

а число, интервалов, пересекающихся с $\mathcal{E}$, равно

$$B\cdot 2^{r'}Q^{0.1}\ln N, \tag{27.10}$$

что и доказывает утверждение.

§ 28. Лемма XV.

$$\sum_{(\ln N)^{1000}<q\leqslant\tau} J(N,\ F_q(\Lambda)) = \sum_{(\ln N)^{1000}<q\leqslant\tau}\ \int\limits_{F_q(\Lambda)} S^2(\vartheta)\,T^k(\vartheta)\,e^{2\pi iN\vartheta}d\vartheta =$$
$$= BN\left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k[(1-\eta)^{k-2}+3\eta_4]. \tag{28.1}$$

Доказательство. Обозначим $\mathcal{E}=\sum\limits_{1\leqslant(1-\eta_1)\nu}\mathcal{E}_j$. Рассмотрим совокупность $F_q(\Lambda)$, входящих в $G_Q(\Lambda)$. Для тех из них, которые не пересекаются с $\mathcal{E}$, мы имеем, согласно лемме XIII,

$$|J(N,\ F_q(\Lambda))| \leqslant \int\limits_{F_q(\Lambda)} |S(\vartheta)\,T(\vartheta)|^2\,d\vartheta\cdot L^{k-2}\left(1+\frac{B}{L^{1/3}}\right)^{k-2}[(1-\eta)^{k-2}+\eta_1].$$

Ввиду дизъюнктности множеств $F_q(\Lambda)$ сумма интегралов

$$\int\limits_{F_q(\Lambda)} |S(\vartheta)\,T(\vartheta)|^2\,d\vartheta \quad \text{равна} \quad \int\limits_{G_Q(\Lambda)} |S(\vartheta)\,T(\vartheta)|^2\,d\vartheta.$$

Далее, $(1+B/L^{1/3})^{k-2}=1+o(1)=B$ при всяком фиксированном k и $N\to\infty$. Поэтому сумма $I(N,F_q(\Lambda))$ по всем множествам указанного типа дает оценку

$$B\int\limits_{G_Q(\Lambda)} |S(\vartheta)\,T(\vartheta)|^2\,d\vartheta\cdot\left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{k-2}[(1-\eta)^{k-2}+\eta_1]. \tag{28.2}$$

Теперь рассмотрим множества $F_q(\Lambda)\in G_Q(\Lambda)$, которые пересекаются с $\mathcal{E}$. Их количество

$$R=BQ^{0.1}, \tag{28.3}$$

по лемме XIV. Перенумеруем их:

$$F_{q_1}(\Lambda),\ F_{q_2}(\Lambda),\ \ldots,\ F_{q_R}(\Lambda) \quad (Q<q_i\leqslant 2Q;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ R). \tag{28.4}$$

Имеем для какого-либо из этих множеств $F_{q_j}(\Lambda)$:

$$J(N,\ F_{q_j}(\Lambda)) = \int\limits_{F_{q_j}(\Lambda)} S^2(\vartheta)\,T^k(\vartheta)\,e^{2\pi i\vartheta N}d\vartheta =$$
$$=\sum_{N_1} r_{N_1}\int\limits_{F_{q_j}(\Lambda)} S^2(\vartheta)\,e^{2\pi i\vartheta N_1}d\vartheta, \tag{28.5}$$

где суммирование проводится по числам

$$N_1=N-2^{x_1}-\ldots-2^{x_k},\quad 0\leqslant x_i\leqslant \lg_2 N,\quad r_{N_1}=e^{-(2^{x_1}+\ldots+2^{x_k})/N}<1.$$

Таким образом, число слагаемых N_1 равно L^k, где $L=[\lg_2 N]$.

Теперь возьмем отдельно

$$\int\limits_{F_{q_j}(\Lambda)} S^2(\vartheta)\, e^{2\pi i\vartheta N_1} d\vartheta = I_1(N_1, q_j). \tag{28.6}$$

Используя (3.2), (13.1) (лемма III) и (16.1) (лемма IV), находим:

$$I_1(N_1, q_j) = \frac{\mu^2(q_j)}{\varphi^2(q_j)} \sum_{(a, q_j)=1} e^{2\pi i N_1 a/q_j} \int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} \{A_{\chi_0}(\alpha)\}^2\, d\alpha + B\,\frac{N \ln^{40} N}{g_j^{0.15}}$$

при $(q_j, N_1) \leqslant q_j^{0.66}$.

Применяя далее тривиальные оценки

$$\left|\sum e^{2\pi i N_1 a/q}\right| \leqslant \varphi(q),$$

$$\left|\int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} \{A_{\chi_0}(\alpha)\}^2\, d\alpha\right| \leqslant \int\limits_{-1/2}^{1/2} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2\, d\alpha = BN \ln^2 N,$$

$$\varphi(q_j) > c_\varepsilon q_j^{1-\varepsilon},$$

получим:

$$I_1(N_1, q_j) = B\,\frac{N \ln^{40} N}{q_j^{0.15}}. \tag{28.7}$$

Но $q_j \geqslant Q$, поэтому

$$I_1(N_1, q_j) = B\,\frac{N \ln^{40} N}{Q^{0.15}} \quad \text{при} \quad (q_j, N_1) \leqslant q_j^{0.66}. \tag{28.8}$$

Теперь обратимся к числам N_1 с $(q_j, N_1) \geqslant q_j^{0.66}$. Сначала разберем случай, когда $q = 2^{r'} q'$, где

$$2^{r'} \leqslant q_j^{0.5}. \tag{28.9}$$

Если $I_{aq_j}(\Lambda)$ — любой интервал $F_{q_j}(\Lambda)$, то на основании дополнения к лемме III (см. (15.15)) получим для любого N_1:

$$|I_1(N_1, I_{aq_j}(\Lambda))| = B\,\frac{N \ln^{40} N}{Q^{0.99}}. \tag{28.10}$$

Число сегментов $I_{aq_j}(\Lambda)$, пересекающихся с $\mathcal{E}$, будет

$$B \cdot 2^{r'} Q^{0.1} \ln N = BQ^{0.1} Q^{0.5}, \tag{28.11}$$

согласно (27.7) и (28.9). Ввиду этого сумма выражений вида (28.10) по таким сегментам будет иметь оценку

$$\frac{BN \ln^{150} N}{Q^{0.3}}. \tag{28.12}$$

По остальным же сегментам, не пересекающимся с $\mathcal{E}$, имеем, как и в (26.6),

$$|J(N, I_{aq_j}(\Lambda))| =$$

$$= B \int\limits_{I_{aq_j}(\Lambda)} |S(\vartheta) T(\vartheta)|^2\, d\vartheta \cdot \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{k-2} [(1-\eta)^{k-2} + \eta_1]. \tag{28.13}$$

Суммируя (28.12) по всем N_1 и собирая $I_{aq_j}(\Lambda)$ по a, находим из (28.12) и (28.13):

$$|J(N, F_{q_j}(\Lambda))| = B\int\limits_{F_{q_j}(\Lambda)} |S(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta\cdot\left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{k-2}[(1-\eta)^{k-2}+\eta_1] +$$
$$+B\left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k \frac{N\ln^{150}N}{Q^{0.3}}. \qquad (28.14)$$

Теперь пусть

$$q_j = 2^{r'}q', \quad 2^{r'} > q_j^{0.5} > (\ln N)^{500}. \qquad (28.15)$$

Так как $(q_j, N_1) > q_j^{0.66}$, то $(N_1, 2^{r'}) > q_j^{0.15} > (\ln N)^{150}$. Имеем $N_1 = N - 2^{x_1} - 2^{x_2} - \ldots - 2^{x_k}$, далее, $N \not\equiv 0 \pmod{2^{r'}}$, ибо

$$2^{r'} > (\ln N)^{100}.$$

Пусть r_0 — такое число, что $2^{r_0} > (\ln N)^{100}$, $2^{r_0-1} \leqslant (\ln N)^{100}$, так что $2^{r_0} < 2(\ln N)^{100}$ и $r_0 < r'$. Можно утверждать, что хотя бы для одного из слагаемых $2^{x_1}, 2^{x_2}, \ldots, 2^{x_k}$

$$2^{x_j} < 2^{r_0}.$$

Будь это не так, мы имели бы $N_1 \equiv N \pmod{2^{r_0}}$, но $(N_1, 2^{r'}) > (\ln N)^{150}$ и, значит, $N \equiv 0 \pmod{2^{r_0}}$, а $N \not\equiv 0 \pmod{2^{r_0}}$, ибо $2^{r_0} > (\ln N)^{100}$. Это противоречие и доказывает наш результат.

Мы можем теперь утверждать, что совокупность чисел N_1 с $(q_j, N_1) > q_j^{0.66}$, $2^{r'} > q_j^{0.55}$ входит в более широкую совокупность чисел $\mathfrak{N}$, определяемых условием $N_1 = N - 2^{x_1} - \ldots - 2^{x_k}$, и хотя бы для одного слагаемого 2^{x_j} имеем $2^{x_j} \leqslant 2^{r_0} < 2(\ln N)^{100}$. Полагая

$$U(\vartheta) = \sum_{2^m \leqslant 2^{r_0}} e^{-2^m/N} e^{-2\pi i\vartheta\cdot 2^m},$$

найдем:

$$\sum_{N_1\in\mathfrak{N}} I_1(N_1, F_{q_j}(\Lambda)) = \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} C_k^m \int S^2(\vartheta)\, T^{k-m}(\vartheta)\, U^m(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta.$$

Ввиду того что $|U(\vartheta)| = B\ln\ln N$, легко выводим:

$$\left|\sum_{N_1\in\mathfrak{N}} I_1(N, F_{q_j}(\Lambda))\right| =$$
$$= B\cdot 2^k \frac{\ln\ln N}{\ln N}\left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{k-2} \int\limits_{F_{q_j}(\Lambda)} |S(\vartheta)T(\vartheta)|^2 d\vartheta. \qquad (28.16)$$

Далее, при $N_1 \bar{\in} \mathfrak{N}$ верна оценка (28.8) или (28.12). Отсюда

$$\left|\sum_{N_1\bar{\in}\mathfrak{N}} I_1(N, F_{q_j}(\Lambda))\right| = B\frac{N\ln^{40}N}{Q^{0.15}}\left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k,$$

и мы получаем в дополнение к (28.14) оценку

$$| J(N, F_{q_j}(\Lambda)) | = B \frac{2^k \ln \ln N}{\ln N} \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{k-2} \times$$

$$\times \int\limits_{F_{q_j}(\Lambda)} | S(\vartheta) T(\vartheta) |^2 d\vartheta + B \frac{N \ln^{40} N}{Q^{0.15}} \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k. \qquad (28.17)$$

Суммируя (28.14) и (28.17) по $j = 1, 2, \ldots, R$, получаем, согласно (28.3), при данном k и большом N:

$$\sum_{j \leqslant R} | J(N, F_{q_j}(\Lambda)) | = B \sum_{j \leqslant R} \int\limits_{F_{q_j}(\Lambda)} | S(\vartheta) T(\vartheta) |^2 d\vartheta \times$$

$$\times \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{k-2} [(1-\eta)^{k-2} + \eta_1] + B \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k \frac{N \ln^{40} N}{Q^{0.05}}. \qquad (28.18)$$

Поэтому имеем, объединяя оценки (28.9) и (28.18):

$$\sum_{F_q(\Lambda) \in G_Q(\Lambda)} J(N, F_q(\Lambda)) = B \int\limits_{G_Q(\Lambda)} | S(\vartheta) T(\vartheta) |^2 d\vartheta \times$$

$$\times \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{k-2} [(1-\eta)^{k-2} + \eta_1] + B \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k \frac{N \ln^{40} N}{Q^{0.05}}. \qquad (28.19)$$

Остается собрать эти оценки по $G_Q(\Lambda)$, чтобы получить (28.1).

Заметим, что Q пробегает значения $\tau/2^r$ в количестве $B \ln N$ и наименьшее из значений Q есть $(\ln N)^{1000}$. Поэтому суммирование по $G_Q(\Lambda)$ оценки

$$B \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k \frac{N \ln^{40} N}{Q^{0.05}}$$

дает

$$B \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k \frac{N \ln^{40} N}{\ln^{50} N} \ln N = B \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k \frac{N}{\ln^9 N}. \qquad (28.20)$$

Далее, так как $G_Q(\Lambda)$ не пересекаются при разных Q, то сумма интегралов

$$\int\limits_{G_Q(\Lambda)} | S(\vartheta) T(\vartheta) |^2 d\vartheta$$

не превосходит

$$\int\limits_0^1 | S(\vartheta) T(\vartheta) |^2 d\vartheta \leqslant C_1 N \ln^2 N, \qquad (28.21)$$

по лемме V.

Соотношения (28.19) и (28.20) приводят к (28.1). Здесь k надо брать фиксированным, $N > N_0(k)$.

§ 29. Нам нужно теперь рассчитать интеграл

$$\int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i\vartheta N}\, d\vartheta =$$

$$= \sum_{q\leqslant(\ln N)^{1000}} \int\limits_{F_q(\Lambda)} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i\vartheta N} d\vartheta = \sum_{q\leqslant(\ln N)^{1000}} J(N,\ F_q(\Lambda)). \quad (29.1)$$

Далее, имеем, как в (28.5),

$$J(N,\ F_q(\Lambda)) = \sum_{N_1} r_{N_1} \int\limits_{F_q(\Lambda)} S^2(\vartheta)\, e^{2\pi i\vartheta N_1} d\vartheta, \quad (29.2)$$

где $N_1 = N - 2^{x_1} - \ldots - 2^{x_k}$, $r_{N_1} = e^{-(2^{x_1}+\ldots+2^{x_k})/N} < 1$. Мы снова обозначим

$$I(N_1,\ q_j) = \int\limits_{F_{q_j}(\Lambda)} S^2(\vartheta)\, e^{2\pi i\vartheta N_1} d\vartheta. \quad (29.3)$$

Такое обозначение будет отвечать обозначению $I_q(N_1)$ § 3 при $\delta_1 = -\Lambda$ и $\delta_2 = \Lambda$.

Мы получим, как в § 3 и 4,

$$I(N_1,\ q) = I_q(N_1) = I_q^{(0)}(N_1) + I_q^{(1)}(N_1) + I_q^{(2)}(N_1).$$

Займемся оценками сверху для $I_q^{(1)}(N_1)$ и $I_q^{(2)}(N_1)$ и затем вычислением $I_q^{(0)}(N_1)$.

Согласно (4.1),

$$|I_q^{(2)}(N_1)| \leqslant \frac{q}{\varphi(q)} \sum_\chi{}' \int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} |A_\chi(\alpha)|^2\, d\alpha \leqslant 2\frac{q}{\varphi(q)} \sum_\chi{}' \int\limits_0^{\Lambda} |A_\chi(\alpha)|^2\, d\alpha. \quad (29.4)$$

Далее, согласно (5.3),

$$|I| \leqslant \ln^4 N \sum_\nu \int\limits_0^{\Lambda} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\, d\alpha + B\Lambda \ln^6 N. \quad (29.5)$$

Согласно лемме I (см. (9.1) и (9.2)), имеем следующую оценку: при $\nu \leqslant 1/2 - 10^{-4}$

$$\int\limits_0^{\Lambda} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\, d\alpha = B\frac{N}{\tau^{0.89}}, \quad (29.6)$$

так что существенны лишь $\nu > 1/2 - 10^{-4}$. Мы займемся ими.

Имеем прежде всего, согласно (5.11),

$$\int\limits_0^{4/N} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\, d\alpha = BN^{2\nu} \ln^2 N. \quad (29.7)$$

А для сегмента $[\Lambda/2^r,\ \Lambda/2^{r-1}]$, где $\Lambda/2^{r-1} > 4/N$, находим, согласно § 14 (см. (14.2)),

$$\int\limits_{\Lambda/2^r}^{\Lambda/2^{r-1}} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha =$$

$$= BN^{2\nu}\ln^2 N \sum_{2^s \leqslant 4\ln^2 N} Q\left(\frac{2\pi N\Lambda}{2^r}\cdot 2^{s+1},\ \nu-\mu,\ \chi\right)e^{-2^{s-2}} + B. \qquad (29.8)$$

Мы имеем, согласно (6.6) и в силу того, что $q \leqslant (\ln N)^{1000}$,

$$Q\left(\frac{2\pi N\Lambda}{2^r}\cdot 2^{s+1},\ \nu-\mu,\ \chi\right) = B(\ln N)^{1000}\times$$

$$\times\left(\frac{2\pi N\Lambda}{2^r}\cdot 2^{s+1}\right)^{1-(\nu-\mu)/(1-\nu+\mu)}\ln^{10}\left(\frac{2\pi N\Lambda}{2^r}\cdot 2^{s+1}\right) + B(\ln N)^{30000}. \quad (29.9)$$

Далее,

$$\frac{2\pi N\Lambda}{2^r}\cdot 2^{s+1} = BN^{\eta_4}\ln^2 N.$$

Ввиду этого и так как $\nu > 1/2 - 10^{-4}$, получаем

$$\int\limits_{\Lambda/2^r}^{\Lambda/2^{r-1}} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha = BN^{2\nu}\cdot N^{2\eta_4(1-\nu/(1-\nu))}\ln^{1002} N + BN^{2\nu}(\ln N)^{30002}. \quad (29.10)$$

Имеем $\nu = 1/2 - \xi$, где $0 \leqslant \xi < 10^{-4}$, ξ — малое число. Тогда

$$N^{2\nu} = N^{1-2\xi},$$

$$1 - \frac{\nu}{1-\nu} = \frac{4\xi}{1+2\xi} \leqslant 4\xi.$$

Поэтому (29.10) дает:

$$BN^{1-2\xi+8\eta_4\xi}(\ln N)^{1002} + BN^{1-2\xi}(\ln N)^{30002} = BN^{1-\xi}(\ln N)^{30002}. \quad (29.11)$$

Ввиду того что модуль ряда $L(s,\chi)$ $q < (\ln N)^{1000}$, мы можем при весьма малых ξ гарантировать отсутствие нулей с подобными значениями $\xi = 1/2 - \nu$ согласно теоремам К. Л. Зигеля и Н. Г. Чудакова (см. [10]). В силу этих теорем

$$Q\left(\frac{2\pi N\Lambda}{2^r}\cdot 2^{s+1},\ \nu-\mu,\ \chi\right) = 0 \qquad (29.12)$$

при $(2\pi N\Lambda/2^r)\,2^{s+1} \leqslant N^{2\eta_4}$ и при

$$\xi = \frac{1}{2} - \nu < \frac{1}{(\ln N)^a}, \qquad (29.13)$$

где $a < 1$ — положительная константа. Стало быть, при $\nu > 1/2 - 1/(\ln N)^a$ будем иметь, согласно (29.8),

$$\int\limits_{\Lambda/2^r}^{\Lambda/2^{r-1}} |A_{\chi,\beta}(\alpha)|^2\,d\alpha = B. \qquad (29.14)$$

Обращаясь к (29.11), видим, что при $\nu \leqslant 1/2 - 1/(\ln N)^a$

$$BN^{1-\xi}(\ln N)^{30002} = BNe^{-(\ln N)^{1-a}}(\ln N)^{30002} = BNe^{-(1/2)(\ln N)^b}, \quad (29.15)$$

где $b = 1 - a > 0$ — положительная константа.

Присоединяя (29.14), суммируя по r, которое принимает $B \ln N$ значений и учитывая (29.7), (29.8) и (29.5), найдем

$$\int_0^\Lambda |A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha = BNe^{-(1/4)\ln^b N}, \quad (29.16)$$

что дает

$$|I_q^{(2)}(N_1)| = BNe^{-(1/8)\ln^b N}. \quad (29.17)$$

§ 30. Переходим к $I_q^{(1)}(N_1)$ и соответственно к оценке (4.3). Имеем:

$$|I_q^{(1)}(N_1)| \leqslant \frac{2q}{\varphi^2(q)} \sum_\chi{}' \left(\int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2 d\alpha \cdot \int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A_\chi(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2}.$$

Учитывая (29.16) и беря тривиальную оценку

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A_{\chi_0}(\alpha)|^2 d\alpha = BN \ln^2 N,$$

получим

$$|I_q^{(1)}(N_1)| = BNe^{-(1/16)\ln^b N}. \quad (30.1)$$

Остается вычислить

$$I_q^{(0)}(N_1) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,\, q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} (A_{\chi_0}(\alpha))^2 e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha.$$

Имеем, согласно (23.5),

$$A_{\chi_0}(\alpha) = \frac{1}{x} - A(\alpha) + B \ln^3 N,$$

где $A(\alpha)$ ведет себя, как $A_\chi(\alpha)$ с неглавным характером χ. Ввиду этого

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} (A_{\chi_0}(\alpha))^2 e^{2\pi i N_1 \alpha} d\alpha = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{e^{2\pi i N_1 \alpha}}{x^2} d\alpha + BU_1(\Lambda) + BU_2(\Lambda), \quad (30.2)$$

где

$$U_1(\Lambda) = \left(\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{1}{|x|^2} d\alpha \cdot \int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2},$$

$$U_2(\Lambda) = \left(\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{1}{|x|^2} d\alpha \cdot \Lambda \ln^6 N \right)^{1/2} + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A(\alpha)|^2 d\alpha + \Lambda \ln^6 N.$$

Далее находим, как и в (29. 16),

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} |A(\alpha)|^2 \, d\alpha = BNe^{-(1/4)\ln^b N}. \tag{30. 3}$$

Очевидно,

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\alpha}{|x|^2} = B \int_{1/N}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha^2} = BN. \tag{30. 4}$$

Учитывая еще тот факт, что

$$\int_{\Lambda}^{\infty} \frac{d\alpha}{|x|^2} = BN^{1-\gamma_4}, \tag{30. 5}$$

как это доказано в (23. 8), получим из (30. 2):

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} (A_{\chi_0}(\alpha))^2 \, e^{2\pi i N_1 \alpha} \, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i N_1 \alpha}}{x^2} \, d\alpha + BNe^{-(1/8)\ln^b N}. \tag{30. 6}$$

Мы имеем $x = 1/N + 2\pi i \alpha$. Получаем, вычисляя при помощи вычетов,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i N_1 \alpha}}{x^2} \, d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad N_1 < 0, \\ N_1 e^{-N_1/N} & \text{при} \quad N_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Обращаясь к (29. 3), находим из (29. 17), (30. 1) и (30. 6):

$$I(N_1, q) = \int_{F_q(\Lambda)} S^2(\vartheta) \, e^{2\pi i \vartheta N_1} d\vartheta =$$

$$= \begin{cases} r_{N_1} e^{-N_1/N} N_1 \dfrac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \displaystyle\sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} + Be^{-(1/16)\ln^b N} N, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если} \quad N_1 = N - 2^{x_1} - \ldots - 2^{x_k} \geqslant 0, \\ Be^{-(1/16)\ln^b N} N, \quad \text{если} \quad N_1 < 0. \end{cases} \tag{30. 7}$$

Так как $r_{N_1} = e^{-(2^{x_1} + \ldots + 2^{x_k})/N}$, то (30. 7) дает:

$$\frac{N_1}{e} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} + Be^{-(1/16)\ln^b N} N, \quad \text{если} \quad N_1 \geqslant 0, \tag{30. 8}$$

и

$$Be^{-(1/16)\ln^b N} N, \quad \text{если} \quad N_1 < 0.$$

Суммируя по $q \leqslant (\ln N)^{1000}$ и всем $N_1 \geqslant 0$, находим, используя (29. 1),

$$\int_{\mathfrak{M}(\Lambda)} S^2(\vartheta) \, T^k(\vartheta) \, e^{2\pi i N \vartheta} d\vartheta =$$

$$= \sum_{N_1 \geqslant 0} \frac{N_1}{e} \sum_{q \leqslant (\ln N)^{1000}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{(a,q)=1} e^{2\pi i N_1 a/q} + BNe^{-(1/32)\ln^b N}. \tag{30. 9}$$

Введем ряд

$$\mathfrak{S}(N_1)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{(a,\,q)=1}e^{2\pi i N_1 a/q}=\prod_{p\mid N_1}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)\prod_{p\nmid N_1}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Известно (см., например, [1]), что для четных N_1 $\mathfrak{S}(N_1)>a_0$, где a_0 — абсолютная константа, и что

$$\left|\mathfrak{S}(N_1)-\sum_{q\leqslant(\ln N)^{1000}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}\sum_{(a,\,q)=1}e^{2\pi i N_1 a/q}\right|=\frac{B}{\ln^3 N}. \tag{30. 10}$$

Ввиду этого, подставляя в (30. 9), найдем

$$\int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)}S^2(\vartheta)\,T^k(\vartheta)\,e^{2\pi i N\vartheta}d\vartheta=\frac{1}{e}\sum_{(N_1)}\mathfrak{S}(N_1)\,N_1+B\,\frac{N}{\ln^3 N}, \tag{30. 11}$$

где суммирование производится по четным $N_1>0$. Таких чисел N_1, как показано в работе [1], будет больше $(1/2)(\ln N/\ln 2)^k$. Отсюда имеем:

$$\int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)}S^2(\vartheta)\,T^k(\vartheta)\,e^{2\pi i N\vartheta}d\vartheta\geqslant\frac{a_0}{2e}\,N\left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k. \tag{30. 12}$$

(Заметим, что наш интеграл есть число действительное по конструкции $\mathfrak{M}(\Lambda)$).

§ **31.** Чтобы получить, наконец, основную теорему, нужно собрать все полученные оценки.

Разложим отрезок [0, 1] на встречавшиеся ранее множества. Получаем:

$$[0,\ 1]=\mathfrak{M}+\mathfrak{m},\quad \mathfrak{m}\cap\mathfrak{M}=0,$$
$$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}(\Lambda)+\mathfrak{m}',\quad \mathfrak{m}(\Lambda)\cap\mathfrak{m}'=0,$$
$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(\Lambda)+\mathfrak{M}',\quad \mathfrak{M}(\Lambda)\cap\mathfrak{M}'=0.$$

Введем еще множества

$$\mathfrak{m}''=\mathfrak{m}'-\mathfrak{m}'\cap\mathcal{E}_\eta(N)$$

и

$$\mathfrak{M}''=\mathfrak{M}'-\mathfrak{M}'\cap\mathcal{E}_\eta(N).$$

Имеем:

$$\int\limits_0^1 S^2(\vartheta)\,T^k(\vartheta)\,e^{2\pi i N\vartheta}d\vartheta=\int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)}S^2(\vartheta)\,T^k(\vartheta)\,e^{2\pi i N\vartheta}d\vartheta+$$
$$+\int\limits_{\mathfrak{M}'\cap\mathcal{E}_\eta(N)}S^2(\vartheta)\,T^k(\vartheta)\,e^{2\pi i N\vartheta}d\vartheta+\int\limits_{\mathfrak{M}''}S^2(\vartheta)\,T^k(\vartheta)\,e^{2\pi i N\vartheta}d\vartheta+$$
$$+\int\limits_{\mathfrak{m}(\Lambda)}S^2(\vartheta)\,T^k(\vartheta)\,e^{2\pi i N\vartheta}d\vartheta+\int\limits_{\mathfrak{m}'\cap\mathcal{E}_\eta(N)}S^2(\vartheta)\,T^k(\vartheta)\,e^{2\pi i N\vartheta}d\vartheta+$$
$$+\int\limits_{\mathfrak{m}''}S^2(\vartheta)\,T^k(\vartheta)\,e^{2\pi i N\vartheta}d\vartheta. \tag{31. 1}$$

Далее,

$$\int\limits_{\mathfrak{M}(\Lambda)} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{e} \sum_{(N_1)} \mathfrak{S}(N_1)\, N_1 + B \frac{N}{\ln^3 N} > \frac{a_0}{2e} \cdot N \cdot \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k, \tag{31.2}$$

согласно (30.11) и (30.12);

$$\left| \int\limits_{\mathfrak{M}' \cap \mathcal{E}_\eta(N)} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta \right| \leqslant (T(0))^k \int\limits_{\mathfrak{M}' \cap \mathcal{E}_\eta(N)} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta =$$

$$= B \frac{N}{\tau^{1/2}} \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k = BN \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k N^{-(1/2)\eta_2}, \tag{31.3}$$

согласно (24.3);

$$\int\limits_{\mathfrak{m}(\Lambda)} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta = \sum_{(\ln N)^{1000} < q \leqslant \tau} I(N,\ F_q(\Lambda)) =$$

$$= BN \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k [(1-\eta)^{k-2} + 3\eta_4], \tag{31.4}$$

согласно (28.1);

$$\left| \int\limits_{\mathfrak{m}' \cap \mathcal{E}_\eta(N)} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta \right| \leqslant (T(0))^k \int\limits_{\mathfrak{m}' \cap \mathcal{E}_\eta(N)} |S(\vartheta)|^2\, d\vartheta =$$

$$= B \frac{N}{\tau^{0.83}} \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k = BN \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k N^{-(1/2)\eta_2}, \tag{31.5}$$

согласно (22.1) (лемма X).

Из разбиения (31.1) остались только $\int\limits_{\mathfrak{M}''}$ и $\int\limits_{\mathfrak{m}''}$. Так как $\mathfrak{M}'' \cap \mathfrak{m}'' = 0$, то

$$\int\limits_{\mathfrak{M}''} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta + \int\limits_{\mathfrak{m}''} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{M}''+\mathfrak{m}''} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta. \tag{31.6}$$

По определению $\mathfrak{M}''$ и $\mathfrak{m}''$, в каждой их точке ϑ имеем:

$$|T(\vartheta)| \leqslant (1-\eta)\, T(0),$$

$$|T(\vartheta)|^{k-2} \leqslant (1-\eta)^{k-2} \left(\frac{\ln N}{\ln 2} + B\right)^{k-2} \leqslant 2(1-\eta)^{k-2} \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{k-2}$$

при достаточно большом N. Отсюда

$$\left| \int\limits_{\mathfrak{M}''+\mathfrak{m}''} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2(1-\eta)^{k-2} \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{k-2} \int\limits_0^1 |S(\vartheta)\, T(\vartheta)|^2\, d\vartheta. \qquad (31.7)$$

Далее, согласно лемме V (см. (17.2)),

$$\int\limits_0^1 |S(\vartheta)\, T(\vartheta)|^2\, d\vartheta < C_1 N \ln^2 N.$$

Пользуясь этим неравенством, находим из (31.7):

$$\left| \int\limits_{\mathfrak{M}''+\mathfrak{m}''} S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta \right| < C_2 N \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k (1-\eta)^{k-2}. \qquad (31.8)$$

Объединяя оценки (31.2)—(31.8), получим:

$$\int\limits_0^1 S^2(\vartheta)\, T^k(\vartheta)\, e^{2\pi i N\vartheta} d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{e} \sum_{(N_1)} \mathfrak{S}(N_1)\, N_1 + BN \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k [(1-\eta)^{k-2} + 3\eta_4].$$

Это дает, согласно (2.1),

$$\begin{gathered} Q_k(N) = \sum_{(N_1)} \mathfrak{S}(N_1)\, N_1 + \rho(N), \\ |\rho(N)| \leqslant C_3 N \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k [(1-\eta)^{k-2} + \eta_1(\eta)], \end{gathered} \qquad (31.9)$$

где $\eta_1(\eta) \to 0$ вместе с η, $N_1 = N - 2^{x_1} - \ldots - 2^{x_k} \geqslant 0$ четно,

$$\sum_{(N_1)} \mathfrak{S}(N_1)\, N_1 > \frac{a_0}{2} \left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^k N.$$

Это и доказывает основную теорему при $g = 2$.

Случай $g > 2$ рассматривается совершенно аналогично.

Литература

1. Линник Ю. В. Простые числа и степени двойки. — Труды Мат-ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1951, т. 38, с. 152—169.
2. Линник Ю. В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха—Виноградова. — Мат. сб., 1946, т. 19, вып. 1, с. 3—8.
3. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. М.—Л., 1947. 203 с.

4. Л и н н и к Ю. В. О густоте нулей L-рядов. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, т. 10, № 1, с. 35—46.
5. Р о д о с с к и й К. А. О числе нулей всех L-функций с характерами по данному модулю. — ДАН СССР, 1952, т. 84, № 4, с. 669—671.
6. Р о д о с с к и й К. А. О числе L-функций, имеющих нули в некотором прямоугольнике. — Укр. мат. журн., 1951, т. 3, № 4, с. 399—403.
7. H e i l b r o n n H. Über den Primzahlsatz von Herrn Hoheisel. — Math. Z., 1933, Bd 36, № 3—4, S. 394—423.
8. T c h u d a k o f f N. G. On Goldbach—Vinogradov's theorem. — Ann. Math., 1947, vol. 48, № 3, p. 515—545.
9. Р о м а н о в Н. П. О некоторых теоремах аддитивной теории чисел. — Успехи мат. наук, 1940, вып. 7, с. 47—56.
10. Ч у д а к о в Н. Г. О конечной разности для функции $\psi(x, k, l)$. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, т. 12, № 1, с. 31—46.

ОЦЕНКА СУММЫ ЧИСЛА ДЕЛИТЕЛЕЙ В КОРОТКОМ ОТРЕЗКЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Совместно с А. И. Виноградовым

Успехи мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4, с. 277—280

В некоторых вопросах, связанных с приложением матриц в теории характеров Дирихле [1], появляется надобность в оценке суммы числа делителей вида

$$\sum_{Dn+l\leqslant x} \tau(Dn+l) = S;$$

здесь $\tau(m)$ — число делителей m; $(l, D)=1$ $(0<l<D)$ и $D\leqslant x^{1-\alpha}$, где α — сколь угодно малое фиксированное число. В настоящей заметке оценивается порядок S сверху и снизу: указывается несложная функция $\psi(x, D)$, такая, что $S\asymp\psi(x, D)$ ($\asymp$ — знак, равносильный соотношениям $A_1 < S/\psi(x, D) < A_2$, A_1, A_2 — положительные константы).

Т е о р е м а. *Если $D=x^{1-\alpha}$, где α — фиксированное положительное число с условием $0<\alpha<1/2$, то имеем оценку*

$$\sum_{Dn+l\leqslant x} \tau(Dn+l) \asymp \frac{x}{D}\ln\frac{x}{D}\prod_{p\mid D}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем число $\varepsilon=(1/4)\alpha$ и разобьем число $Dn+l$ на два множителя:

$$Dn+l=a_n b_n,$$

где b_n включает все простые множители $Dn+l$, превосходящие x^ε, и, следовательно, каждый простой множитель a_n меньше либо равен x^ε. В таком случае

$$\sum_{Dn+l\leqslant x} \tau(Dn+l) \leqslant \sum_{Dn+l\leqslant x} \tau(a_n)\,\tau(b_n) \leqslant 2^{1/\varepsilon} \sum_{Dn+l\leqslant x} \tau(a_n), \tag{1}$$

но

$$\sum_{Dn+l\leqslant x}\tau(a_n)=\sum_{n<x/D}\ \sum_{a_n=\nu_1\nu_2}1. \qquad (2)$$

Возьмем некоторое число a_n и все решения уравнения $a_n=\nu_1\nu_2$ разделим на два класса.

К классу I отнесем только те решения, которые удовлетворяют условию $\nu_1\leqslant x^\alpha$. К классу II — все решения с условием $\nu_1>x^\alpha$. И если $\nu_1\in$ I классу, то полагаем $\nu_1=\nu_1'$, если же $\nu_1\in$ II классу, то $\nu_1=\nu_1''$.

В таком случае

$$\sum_{n<x/D}\ \sum_{a_n=\nu_1\nu_2}1=\sum_{n<x/D}\ \sum_{a_n=\nu_1'\nu_2}1+\sum_{n<x/D}\ \sum_{a_n=\nu_1''\nu_2}1,$$

но

$$\sum_{n\leqslant x/D}\ \sum_{a_n=\nu_1'\nu_2}1\leqslant\sum_{(\nu_1'D)=1}\ \sum_{Dn+l\equiv 0(\operatorname{mod}\nu_1')}1\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x}{D}\sum_{(\nu_1',\,D)=1}\frac{1}{\nu_1'}<c\,\frac{x}{D}\ln\frac{x}{D}\prod_{p\mid D}\left(1-\frac{1}{p}\right). \qquad (3)$$

Оценим вторую сумму в (2).

Возьмем некоторое решение $a_n=\nu_1''\nu_2$ с условием $\nu_1''>x^\alpha$. Расположим простые делители ν_1'' в порядке возрастания:

$$\nu_1''=p_1p_2p_3\ldots p_r\quad(p_1\leqslant p_2\leqslant p_3\leqslant\ldots\leqslant p_r).$$

Выберем такое $k<r$, чтобы выполнялось условие

$$\mu=p_1p_2\ldots p_k\leqslant x^\alpha,$$

$$\mu p_{k+1}>x^\alpha,$$

а так как у нас каждое простое число $\leqslant x^\varepsilon$, то, следовательно,

$$x^{(3/4)\alpha}\leqslant\mu\leqslant x^\alpha. \qquad (4)$$

Таким образом, $\nu_1''=\mu p_{k+1}\ldots p_r$ и, следовательно, каждому ν_1'' можно сопоставить μ, определенное условием (4). А так как $\nu_1''\leqslant x$ и максимальный простой делитель μ есть p_k, то на одно μ может отобразиться не более чем

$$\varphi(x,\ p_k)=\min\left(2^{\ln x/\ln p_k},\ 2^{c\ln x/\ln\ln x}\right)$$

различных ν_1'', причем c — некоторая абсолютная константа с условием $1\leqslant c<2$.

А так как среди чисел a_n делящихся на μ не больше, чем среди чисел $Dn+l$, то, следовательно, мы имеем

$$\sum_{Dn+l\leqslant x}\ \sum_{a_n=\nu_1''\nu_2}1\leqslant\frac{x}{D}\sum_{(\mu,\,D)=1}\frac{\varphi(x,\ p_k)}{\mu}, \qquad (5)$$

где p_k — максимальное простое число, делящее μ.

Разделим сумму по μ на $O(\ln x)$ сумм:

$$\sum_{(\mu,\,D)=1} \frac{\varphi(x,\ p_k)}{\mu} = \sum_{Q} \sum_{\substack{Q \leqslant \mu \leqslant Q_1 \\ (\mu,\,D)=1}} \frac{\varphi(x,\ p_k)}{\mu}, \tag{6}$$

где $Q_1 \leqslant 2Q$. Сумму по интервалу $Q \leqslant \mu \leqslant Q_1$ разобьем на две: к первой сумме отнесем те и только те μ, каждый простой делитель которых не превосходит $\ln x$, ко второй — все остальные

$$\sum_{\substack{Q \leqslant \mu \leqslant Q_1 \\ (\mu,\,D)=1}} \frac{\varphi(x,\ p_k)}{\mu} = \sum_{\substack{Q \leqslant \mu < Q_1 \\ (\mu,\,D)=1,\ p_k \leqslant \ln x}} \frac{\varphi(x,\ p_k)}{\mu} + \sum_{\substack{Q \leqslant \mu \leqslant Q_1 \\ (\mu,\,D)=1,\ p_k > \ln x}} \frac{\varphi(x,\ p_k)}{\mu}, \tag{7}$$

но для случая $p_k \leqslant \ln x$ имеем $\varphi(x,\ p_k) = 2^{\frac{c \ln x}{\ln \ln x}}$. Следовательно,

$$\sum_{\substack{Q \leqslant \mu \leqslant Q_1 \\ (\mu,\,D)=1,\ p_k = \ln x}} \frac{\varphi(x,\ p_k)}{\mu} < \frac{2^{c \ln x / \ln \ln x}}{Q} \sum_{\substack{\mu < 2Q \\ p_k \leqslant \ln x}} 1.$$

Но мы имеем оценку $\sum\limits_{\substack{\mu < 2Q \\ p_k \leqslant \ln x}} 1 = O(2^{2 \ln x / \ln \ln x})$. Следовательно, окончательно:

$$\sum_{\substack{Q \leqslant \mu \leqslant Q_1 \\ (\mu,\,D)=1,\ p_k \leqslant \ln x}} \frac{\varphi(x,\ p_k)}{\mu} = O\left(\frac{2^{4 \ln x / \ln \ln x}}{Q}\right).$$

Вторую сумму в (7) разобьем на ряд сумм по простым числам:

$$\sum_{\substack{Q \leqslant \mu \leqslant Q_1 \\ (\mu,\,D)=1,\ p_k > \ln x}} \frac{\varphi(x,\ p_k)}{\mu} = \sum_{\ln x < p_k < x^{\varepsilon}} \sum_{\substack{Q \leqslant \mu \leqslant Q_1 \\ (\mu,\,D)=1}} \frac{2^{\ln x / \ln p_k}}{\mu},$$

таким образом, во внутренней сумме имеем условие

$$\mu = p_k \mu_1,\ P \leqslant \mu_1 \leqslant P_1,\ P_1 \leqslant 2P,\ P = \frac{Q}{p_k},\ x^{\alpha/2} \leqslant P \leqslant x^{\alpha},$$

$$\sum_{\substack{Q \leqslant \mu \leqslant Q_1 \\ (\mu,\,D)=1}} \frac{2^{\ln x / \ln p_k}}{\mu} = \frac{2^{\ln x / \ln p_k}}{p_k} \sum_{\substack{P \leqslant \mu_1 \leqslant P_1 \\ (\mu_1,\,D)=1}} \frac{1}{\mu_1}.$$

Для числа целых чисел $\leqslant 2P$, все простые делители которых $< P_k$ и взаимно просты с D, имеем оценку [2], и, следовательно,

$$\sum_{\substack{P \leqslant \mu_1 \leqslant P_1 \\ (\mu_1,\,D)=1}} \frac{1}{\mu_1} \leqslant e^{-(\ln P / \ln P_k) \ln (\ln P / \ln P_k)} \prod_{p \mid D} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{8}$$

Для того чтобы понижающий множитель был меньше $2^{-2\ln x/\ln P_k}$, достаточно условие $(\alpha/2)\ln\left(\alpha/2\frac{\ln x}{\ln P_k}\right)\geqslant 2$ или $P_k\leqslant x^\gamma$, где $\gamma = (\alpha/2)\,e^{-4/\alpha}$, и, следовательно,

$$\sum_{\ln x\leqslant P_k\leqslant x^\gamma}\ \sum_{\substack{Q\leqslant\mu\leqslant Q_1\\(\mu,\,D)=1}}\frac{2^{\ln x/\ln P_k}}{\mu}\leqslant\prod_{p\mid D}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{P_k\leqslant x^\gamma}\frac{e^{-\ln x/\ln P_k}}{P_k}\leqslant\prod_{p\mid D}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

В случае, если $x^\gamma<p<x^\varepsilon$, имеем тривиальную оценку:

$$\sum_{x^\gamma<P_k\leqslant x^\varepsilon}\ \sum_{\substack{Q\leqslant\mu\leqslant Q_1\\(\mu,\,D)=1}}\frac{2^{\ln x/\ln P_k}}{\mu}\leqslant 2^{1/\gamma}\frac{1}{Q}\sum_{\substack{\mu\leqslant 2Q\\(\mu,\,D)=1}}1=O\left(\prod_{p\mid D}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right).$$

Соединяя две последние оценки и суммируя по всем Q, получаем:

$$\sum_{(\mu,\,D)=1}\frac{\varphi(x,\ p_k)}{\mu}=O\left(\ln\frac{x}{D}\prod_{p\mid D}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right).$$

Учитывая эту оценку, оценки (5), (3), (2) и (1), получаем оценку сверху. Оценка снизу тривиальна.

Постоянная в этой теореме имеет порядок $\exp((2/\alpha)\,e^{4/\alpha})$ и растет со скоростью повторной экспоненты. Оценка не является наилучшей. Можно предполагать, что она имеет вид $O(\exp(1/\alpha))$ при $\alpha\to 0$.

Соединяя этот метод со свойством

$$\sum_{a\leqslant x}\tau^{n+1}(a)=\sum_{\nu_1\nu_2<x}\tau^n(\nu_1\nu_2),$$

методом индукции получаем более общую оценку:

$$\sum_{Dn+b\leqslant x}\tau^k(Dn+b)\asymp\frac{x}{D}\left(\ln\frac{x}{D}\prod_{p\mid D}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)^{2^k-1},$$

k — фиксированное целое число.

Литература

1. Линник Ю. В. Еще об аналогах эргодических теорем для мнимого квадратичного поля. — ДАН СССР, 1956, т. 109, № 4, с. 694—696.
2. Виноградов А. И. О числах с малыми простыми делителями. — ДАН СССР, 1956, т. 109, № 4, с. 683—686.

АДДИТИВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МОДУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ADDITIVE PROBLEMS AND EIGENVALUES OF THE MODULAR OPERATORS

Proc. Intern. Congr. Math. (Stockholm, 1962).
Djursholm, 1963, p. 270—284

§ 1. Методы решения аддитивных проблем

Методы решения аддитивных проблем, известные на сегодняшний день, можно по существу разбить на четыре типа.

(I) Число решений представляется через коэффициент Фурье и выражается с помощью интегрального оператора $\int\limits_0^1 (\ )\times$ $\times \exp(-2\pi i n\alpha)\, d\alpha$, действующего на тригонометрическую сумму (n означает представляемое число). Многие известные проблемы «тернарного» типа были решены этим методом.

(II) Метод решета Эратосфена. Этот метод применим к бинарным проблемам с «почти простыми» числами. Он дает только неравенства; асимптотики этот метод не дает.

(III) Дисперсионный метод. Этот метод разработан в последние годы и применялся главным образом к бинарным проблемам, содержащим бинарную квадратичную форму. Он дает асимптотику числа решений, например в проблеме Харди—Литтлвуда $p+\xi^2+\eta^2=n$, проблемах делителей $p-xy=1$ $(xy\leqslant n)$; $xy-x_1x_2\ldots x_n=1$ $(xy\leqslant n)$ (см. [1]), $p=\xi^2+\eta^2+1$ $(p\leqslant n)$ (см. [2]); обобщенной проблеме Клостермана $N(\mathfrak{A}_1)+N(\mathfrak{A}_2)=n$ ($N(\mathfrak{A}_i)$ — нормы идеалов).

(IV) Сведение подсчета числа решений к оценке собственных значений для соответствующих полугрупп «дискретных операторов». Метод применим лишь к оценке коэффициентов модулярных форм целой размерности, в частности тета-функций, и дает количество представлений числа положительной квадратичной формой с четным числом переменных. Хорошо известные операторы Гекке действуют здесь как указанные выше операторы. Этот метод замечателен тем, что в случае размерности модулярных форм, равной -2, в частности для кватернарных квадратичных форм, он дает оптимальные оценки остаточных членов (см. [3]). Для примитивных кватернарных форм $F(x)$ имеем формулу (ср. [3])

$$r_F(n)=E_F(n)+\sigma_F(n), \tag{1.1}$$

где $r_F(n)$ означает количество представлений числа n формой F, $E_F(n)=c_Fn\sum_{t\mid n}\left(\frac{D}{t}\right)t^{-1}$ (c_F — константа);

$$|\sigma_F(n)|<\gamma_F(\varepsilon)\,n^{1/2+\varepsilon} \quad \text{для любого } \varepsilon>0. \tag{1.2}$$

Формула справедлива для всех чисел, которые не делятся на конечное число «исключительных» простых чисел. (Несколько более точная оценка $|\sigma_F(n)| \leqslant \gamma_F \tau(n) n^{1/2}$, $\tau(n)$ — число делителей, и некоторые обобщения указаны А. Н. Андриановым, см. [4, 5]).

§ 2. Уравнивание и его связь с редукцией кривых и проблемами типа гипотезы Г. Хассе. Проблема целочисленных матриц

Непосредственное применение метода (I) начинается обычно с разбиения чисел сегмента [0, 1] на два класса.

Обозначив $\tau = N^b$, где $b < 1$ — подходящая константа, мы разлагаем числа $\alpha \in [0, 1]$ в непрерывные дроби, полагая

$$\alpha = \frac{a}{g} + \frac{Z}{g\tau}, \quad (a, g) = 1, \quad g \leqslant \tau, \quad |Z| \leqslant 1 \quad \text{для} \quad g \leqslant \psi(N),$$

где $\psi(N)$ — сравнительно медленно возрастающая функция от n, скажем, n^{ε} (ε мало) или $(\ln n)^h$ $(h > 1)$, а отрезки

$$I_{ag} = \left[\frac{a}{g} - \frac{1}{g\tau}, \quad \frac{a}{g} + \frac{1}{g\tau}\right]$$

не пересекаются.

Теперь $\Sigma_{a,g} \int I_{ag}(\ )\exp(-2\pi i n\alpha)\,d\alpha$ образует «главный член» проблемы, тогда как абсолютное значение интеграла по дополнению к $\Sigma\, I_{ag}$ оценивается. Если доказать, что при $n \to \infty$ последняя величина растет медленнее, чем главный член, то мы получим асимптотику проблемы (так трактуется довольно естественная проблема норм идеалов предписанных классов в двух заданных алгебраических числовых полях, см. [6], и т. д.).

Однако во многих аддитивных проблемах, как доказано, такой подход является недостаточно тонким. Такая ситуация возникает, например, в бинарной проблеме Гольдбаха $p_1+p_2=n$ или в проблеме простых чисел близнецов $p_1-p_2=2$, $p_1 \leqslant n$ (ср. [7, 8]). Условное исследование этих проблем, с учетом расширенной гипотезы Римана, приводит к описанной выше ситуации. Таким образом, можно решить уравнение $n=p_1+p_2+2^{x_1}+\ldots+2^{x_k}$ (k — константа); гипотеза Римана может быть заменена доказанными плотностными теоремами (см. [8, 9]). Упомянутый выше общий подход является здесь недостаточно тонким.

Эта ситуация была открыта еще в 1926 г. Г. Д. Клостерманом [10] при исследовании уравнения (1. 1). В статье [10] было дано разбиение отрезка [0, 1], более замысловатое, чем описанное выше. Непересекающиеся при малых g отрезки I_{ag} могут пересекаться при значениях g и g_1, таких, что $g+g_1 > \tau$. Чтобы избавиться от таких пересечений и в то же время заполнить отрезок [0, 1] без пробелов, применяется хорошо известный ряд Фарея; вместо отрезков I_{ag} берутся отрезки j_{ag} с неравными длинами при различных a,

$$j_{ag}=\left[\frac{a}{g}-\frac{1}{g\,(g+g_2)},\ \ \frac{a}{g}+\frac{1}{g\,(g+g_1)}\right],$$

где a_1/g_1 и a_2/g_2 — соседние с a/g члены в ряде Фарея. Эти отрезки j_{ag} разбиваются далее на еще более мелкие отрезки j_{mg}' с равными длинами при заданном g и эквидистантные на отрезке $[0,\ 1]$. В интеграле $\int\limits_0^1(\quad)\exp(-2\pi in\alpha)\,d\alpha$, дающем число решений, соответствующие величины суммируются при заданном g и заданных числах m в отрезках j_{mg}' в естественном порядке; эти суммы оцениваются затем по их абсолютному значению. Этот метод, идея которого восходит к Г. Харди, позволяет расширить сферу применения метода (I). Его применение приводит к появлению в теории чисел сумм Клостермана [10]:

$$S\,(a,\ b,\ g)=\sum_{x \bmod g}\exp\frac{2\pi i}{g}\,(ax'+bx);\quad (xx'\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ g)) \tag{2. 1}$$

(их свойства будут рассмотрены ниже). Еще дальше этот метод был развит А. В. Малышевым [11—13], использовавшим известные оценки А. Вейля [14] для тригонометрических сумм, чтобы существенно продвинуться в проблеме оптимальных оценок остаточных членов в теории квадратичных форм. Если $F\,(x_1,\ .\ .\ .,\ x_n)$ — целочисленная квадратичная форма, то для количества решений $r_F\,(n)$ уравнения

$$F\,(x_1,\ .\ .\ .,\ x_k)=n \tag{2. 2}$$

при некоторых дополнительных условиях на числа n, которые не делятся на некоторые исключительные простые числа (в конечном числе), А. В. Малышев дал выражение типа (1. 1):

$$r_F\,(n)=E_F\,(n)+\sigma_F\,(n), \tag{2. 3}$$

где $E_F\,(n)$ — член, аналогичный такому же в формуле (1. 1), и

$$|\,\sigma_F\,(n)\,|<\gamma_F\,(\varepsilon)\,n^{k/4-1/4+\varepsilon}. \tag{2. 4}$$

Как известно, оптимальная ожидаемая оценка в этой проблеме должна быть типа (2. 4) с экспонентой $k/4-1/2+\varepsilon$, и, таким образом, она отличается от экспоненты А. В. Малышева на величину $1/4$. При $k=4$ формулы М. Эйхлера (1. 1), (1. 2) дают ожидаемую оценку; при $k>4$ проблема оптимальной оценки остается нерешенной. Для частного случая $k=24$,

$$F\,(x_1,\ \ldots,\ x_k)=x_1^2+\ \ldots\ +x_{24}^2,$$

этот вопрос составляет по существу известную проблему Рамануджана—Петерсона [15]. Результат (2. 4) был получен указанным выше методом Г. Д. Клостермана, именно представлением $\int_0^1 (\quad) \exp(-2\pi i\alpha)\,d\alpha$ интегралами по отрезкам из [0, 1] равной длины при заданном g, эквидистантным на отрезке [0, 1].

Пусть задана аддитивная проблема с числом решений $r(n)$, выражаемым интегралом

$$r(n)=\int_0^1 (\quad) \exp(-2\pi i n\alpha)\,d\alpha. \tag{2.5}$$

Предположим, что нам удается заменить интеграл (2. 5) с ошибкой $\gamma(n)$ (допустимой по сравнению с «главным членом») суммой

$$r_1(n)=\sum_{g\leqslant\sqrt{N}}\ \sum_{(a,\,g)=1} I_{ag}, \tag{2.6}$$

где

$$I_{ag}=\int_{j_{ag}} (\quad) \exp(-2\pi i n\alpha)\,d\alpha, \tag{2.7}$$

$$j_{ag}=\left[\frac{a}{g}-\frac{N^{\varepsilon}}{N},\ \ \frac{a}{g}+\frac{N^{\varepsilon}}{N}\right];$$

$\varepsilon>0$ — произвольно малая константа.

В таком случае мы будем говорить, что мы произвели уравнивание в аддитивной проблеме (2. 5) с ошибкой $\gamma(n)$. Основной момент операции уравнивания состоит в условии, что для заданного g и всех a под условием $(a, g)=1$ отрезки j_{ag} имеют равную длину; можно было бы допустить, что эта длина не есть константа для различных g, но меняется достаточно медленно с изменением g и, кроме того, g можно предположить меняющимся до $\sqrt{N}(\ln N)^h$ или N^{β} (где $\beta<1/2$) вместо $\sqrt{N}$. Заметим, что операция уравнивания не исключает перекрывания отрезков j_{ag}.

Если проблема (2. 5) допускает уравнивание с ошибкой $\gamma(n)$ в упомянутом выше смысле или в более широком смысле, о котором речь пойдет ниже, то проблема тогда может быть сведена к проблеме асимптотики решений некоторых сравнений.

Обозначим член, который должен быть в скобках в интеграле (2. 5), через $\exp(2\pi i\alpha F)$; F пробегает систему положительных целых чисел; $F\leqslant n$. Согласно элементарной формуле

$$\sum_{(a,\,g)=1} \exp 2\pi i\frac{a}{g}F=d\mu\left(\frac{g}{d}\right),$$

где $d=(q, F)$, мы видим, что количество решений $r(n)$ может быть выражено через количество решений сравнений

$$F \equiv n \pmod d,$$

где $d \mid q$ и $F \leqslant n$ для каждого $q \equiv 0 \pmod d$; числа F должны быть заменены весами, возникающими при интегрировании по отрезкам j_{ag}.

Следовательно, первоначальная аддитивная проблема для числа n в случае возможности уравнивания сводится к специфической проблеме решения сравнений по модулям $d \leqslant \sqrt{N}$.

Эта редукция сходна с операцией редукции кривой с целыми коэффициентами $f(x, y)=0$ по простым модулям. В некоторых случаях проясняются какие-то специфические связи, соединяющие описанную выше операцию с известной проблемой Хассе о поведении функции Хассе, полученной в виде произведения конгруэнц-дзета-функций, возникающих при редукции кривой по простым модулям (гипотеза Хассе; см. [16]). Далее мы увидим также весьма близкую аналогию с аддитивными проблемами в случае квадратичных форм.

Заметим, что неизвестно, возможно ли уравнивание для бинарной проблемы Гольдбаха $p_1+p_2=n$ (в случае проблемы простых чисел близнецов $p_1-p_2=2$; $p_1 \leqslant n$ уравнивание в некотором обобщенном смысле возможно). Предположив, что уравнивание возможно, можно достигнуть некоторого продвижения в условном решении бинарной проблемы Гольдбаха, используя расширенную гипотезу Римана.

Можно отметить также еще одну проблему, в которой существенна возможность уравнивания. Рассмотрим мультилинейную форму $F=\sum a_{j_1 j_2 \ldots j_k} x_{j_1} \ldots x_{j_k}$ степени k от k^2 переменных, например $\det(X)$, где X — $k \times k$ матрица:

$$X = X_{kk} = \begin{Vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1k} \\ x_{21} & \ldots & x_{2k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_{k1} & \ldots & x_{kk} \end{Vmatrix}.$$

Мы интересуемся решениями уравнения $F=n$, для которых точка $(x_1, \ldots, x_{k^2})$ расположена в заданной области внутри куба $|x_i| < c\sqrt[k]{n}$, и рассматриваем асимптотику таких решений при $n \to \infty$. Эта проблема представляет некоторый интерес для аналогов эргодических теорем для целых матриц (ср. [17]).

Мы можем фиксировать подходящую область k^2-2k надлежащим образом выбранных переменных x_i и полагать, что оставшиеся переменные меняются так, что F преобразуется в квадратичную форму с очень большими коэффициентами (например, в случае, когда $F=\det(X)$, можно фиксировать первые $n-2$ строки матрицы X в подходящей области). В уравнении $F=n$ форма F преобразуется в квадратичную форму с коэффициентами, возрастающими как $n^{1-2/k}$; оставшиеся переменные должны находиться в предписанной области. В случае прямого применения метода (I) и известных оценок сумм Гаусса для уравнения $F=n$, как доказано, остаточный член имеет тот же порядок, что и главный, так что уравнивание необходимо. В процессе уравнивания возникают некоторые трудности, которые не дают возможности вычислить асимптотику до конца. Мы можем формулировать здесь лишь более слабое утверждение о свойстве быть «всюду плотным».

Теорема 1 (Ю. В. Линник, Б. Ф. Скубенко). *Пусть $n \to \infty$; рассмотрим целочисленные матрицы*

$$X = X_{kk} = \left\| \begin{matrix} x_{11} & \ldots & x_{1k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_{k1} & \ldots & x_{kk} \end{matrix} \right\|.$$

Возьмем «основной куб» $|x_{ij}| \leqslant Cn^{1/k}$ ($C > 1$ — любая константа, $\varepsilon > 0$ — достаточно малая константа). Пусть $n > n_0(\varepsilon, C)$; в каждом кубе с ребрами длины $\varepsilon n^{1/k}$, расположенном в основном кубе, имеется целая точка $(x_{11}, \ldots, x_{kk})$, такая, что для соответствующей матрицы

$$X = \left\| \begin{matrix} x_{11} & \ldots & x_{1k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_{k1} & \ldots & x_{kk} \end{matrix} \right\|.$$

мы будем иметь $\det(X)=n$, *при условии, что выполнены очевидные необходимые условия.*

Для случая $k=2$ (матрица 2×2) соответствующая асимптотика может быть найдена (ср. [18]). Для случая $k=3$ соответствующая асимптотика была получена недавно Б. Ф. Скубенко и автором. Кажется, что при использовании удобного метода уравнивания можно получить соответствующую асимптотику (включающую меру Хаара для группы унимодулярных матриц) для матриц любого порядка.

§ 3. Уравнивание в аддитивных проблемах, содержащих квадратичные формы. Аналоги гипотезы Хассе для сумм Клостермана

Если аддитивная проблема содержит положительные квадратичные формы с двумя и более переменными, то процесс уравнивания возможен. Проблемы такого типа мы получаем, например, рассматривая уравнения вида $p+Q(x, y)=n$ (p — простое; $Q(x, y)$ — положительная бинарная квадратичная форма); $F(x_1, \ldots, x_k)=n$, где слева стоит положительная квадратичная форма. В последнем случае уравнивание может быть выполнено с помощью элементарной теории операторов Гекке. Поясним метод такого уравнивания для уравнений вида

$$x_1^2 + \ldots + x_{2k}^2 = n \quad (2k > 4) \tag{3.1}$$

(этот случай весьма удобен для процесса уравнивания). Допустимой ошибкой будет $O(n^{k/2-1/2+\varepsilon})$. Пусть $P(x_1, \ldots, x_{2n})$ — какой-нибудь однородный полином степени m с целыми коэффициентами.

Рассмотрим проблему отыскания асимптотики для суммы

$$S(n, P) = \sum_{x_1^2+\ldots+x_{2k}^2=n} P(x_1, \ldots, x_{2k}). \tag{3.2}$$

На поверхности сферы $x_1^2 + \ldots + x_{2k}^2 = |\rho|^2 = 1$ (ρ — радиус-вектор) каждый полином $\pi(x_1, \ldots, x_{2k})$ может быть представлен в виде суммы однородных сферических полиномов X_l степени l (удовлетворяющих уравнению Лапласа $\Delta X_l = 0$) : $P = \sum_{l=0}^{h} X_l$ (ср. [14]).

Следовательно, при условии $x_1^2 + \ldots + x_{2k}^2 = n$ мы имеем:

$$P(x_1, \ldots, x_{2k}) = \sum_{l=0}^{h} (\sqrt{n})^{m-l} X_l(x_1, \ldots, x_{2k}). \tag{3.3}$$

Если $P(x_1, \ldots, x_{2k})$ — неоднородный полином, его можно разбить на однородные части и снова получить формулу типа (3.3). Теперь выражение

$$\vartheta(\tau, X_l) = \sum_{\substack{x_i=-\infty \\ i=1, 2, \ldots, 2k}}^{\infty} X_l(x_1, \ldots, x_{2k}) \exp 2\pi i\tau (x_1^2 + \ldots + x_{2k}^2) \tag{3.4}$$

представляет собой модулярную форму размерности $(k+l)$ в верхней полуплоскости $J\tau > 0$. Значит, выражение $S(n, P)$ в формуле (3.2) может быть записано в виде линейной комбинации (с коэффициентами $(\sqrt{n})^{m-l}$) коэффициентов члена $\exp 2\pi i\tau n$ в разложении модулярных форм (3.4).

При $l=0$ среди них получается главная θ-функция $\theta(\tau, X_0)$, соответствующая уравнению (3.1). Она может быть разложена в ряд Эйзенштейна и параболическую форму; при $l > 0$ получаются только параболические формы (ср. [19]). Таким образом, коэффициент при $\exp(2\pi i\tau n)$ в главной θ-функции $\theta(\tau, X_0)$ является линейным выражением соответствующих коэффициентов рядов Эйзенштейна, упомянутых выше параболических форм и $S(n, P)$. Теперь, по теории Гекке, мы можем выразить параболические формы через конечный базис собственных функций соответствующих операторов Гекке в пространстве параболических форм. Заменяя число n числами $3n, 5n, 7n, 11n, \ldots, pn$ (p простое) и используя свойства собственных функций операторов Гекке, мы получим конечную систему линейных уравнений, которая, как легко видеть, дает выражение для количества решений уравнения (3.1) только в терминах $S(np_i, P)$.

Таким образом, вместо исследования асимптотики количества решений уравнения (3.1) с соответствующим остаточным членом можно искать асимптотику $S(n, P)$ с соответствующим остаточным членом. Полином $P(x_1, \ldots, x_{2k})$ можно выбирать при этом весьма произвольным образом.

Обозначая теперь через $r_4(m)$ количество представлений n суммой 4 квадратов, имеем, по хорошо известной теореме Якоби:

$$r_4(m) = 8\sigma_1(m), \text{ если } m \text{ нечетное,}$$

$$r_4(m) = 24\,\sigma_1(m), \text{ если } m \text{ четное;}$$

здесь $\sigma_1(m) = \sum\limits_{\substack{m=xy \\ x \text{ нечетное}}} x$ означает сумму нечетных делителей m.

Пусть $P(x_1, \ldots, x_{2k})$ зависит только от $x_{k-3}^2 + x_{k-2}^2 + x_{k-1}^2 + x_k^2$. Тогда $S(n, P)$ можно выразить с помощью суммы

$$S_1(n, P) = \sum_{\substack{x \text{ нечетное} \\ x_1^2 + \ldots + x_{2k-4}^2 + xy = n}} xP(xy)$$

и аналогичной суммы, содержащей степени числа 2. Рассмотрим выражение $\sum\limits_{m=0}^{\infty} S(m, P)\exp(2\pi i\tau n)$. В соответствии со сказанным выше оно может быть представлено в виде линейной комбинации сумм типа $\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_1(n, P)\exp(2\pi i\tau n)$.

Положим

$$\tau = \frac{i}{n} + \alpha, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Тогда

$$\sum_{m=0}^{\infty} S_1(m, P)\exp(2\pi i\tau m) =$$

$$= \sum_{x_1, \ldots, x_{2k-3}} xP(xy)\exp 2\pi i\tau(x_1^2 + \ldots + x_{2k-4}^2 + xy). \tag{3.5}$$

Выражение $\exp(2\pi i\tau xy)$ при $xy \geqslant n\ln^2 n$ становится очень малым. Если же $xy \leqslant n\ln^2$ n, то имеет место одно или оба из соотношений $x \leqslant \sqrt{n}\cdot\ln n$ или $y \leqslant \sqrt{n}\ln n$. Сумма (3.5) может быть разбита на две части, причем первая соответствует первому неравенству и вторая — второму. В первой части, при удобном выборе $P(xy)$, можно создать ситуацию, в которой можно пренебречь, с допустимой ошибкой, членами, для которых (αx) не слишком мало, так что существенными будут лишь члены с малым (αx). Можно сделать вывод, что для каждого x в (3.5) важной является лишь сумма, в которой

$$\alpha = \frac{a}{x} + \frac{\theta n^{\varepsilon_0}}{n};$$

$|\theta| \leqslant 1$, $\varepsilon_0 > 0$ произвольно мало. Если построить интеграл $\int\limits_0^1 (\quad) \exp(-2\pi i \alpha n)\, d\alpha$, где в скобках стоит выражение (3.5), то существенными будут значения α вида

$$\alpha = \frac{a}{x} + \frac{\theta n^{\varepsilon_0}}{n} \quad (x \leqslant \sqrt{n} \ln n)$$

или соответствующие значения для $y \leqslant \sqrt{n} \ln n$. Значит, в проблеме (3.1) можно произвести уравнивание с ошибкой $O(n^{(k/2-1/2)+\varepsilon})$.

Уравнивание в проблеме, содержащей общую квадратичную форму с двумя или более переменными, является несколько более сложным.

Возможность уравнивания в проблеме (3.1) с ошибкой $O(n^{(k/2-1/2)+\varepsilon})$ ведет к тому, что проблема оптимальной оценки ошибки в этой задаче связана с суммированием сумм Клостермана (2.1). В связи с этим возникает следующая гипотеза.

Гипотеза о суммах Клостермана. *Пусть N — большое число,*

$$T(N, g) = \sum_{x \bmod g} \exp \frac{2\pi i}{g} (x' + Nx) \text{ — *сумма Клостермана*,}$$

$$g_1 > N^{1/2-\varepsilon_0} \quad (\varepsilon_0 > 0 \textit{ произвольно малое}).$$

Тогда

$$\sum_{g \leqslant g_1} T(N, g) = O(g_1^{1+\varepsilon}) \quad \textit{для каждого } \varepsilon > 0. \tag{3.6}$$

Эта гипотеза влечет за собой оценку остаточного члена в проблеме (2.2) $F(x_1, \ldots, x_k) = n$, для четных k $|\sigma_F(n)| < \gamma_F(\varepsilon)\, n^{(k/4-1/2)+\varepsilon}$. Кроме того, доказательство этой гипотезы привело бы к существенному продвижению в проблеме подсчета целых точек внутри круга или в общем случае эллипсоида четной размерности. Эта гипотеза может рассматриваться как некоторый аналог известной гипотезы Хассе о поведении конгруэнц-дзета-функций, возникающих при редукции заданной кривой относительно всех простых модулей.

Оценка (3.6) является теоремой о поведении ряда $\sum_{g=1}^{\infty} T(N, g)/g^s$; суммы $T(N, g)$ появляются в процессе редукции последовательности кривых $C_p: y^p - y = Nx + 1/x$ (ср., например, [20]). В настоящее время мы не можем указать никакого пути для исследования гипотезы (3.6). Однако, используя некоторые свойства, относящиеся по существу к операторам Гекке, можно доказать некоторые «односторонние» аналоги указанной гипотезы (односторонние неравенства), относящиеся к суммированию сумм Клостермана.

§ 4. Некоторые неравенства, относящиеся к суммированию сумм Клостермана

Пусть Q — большое простое число; P — нечетное число, такое, что $P \leqslant Q^{\varepsilon_0}$ (ε_0 — малая константа); m — положительное число. Рассмотрим сумму Клостермана

$$S(P, m, Q) = \sum_{\substack{X \bmod Q \\ X \not\equiv 0 \pmod Q}} \exp \frac{2\pi i}{Q}(PX' + mX). \tag{4.1}$$

Пусть Q пробегает простые числа на отрезке $[\bar{Q}, \bar{Q} + \Delta]$, где $\Delta = \bar{Q}^{1-\varepsilon_1}$ (ε_1 — малое число, выбираемое как функция от ε_0). Пусть

$$\sum_m = \sum_{(Q)} S(P, m, Q). \tag{4.2}$$

Образуем сумму:

$$\sum_{m \leqslant M} \Big| \sum_m \Big|^2 = T_M. \tag{4.3}$$

Здесь M — параметр, в дальнейшем фиксированный. После некоторых элементарных преобразований получим:

$$T_M = \sum_{m \leqslant M} \sum_{\substack{Q_1, Q_2 \\ Q_1 \neq Q_2}} \sum_{X \bmod Q_1 Q_2} \exp \frac{2\pi i}{Q_1 Q_2}(P(Q_1^2 + Q_2^2) X' + mX) + \\ + \sum_{m \leqslant M} | S(P, m, Q)|^2. \tag{4.4}$$

Последняя сумма оценивается с помощью оценок А. Вейля (ср., например, [21, 20]) и имеет порядок $O(M\bar{Q}^{2+\varepsilon})$ для любого $\varepsilon > 0$. Очевидно, $T_M \geqslant 0$. Если просуммировать далее по $M \leqslant M_1$, а затем по $M_1 \leqslant M_2$, и так несколько раз, то мы получим, что положительные суммы и значения величины X, такие, что (X/Q_1Q_2) не очень мало, не будут существенными и приведут лишь к допустимой ошибке. Выбрав подходящим образом числа $M, M_1, M_2, \ldots$, можно обнаружить значение (X/Q_1Q_2), для которого невозможно пренебречь соответствующими членами, и, таким образом, установить область суммирования по X (во всех случаях мы будем брать $X = O(\bar{Q}^{\varepsilon_2})$, $\varepsilon_2 > 0$ мало).

Теперь можно применить элементарное соотношение

$$XX' + Q_1Q_2(Q_1Q_2)' \equiv 1 \pmod{XQ_1Q_2}, \tag{4.5}$$

на полезность которого указал автору И. В. Чулановский. С помощью этого соотношения можно преобразовывать выражения типа $\exp 2\pi\, iX'/Q_1Q_2$ в выражения типа $\exp -2\pi i\, (Q_1Q_2)'/X$, добавив дополнительные несущественные множители.

Приведем окончательный результат вычислений для частного случая.

Теорема 2. *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *имеем*

$$\sum_{x=1}^{\infty} y_r\left(\frac{P}{X}\right) X^r \varphi(X) \sum_{\substack{U \bmod X \\ (U,\, X)=1}} \cos\frac{2\pi P}{X}(U + U') \geqslant 0\,(X^{r+2+\varepsilon}). \tag{4.6}$$

Здесь $\varphi(x)$ — функция Эйлера, $r \geqslant 0$ — любая константа, а $y_r(z)$ — функция, которая может быть выражена через функции Бесселя. Она меняется очень медленно при $0 < z < 1$ (и $0 < c_1 < y_r(z) < c_2$ в этом интервале); при $z > 1$ функция $y_r(z)$ убывает очень быстро, так что, грубо говоря, суммирование в (4. 6) производится по $X \leqslant P$. Нижняя оценка (4. 6) не может быть существенно улучшена. Доказательство соответствующей верхней оценки привело бы к следствиям, аналогичным тем, что вытекают из гипотезы (3. 6), в частности, оно дало бы оптимальную оценку роста собственных значений операторов Гекке для любого целого измерения. Оценка (4. 6) может быть значительно обобщена выбором других областей суммирования по X.

Мы получаем также некоторые неравенства, связанные с суммами по X сумм Клостермана, содержащих члены

$$\cos\frac{2\pi}{X}(P_1U + U'),\quad \cos\frac{2\pi P_2}{X}(U + U') \ \text{ и } \ \cos\frac{2\pi}{X}(P_1U + P_2U').$$

§ 5. Некоторые неравенства для собственных значений операторов Гекке

Применение процесса уравнивания в случае тета-функций дает возможность вывести некоторые новые неравенства для собственных значений операторов Гекке. Рассмотрим тета-функцию типа $(-k, 1, 1)$ (k — целое) (ср. [19]); пусть $\mathfrak{m}$ — векторное пространство параболических форм, порожденных действием операторов Гекке на параболические формы, возникающие из нашей тета-функции посредством вычитания соответствующего ряда Эйзенштейна. Пусть $F_1(\tau), \ldots, F_s(\tau)$ — модулярные собственные функции операторов Гекке. Пусть $\lambda_\rho(m)$, $\rho = 1, \ldots, s$ — собственное значение, соответствующее оператору T_m. Имеет место известная гипотеза об оптимальных оценках собственных значений

$$|\lambda_\rho(m)| = O\left(m^{(k/2-1/2)+\varepsilon}\right) \text{ для всякого } \varepsilon > 0. \text{ (См. § 2).}$$

Хорошо известно, что эту гипотезу достаточно доказать для степеней всех простых чисел. Пусть p — большое простое число и M — число, такое, что $p \asymp M^{\varepsilon_0}$ ($\varepsilon_0 > 0$ — малая константа). Для доказательства упомянутой гипотезы достаточно доказать, что

$$\sum_{m \leqslant M} |\lambda_\rho(pm)|^2 = O\left(M^k p^{k-1+\varepsilon}\right) \tag{5.1}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Это есть следствие мультипликативных свойств собственных значений.

Прискорбным является тот факт, что оценка (5. 1) до сих пор не поддается доказательству. Однако можно получить следующую оценку для указанных выше собственных значений $\lambda_p(n)$.

Теорема 3.

$$\sum_{m\leqslant M} |\lambda_\rho(pm+l)|^2 = O(M^k p^{k-1+\varepsilon}) \quad \text{для } l=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1. \tag{5.2}$$

В этих случаях возможно даже дать асимптотическое выражение для левой части (5. 2), уточняющее (5. 2).

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы* 3, *то*

$$\sum_{m\leqslant M} |\lambda_\rho(pm+l)|^2 = \sigma_{pM} + O(M^k p^{k-3/2+\varepsilon}), \tag{5.3}$$

где σ_{pM} *не зависит от* $l=1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$ *и имеет оценку* $O(M^k p^{k-1+\varepsilon})$.

Случай $l=0$ резко отличается от других случаев.

Укажем еще одну гипотезу, которая привела бы к оптимальной оценке в проблеме собственных значений модулярных операторов. Пусть m — заданное нечетное число и Q пробегает нечетные числа $\leqslant m$.

Гипотеза.

$$\sum_{\substack{Q\leqslant m\\ Q \text{ нечетное}}} \ \sum_{\xi_Q^2\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, Q)} (-1)^{(1/2)(Q-1)} \exp\frac{2\pi i m\xi_Q}{Q} = O(m^{1/2+\varepsilon}). \tag{5.4}$$

Здесь ξ_Q *пробегает все решения сравнения* $\xi_Q^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ Q)$. (*Например, для простого* Q $\xi_Q \equiv \pm 1\ (\mathrm{mod}\ Q)$).

Можно доказать, что левая часть (5. 4) имеет оценку $O(m^{3/4+\varepsilon})$.

§ 6. Некоторые асимптотические аналоги операторов Гекке. Проблема кратных сумм Гаусса

Теория операторов Гекке дает возможность выразить количество решений уравнений $F(x_1,\ \ldots,\ x_{2k}) = p$ с помощью «дискретного» оператора

$$\vartheta\,|\,T_p = \varepsilon(p)\,p^{k-1}\,\vartheta(p\tau) + \frac{1}{p}\sum_{l=0}^{p-1}\vartheta\left(\frac{\tau+l}{p}\right), \tag{6.1}$$

так же как с помощью интегрального оператора, указанного в методе (I), § 1.

Операторы Гекке действуют только в пространстве модулярных форм целой размерности, в частности тета-функций, порожденных положительными квадратичными формами с четным числом переменных. Здесь мы рассмотрим действие по существу таких же операторов в другой области. Наши рассмотрения будут асимптотическими. Пусть p — большое простое число, N — большой параметр; $\theta_1 \asymp 1/N$; $s_j > 0$ — фиксированные целые числа; рассмотрим произведение k тета-функций ($k \geqslant 1$ четное или нечетное):

$$\Pi = \prod_{j=1}^{k} \sum_{\xi_j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{N} - \frac{2\pi i A}{Q} - i\theta_1\right) s_j \xi_j^2. \tag{6.2}$$

Здесь A и Q — целые числа; $(A, C) = 1$; Q возрастает вместе с N (далее будет указываться, каким образом).

Применим к $\prod$ оператор τ_l, соответствующий

$$\frac{1}{p}\vartheta\left(\frac{\tau+l}{p}\right)$$

в формуле (6.1); получим

$$\tau_l(\Pi) = \frac{1}{p}\prod_{j=1}^{k} \sum_{\xi_j=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{Np} - \frac{2\pi i A_l}{Qp} - i\theta\right) s_j \xi_j^2, \tag{6.3}$$

где $A_l = A + lQ$; $\theta = \theta_1/p$.

Применяя элементарную формулу преобразований θ-функций, находим:

$$\tau_l(\Pi) = \frac{1}{Qp^{n+1}}\left(\frac{\pi_k}{s_1 s_2 \ldots s_k}\right)^{1/2} \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{Np} - i\theta\right)^{-1/2} S_{s_1 A_l, Qp} \ldots$$
$$\ldots S_{s_k A_l, Qp} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_k=-\infty}^{\infty} x_{\nu_1} \ldots x_{\nu_k} \exp - \frac{2\pi i}{Qp} 4' A_l' \times$$
$$\times (s_1' \nu_1^2 + \ldots + s_n' \nu_n^2) \exp - \frac{\pi^2}{(Qp)^2 (1/Np - i\theta)} (s_1^{-1}\nu_1^2 + \ldots + s_k^{-1}\nu_k^2), \tag{6.4}$$

где $x_{\nu_i} = 2\,(\nu_i \neq 0)$, $x_0 = 1$, $S_{s_j A_l, Qp}$ — сумма Гаусса, штрих означает обратный элемент $\operatorname{mod} Qp$. Мы полагаем Q нечетным; $Q \asymp \sqrt{N}$, $Qp \asymp \sqrt{N}\,p$. Имеем

$$S_{s_j A_l, Qp} = \left(\frac{s_j A_l}{Qp}\right)(Qp)^{1/2}, \text{ если } (A_l, Qp) = 1. \tag{6.5}$$

Введем теперь оператор $T^{(p)}$, соответствующий

$$\frac{1}{p}\sum_{l=0}^{p-1}\vartheta\left(\frac{\tau+l}{p}\right).$$

Просуммируем по $l = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, учитывая (6.5). Если $(A_l, Op) = 1$ и k четное, то получаем

$$\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{s_j A_l}{Qp}\right) = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{s_j}{Qp}\right),$$

и если отбросить единственный член, для которого $(A_l, Qp) > 1$, то можно заменить $T^{(p)}(\Pi)$ с допустимой ошибкой на величину

$$T_1^{(p)}(\Pi) = \frac{1}{Q^{k/2} p^{k/2+1}} \left(\frac{\pi^k}{s_1 s_2 \ldots s_k}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{Np} - i\theta\right)^{-k/2} \times$$

$$\times \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_k = -\infty}^{\infty} x_{\nu_1} \ldots x_{\nu_k} \sum_{\substack{l=0 \\ A_l \not\equiv 0 \pmod p}}^{p-1} \exp - \frac{2\pi i}{Qp} 4A_l (s_1 \nu_1^2 + \ldots + s_k \nu_k^2) \times$$

$$\times \exp - \frac{\pi^2}{(Qp)^2 (1/Np - i\theta)} (s_1^{-1}\nu_1^2 + \ldots + s_n^{-1}\nu_k^2). \qquad (6.6)$$

При суммировании по A_l отбираются значения формы $\Phi(\nu_1, \ldots, \nu_k)$, сопряженной с $s_1\nu_1^2 + \ldots + s_k\nu_k^2$, делящиеся на p; соответствующая ошибка является допустимой. Каждое из этих значений снабжено коэффициентом затухания типа e^{-cr}. Это позволяет выразить количество решений уравнения $\Phi(\nu_1, \ldots, \nu_k) = p$ через линейные комбинации выражений $T^{(p)}(\Pi)$. Для описанного случая (k четное, $s_j > 0$) было бы проще и удобнее использовать операторы Гекке. Но зона действия операторов $T^{(p)}$ несколько больше.

Рассмотрим случай нечетного k (например, $k=3$, случай тернарных форм). Здесь будем полагать, что число Q делится на p и содержит p в нечетной степени: $p^{2m+1} \,||\, Q$. В таком случае для $A_l \not\equiv 0 \pmod p$ мы получим

$$\prod_{j=1}^{k} \left(\frac{s_j A_l}{Q_p}\right) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{s_j A}{Q_1}\right),$$

так что это число не зависит от l. Это позволяет выразить с допустимой ошибкой количество решений уравнения $\Phi(\nu, \ldots, \nu_k) = p$ также для случая нечетного k посредством линейной комбинации операторов $T^{(p)}$; однако в аргументе

$$-\frac{1}{N} + \frac{2\pi i A}{Q} - i\theta$$

(см. (6.2)) число Q должно содержать p в нечетной степени. Следовательно, в случае тета-функций нецелой размерности коэффициенты можно выразить через «дискретные» операторы, действующие на произведения тета-функций, аргументы которых можно менять не во всей полуплоскости, а в точках, мнимые компоненты которых удовлетворяют некоторому простому арифметическому условию, связанному с представляемым числом p.

Можно заметить, что такие же рассуждения пригодны до некоторой степени для взвешенных представлений числа p неопределенными квадратичными формами. Для этого следует взять в формуле (6. 2) числа A/Q с положительными или же отрицательными знаками. Для форм с четным числом переменных получаются выражения для взвешенного количества представлений с допустимой ошибкой, выражаемой через операторы $T^{(p)}$; для форм с нечетным числом переменных следует наложить некоторые требования арифметической природы описанного выше типа на аргументы произведения тета-функций.

Такие же арифметические условия позволяют получить несколько более общие операторы с аналогичными свойствами: $T_\xi^{(p)}$ определяется как

$$\frac{1}{p}\sum_{l=0}^{p-1}\exp 2\pi i\frac{\xi l}{p}T_l;$$

для $\xi=0$ они совпадают с рассмотренными ранее.

Вернемся теперь к проблеме кратных сумм Гаусса; она связана с операторами Гекке и проблемой оценок их собственных значений. Пусть $f(\tau)=f_1(\tau)-f_2(\tau)$ — разность двух тета-функций, являющаяся параболической формой целой размерности $-k$. Например, пусть $f(\tau)=\Sigma\exp 2\pi iF_1\tau-\Sigma\exp 2\pi iF_2\tau$, где F_1 и F_2 — положительные квадратичные формы одного и того же дискриминанта и рода.

Пусть

$$\tau=\frac{i}{N}+2\pi\frac{A}{Q}+\theta$$

— точка «общего положения». Это значит, что A/Q — неприводимая дробь и Q не отличается существенно от $\sqrt{N}$, скажем,

$$\sqrt{\frac{N}{\ln N}}\leqslant Q\leqslant\sqrt{N\ln N}\quad \text{и}\quad \theta=O\left(\frac{1}{Q^2}\right).$$

Пусть p — большое простое число и T_p — оператор Гекке для p, так что

$$f\,|\,T_p=\varepsilon(p)\,p^{k-1}f(p\tau)+\frac{1}{p}\sum_{l=0}^{p-1}f\left(\frac{\tau+l}{p}\right)=\sum_\rho\lambda_\rho(p)\,f_\rho(\tau),$$

где $\lambda_\rho(p)$ и $f_\rho(\tau)$ — соответствующие собственные значения и собственные функции. Допустимой ошибкой здесь будет $O(p^{(k/2-1/2)+\varepsilon})$. Предположим, что $p\asymp N^{\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0>0$ — малая константа. Легко доказать, что первый член в приведенной выше формуле, $\varepsilon(p)\,p^{k-1}f(p\tau)$, может быть отброшен с допустимой ошибкой. Таким образом, проблема оценки собственных значений сведется к проблеме доказательства в подходящей точке общего положения

$$\tau=\frac{i}{N}+2\pi\frac{A}{Q}+\theta$$

оценки

$$\sum_{l=0}^{p-1}f\left(\frac{\tau+l}{p}\right)=O\left(N^kp^{k+1/2+\varepsilon}\right),$$

тогда как тривиальной оценкой является $O(N^k p^{k+1+\varepsilon})$. Характерная черта этой задачи состоит в том, что для удобства допускается произвольный выбор точки общего положения (скажем, можно взять $Q=q^s$, где q простое, например, само число p) и $\theta=0$.

В случае, когда $f(\tau)$ порождается формами одного и того же рода $F_1=F_1(x_1, \ldots, x_{2k})$, $F_2=F_2(x_1, \ldots, x_{2k})$, мы имеем следующую проблему о кратных суммах Гаусса. Рассмотрим разность типа

$$\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{x_1, \ldots, x_{2k}} \exp\left(-\frac{1}{Np} + 2\pi i\left(\frac{A}{Q} + \frac{l}{p}\right) F_1(x_1, \ldots, x_{2k})\right) -$$
$$-\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{x_1, \ldots, x_{2k}} \exp\left(-\frac{1}{Np} + 2\pi i\left(\frac{A}{Q} + \frac{l}{p}\right) F_2(x_1, \ldots, x_{2k})\right). \qquad (6.7)$$

Требуется исследовать, как можно выбрать число A/Q в виде несократимой дроби, такое, что $\sqrt{N}/\ln N \leqslant Q \leqslant \sqrt{N \ln N}$ и что разность (6.7) будет оцениваться как $O(N^k p^{k+1/2+\varepsilon})$. Очевидно, стоит взять Q вида $Q=p^s$, а затем выбрать соответствующее число A.

Литература

1. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л., 1961. 208 с.
2. Бредихин Б. М. Бинарные аддитивные проблемы с простыми числами. — ДАН СССР, 1962, т. 142, № 4, с. 766—768.
3. Eichler M. Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion. — Arch. Math., 1954, Bd 5, № 4—6, S. 355—366.
4. Андрианов А. Н. Обобщение одной теоремы М. Эйхлера из теории кватернарных квадратичных форм. — ДАН СССР, 1961, т. 141, № 1, с. 9—12.
5. Андрианов А. Н. Об аналитической арифметике квадратичных форм с нечетным числом переменных в связи с теорией модулярных форм. — ДАН СССР, 1962, т. 145, № 2, с. 241—244.
6. Виноградов А. И. Обобщение формулы Клостермана. — ДАН СССР, 1962, т. 146, № 4, с. 754—756.
7. Линник Ю. В. Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1952, т. 16, № 6, с. 503—520.
8. Линник Ю. В. Складывание простых чисел со степенями одного и того же числа. — Мат. сб., 1953, т. 32, вып. 1, с. 3—60.
9. Виноградов А. И. Об одной «почти бинарной» задаче. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1956, т. 20, № 6, с. 713—750.
10. Kloosterman H. D. On the representation of numbers in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$. — Acta Math., 1926, vol. 49, p. 407—464.
11. Малышев А. В. О распределении целых точек на четырехмерной сфере. — ДАН СССР, 1957, т. 114, № 1, с. 25—28.
12. Малышев А. В. Асимптотическое распределение целых точек на некоторых эллипсоидах. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 4, с. 457—500.
13. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами с четырьмя и более переменными. — ДАН СССР, 1960, т. 133, № 6, с. 1294—1297.

14. Pommerenke Ch. Uber die Gleichverteilung von Gitterpunkten auf m-dimensionalen Ellipsoiden. — Acta arithm., 1959, Bd 5, № 2, S. 227—257.
15. Eichler M. Quadratische Formen und Modulfunktionen. — Acta arithm., 1958, Bd 4, № 3, S. 217—239.
16. Deuring M. The zeta-functions of algebraic curves and varietes. — J. Indian Math. Soc., 1956, vol. 20, № 1—3, p. 89—101.
17. Линник Ю. В. Некоторые применения неевклидовых геометрий к теории характеров Дирихле; аналоги эргодических теорем. — Труды 3 Всесоюз. мат. съезда. Т. 3. М., 1958, с. 21—29.
18. Линник Ю. В. Асимптотическое распределение приведенных бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского. 1. — Вестник ЛГУ, 1955, № 2. Сер. мат., физ., хим., вып. 1, с. 3—23.
19. Hecke E. Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen. — Mat.-fys. medd. Kgl. dan. vid. selsk., 1940, Bd 13, № 12. 134 S.
20. Carlitz L., Uchiyama S. Bounds for exponential sums. — Duke Math. J., 1957, vol. 24, № 1, p. 37—41.
21. Weil A. Number of solutions of equations in finite fields. — Bull. Amer. Math. Soc., 1949, vol. 55, p. 497—508.

О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ С РАЗНОСТЬЮ, РАВНОЙ СТЕПЕНИ ПРОСТОГО ЧИСЛА

ON PRIME NUMBERS IN AN ARITHMETIC PROGRESSION WITH A PRIME-POWER DIFFERENCE

Совместно с М. Б. Барбаном и Н. Г. Чудаковым

Acta arithm., 1964, vol. 9, № 4, S. 375—390

§ 1. Распределение простых чисел на отрезках арифметической прогрессии привлекало внимание многих авторов с момента доказательства знаменитой теоремы Дирихле (1837 г.).

Расширенная гипотеза Римана, не доказанная до сих пор, привела бы к следующему асимптотическому закону. Пусть $D>1$ — натуральное число, $(l, D)=1$, $\varepsilon>0$ — произвольно малое число, а x — произвольно большое число. Тогда

$$\pi(x, D, l)=h^{-1}\operatorname{li} x\left(1+O(\lg x)^{-M}\right) \tag{1.1}$$

для

$$x\geqslant D^{2+\varepsilon},\quad h=\varphi(D),\quad \pi(x, D, l)=\sum 1,\quad p\equiv l \pmod D,\quad p\leqslant x.$$

В частности, минимальное простое число $P_{\min}(D, l)$ в прогрессии $n\equiv l \pmod D$ должно удовлетворять неравенству

$$P_{\min}(D, l)<c(\varepsilon)D^{2+\varepsilon}. \tag{1.2}$$

В настоящее время у нас нет способов доказательства асимптотического закона (1. 1); то же самое можно сказать и об (1. 2). В статье [1], простейшим вариантом которой является работа [2], было показано, что существует константа $c>1$, такая, что

$$P_{\min}(D, l)<D^{c}. \tag{1.3}$$

Пань Чэн-дун [3] показал в 1957 г. с помощью работ [1] и [2], что $c \leqslant 5448$. Результат этого автора является лучшим на сегодняшний день.

Однако для некоторых последовательностей $\nu = \{D\}$ модулей D можно ожидать существенного улучшения оценки константы c. Очевидно, для этой цели требуется больше информации о нулях рядов $L(s, \chi)$, чем в общем случае. В частности, для модуля типа $D = p^n$, где $p \geqslant 3$ — фиксированное простое число, $n = 1, 2, \ldots$, новые важные результаты были получены А. Г. Постниковым [4] (см. также [5]). Исследования А. Г. Постникова были продолжены С. М. Розиным [6]. Авторы настоящей статьи изучали асимптотический закон, действующий на коротких отрезках арифметических прогрессий с разностью $D = p^n$. Получен следующий результат.

Теорема. *Пусть $p \geqslant 3$ — простое число, $D = p^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Тогда имеет место следующий асимптотический закон:*

$$\pi(x, D, l) = h^{-1} \operatorname{li} x \left(1 + O(\lg x)^{-M}\right) \tag{1.4}$$

для $x \geqslant D^{8/3+\varepsilon}$ и M произвольно большого.

Очевидно, что для модуля указанного выше типа асимптотика (1.4) влечет неравенство

$$P_{\min}(D, l) < c_1(\varepsilon) D^{8/3+\varepsilon}. \tag{1.5}$$

Ясно, что (1.4) близко к (1.1).

Символ O может зависеть только от ε. Можно найти константу c_2, такую, что $\pi(x, D, l) > 0$ при $n \geqslant c_2 \exp p^2$ для любого простого $p \geqslant 3$.

Обозначения:

$v = h^{-1} x$;

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv l \pmod D, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv l \pmod D, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

$\Lambda(n)$ — функция Мангольдта,

$$S_m(x) = S_m(x, D, l) = \frac{1}{m!} \sum_{m \leqslant x} a_n \Lambda(n) \lg \left(\frac{x}{n}\right)^m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

в частности,

$$S_0(x) = \psi(x, D, l) = \sum_{n \leqslant x} a_n \Lambda(n);$$

$\delta_m(x) = v^{-1}(S_m(x) - v) = \delta_m(x, D, l)$,

$d_m(x) = \sup |\delta_m(u, D, l)|$ для $u \geqslant x$, $(l, D) = 1$;

$\rho = \beta + i\gamma$ — нули функции $L(s, \chi)$ в полосе $0 < \beta < 1$;

$\mathfrak{a}(D)$ — множество ρ для всех $L(s, \chi) \bmod D$;

$N(\sigma, T)$ — число элементов из $\mathfrak{a}(D)$, находящихся в прямоугольнике $\sigma \leqslant \gamma \leqslant 1$, $|\gamma| \leqslant T$;

$\mathfrak{a}_\nu(D)$ — множество элементов из $\mathfrak{a}(D)$, находящихся в прямоугольнике

$$0 < \beta < 1, \quad \nu \leqslant |\gamma| < \nu + 1 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

$\rho(\chi)$ — множество всех ρ для заданной $L(s, \chi)$;

$\beta(t) = \max \beta$ для всех β с ординатой $\gamma = t$; если таких нулей нет, то $\beta = 1/2$;

$$\beta_\nu(t) = \max \beta(t), \quad \nu \leqslant |t| \leqslant \nu + 1 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = -h^{-1} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \frac{L'}{L}(s, \chi).$$

Позднее мы будем рассматривать некоторые подмножества $\vartheta = \{D\}$ модулей D. В дальнейшем c означают константы, независимые от ϑ, x, D, l; такой же смысл мы будем придавать символам O и $\ll$. Буквой b будем обозначать константы, зависящие от ϑ, но не от x, D, l.

Хорошо известно (см. [7], теорема 44 на с. 128), что существует абсолютная константа, такая, что для всех $\rho \in \mathfrak{a}(D)$, за исключением, быть может, одного реального $\rho = \beta_1$, выполняется следующее неравенство: $|\rho| \geqslant \mu (\lg D)^{-1}$ ($\mu > 0$ — константа). Нуль β, если он существует для данного $\mathfrak{a}(D)$, называется и с к л ю ч и т е л ь н ы м н у л е м $\operatorname{mod} D$.

Об этом нуле нам известно (теорема Зигеля, см. [7], с. 160), что для любого $\varepsilon > 0$

$$\beta_1 \geqslant \mu'' D^{-\varepsilon},$$

где $\mu'' = \mu''(\varepsilon)$. В настоящий момент нет никаких способов его алгорифмического вычисления. Классические теоремы, связанные с функциями $\pi(x, D, l)$ и $\psi(x, D, l)$ (см. [7], с. 170), позволяют свести доказательство нашей основной теоремы к оценке значения $\delta_0(x)$ для $x \geqslant D^{8/3+\varepsilon}$; мы должны лишь показать, что для таких значений x остается в силе оценка $d_0(x, D) \leqslant b_1 (\lg x)^{-M}$. Здесь $x \geqslant D^{8/3+\varepsilon}$, $D = p^n$, а M — произвольное положительное число.

§ 2. Л е м м а 1. *Пусть $x > h$; тогда для любого $\varepsilon > 0$ и $m = 1, 2, 3, \ldots$ имеет место следующая оценка:*

$$|\delta_m(x)| \leqslant c_1 \lg x \sum_{\nu=0}^{\infty} I_\nu + O(hx^{-1+\varepsilon}),$$

где

$$I_0 = \int_0^{\beta_0} N(\sigma, 0)\, x^{\sigma-1} d\sigma,$$

$$I_\nu = \nu^{-m-1} \int_0^{\beta_\nu} (N(\sigma, \nu+1) - N(\sigma, \nu))\, x^{\sigma-1} d\sigma \quad \textit{для} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Константа c_1 и O-символ второго слагаемого справа зависят от ε и m; если для заданного D не существует β_1, то O-символ может быть эффективно найден.

Доказательство. Хорошо известно, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}\frac{y^s}{s^{m+1}}\,ds=\begin{cases}\frac{1}{m!}\lg^m y, & \text{если } y\geqslant 1,\\ 0, & \text{если } 0<y<1.\end{cases}$$

Значит, для $x>0$ имеет место

$$S_m(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)}\frac{x^s}{s^{m+1}}f(s)\,ds,$$

поскольку ряд $f(s)$ сходится абсолютно в полуплоскости $\sigma>1$.

Контур интегрирования может быть заменен прямой $\sigma=-1/2$, так как имеется последовательнсть прямых $t=T_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, $T_n\to\infty$ при $n\to\infty$, такая, что $f(s)\ll\lg^2(DT_n)$ на этих прямых (см. [8], с. 226). Принимая во внимание все особые точки подынтегрального выражения, мы получим с помощью теоремы о вычетах для аналитических функций:

$$\delta_m(x)=\delta_{m_1}(x)+\delta_{m_2}(x)+\delta_{m_3}(x), \tag{2.1}$$

$$\delta_{m_1}(x)=-\sum_{\chi}\bar\chi(l)\sum_{\rho(\chi)}\frac{x^{\rho-1}}{\rho^{m+1}},$$

$$\delta_{m_2}(x)=-x^{-1}\sum_{\chi}\bar\chi(l)\operatorname*{Res}_{s=0}\frac{x^s}{s^{m+1}}\frac{L'}{L}(s,\chi),$$

$$\delta_{m_3}(x)=\frac{v^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{(-1/2)}\frac{x^s}{s^{m+1}}f(s)\,ds.$$

Прежде всего заметим, что

$$|\delta_{m_1}(x)|\leqslant\sum_{\nu=0}^{\infty}Q_\nu,\quad Q_\nu=\sum_{\rho\in\mathfrak{a}_\nu}x^{\beta-1}|\rho|^{-m-1};$$

для $\nu\geqslant 1$ имеем:

$$Q_\nu\ll\nu^{-m-1}\sum_{\nu\leqslant|\gamma|\leqslant\nu+1}x^{\beta-1}. \tag{2.2}$$

Чтобы оценить значение Q_0, разобьем все нули $\mathfrak{a}_0(D)$ на три группы:

$$|\rho|\geqslant\varepsilon/2,\quad \varepsilon/2\geqslant|\rho|\geqslant(\lg D)^{-1},\quad \mu(\lg D)^{-1}\geqslant|\rho|$$

(вторая и третья группы могут быть пусты для заданного $\varepsilon>0$; β_1 может принадлежать первой группе).

Вспомнив оценку для β_1 (§ 1) и принимая во внимание хорошо известную оценку $N(0, 1)\ll h\lg D$, которая является частным случаем оценок

$$N(0, 1)\ll h\lg D,\quad N(0, \nu+1)-N(0, \nu)\ll h\lg D\nu \tag{2.3}$$

(см. [8], с. 220—221), мы получим после некоторых несложных вычислений

$$Q_0 \ll \sum_{0 \leqslant |\gamma| \leqslant 1} x^{\beta-1} + hx^{-1+\varepsilon/2} (\lg D)^{m+2} + \frac{x^{\beta_1 - 1}}{\beta_1^{m+1}} \ll \sum_{0 \leqslant |\gamma| \leqslant 1} x^{\beta-1} + hx^{-1+\varepsilon}. \quad (2.4)$$

С другой стороны, теория интегралов Стилтьеса дает нам возможность получить равенства

$$\sum_{\nu \leqslant |\gamma| \leqslant \nu+1} x^{\beta-1} = \lg x \int_0^{\beta_\nu} (N(\sigma, \nu+1) - N(\sigma, \nu))\, x^{\sigma-1} d\sigma +$$

$$+ (N(0, \nu+1) - N(0, \nu))\, x^{-1} \quad \text{для} \quad \nu \geqslant 1, \quad (2.5)$$

$$\sum_{0 \leqslant |\gamma| \leqslant 1} x^{\beta-1} = \lg x \int_0^{\beta_0} N(\sigma, 1)\, x^{\sigma-1} d\sigma + N(0, 1)\, x^{-1} \quad \text{для} \quad \nu = 0.$$

Далее, оценки (2. 3) дают

$$x^{-1} N(0, 1) + x^{-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-m-1} (N(0, \nu+1) - N(0, \nu)) \ll x^{-1} h \lg D. \quad (2.6)$$

Соотношения (2. 2), (2. 4)—(2. 6) приводят к соотношению

$$|\delta_{m_1}(x)| \ll \lg x \sum_{\nu=0}^{\infty} I_\nu + hx^{-1+\varepsilon}. \quad (2.7)$$

Для оценки $\delta_{m_2}(x)$ мы снова используем упомянутое выше разбиение $\mathfrak{a}_0(D)$. Кроме того, используем информацию об $\frac{L'}{L}(s, \chi)$, изложенную в [8] (с. 218 и 228). В окрестности $s = 0$ полагаем

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = \frac{\nu_0}{s} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k s^k.$$

Тогда

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \frac{x^s}{s^{m+1}} \frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{\mu=0}^{m} \frac{1}{\mu!\,(m-\mu)!} (\lg x)^\mu d_{m-\mu} + \frac{\nu_0}{(m+1)!} (\lg x)^{m+1}. \quad (2.8)$$

Почленное дифференцирование равенства (2. 10) из [8] (с. 218) приводит к соотношению

$$d_k = -\frac{1}{2k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{2}(s+a) \right) - \frac{\nu_0}{s} \right] - \sum_{\rho} \rho^{-k-1} \ll O(\lg D)^{k+2} + \beta_1^{-k-1};$$

кроме того, мы имеем

$$\nu_0 = O(\lg D). \quad (2.9)$$

Соотношения (2.1), (2.8) и (2.9) дают

$$|\delta_{m_2}(x)| \leqslant x^{-1} h \max_{\chi} \left| \operatorname*{Res}_{s=0} \frac{x^{\rho}}{s^{m+1}} \frac{L'}{L}(s, \chi) \right| \leqslant h x^{-1+\varepsilon}. \tag{2.10}$$

Используя оценку

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) \ll \lg D\,(|s| + 2)$$

для $\sigma < 0$ (ср. [8], с. 227), мы наконец получим

$$|\delta_{m_3}(x)| \ll x^{-3/2} h \lg D \ll h x^{-1+\varepsilon}. \tag{2.11}$$

Соотношения (2.7), (2.10) и (2.11) доказывают лемму 1.

Лемма 2. *Пусть последовательность* ϑ *такова, что*

$$N(\sigma, T) < b_2 T^A D^{B(1-\sigma)} \lg^C D, \tag{α}$$

$$\beta(\gamma) \leqslant 1 - \eta(D) \quad \text{для} \quad |\gamma| \leqslant \tau. \tag{β}$$

(*Величины* A, B, C, τ, $\eta(D)$ *определяются* ϑ).

Тогда для натурального $m \geqslant A + 1$, *фиксированного произвольно малого* $\varepsilon > 0$ *и* $\lambda = (\lg D)^{-1}(\lg x D^{-B}) \geqslant \varepsilon$ *имеет место следующая оценка*:

$$|\delta_m(x)| \leqslant b_3(\varepsilon) \lg^C D \left[D^{-\eta(D)\lambda} + \sum_{\nu=\tau}^{\infty} \nu^{-2} \exp\left(-c_3 \lambda \frac{\lg D}{\lg D + \lg \nu}\right)\right] +$$
$$+ O(h x^{-1+\varepsilon}).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из-за свойства (β) в нашем случае нет нуля β_1. Используя теперь свойство (α), мы получим, по лемме 1, оценку для величины I_ν: при $\nu \leqslant \tau$

$$I_\nu \ll \nu^{-m-1} \int_0^{\beta_\nu} N(\sigma, \nu+1) x^{\sigma-1} d\sigma \ll b_2 (\nu+1)^{A-m-1} \lg^C D \left(\lg \frac{x}{D^B}\right)^{-1} \times$$
$$\times D^{\lambda(\beta_\nu - 1)} \ll b_2 \nu^{-2} \lg^C D\,(\lambda \lg D)^{-1} D^{-\lambda\eta(D)};$$

аналогично

$$I_0 \ll b_2 D^{-\lambda\eta(D)} \lg^C D\,(\lambda \lg D)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\lg x \sum_{\nu=0}^{\tau} I_\nu \ll b_2 D^{-\lambda\eta(D)} (\lg D)^C \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2} \ll b_2 D^{-\lambda\eta(D)} (\lg D)^C. \tag{2.12}$$

При $\nu > \tau$ используем первую теорему Пейджа (см. [7], теорема 40 на с. 115):

$$1 - \beta_\nu \geqslant c_3 (\lg D\nu)^{-1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Эта теорема дает для I_ν оценку

$$(\lg x) I_\nu \ll b_2 \nu^2 \lg^C D \exp\left(-c_3 \lambda \frac{\lg D}{\lg D + \lg \nu}\right). \tag{2.13}$$

(2.12) и (2.13) доказывают лемму 2.

Следствие. *Если последовательность* ϑ *такова, что свойство* (β) *имеет вид*

$$\eta(D) = b_4 (\lg D)^{-a}, \quad 0 < a < 1,$$

$$\tau = (\lg D)^M, \ M > 0, \ \textit{и, кроме того,} \ B \geqslant 2,$$

то

$$d_m(x, D) \ll b_5(\varepsilon)(\lg x)^{-M/2} \ \textit{для} \ x > D^{B+\varepsilon}.$$

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$hx^{-1+\varepsilon} = O\left((\lg x)^{-M}\right),$$

$$|\delta_m(x)| \leqslant b_3(\varepsilon) \lg^C D \Bigg[\exp\left(-b_4\lambda (\lg D)^{1-a}\right) +$$

$$+ \sum_{\nu=\tau}^{\infty} \nu^{-2} \exp\left(-c_3\lambda \frac{\lg D}{\lg D + \lg \nu}\right)\Bigg] + O\left(hx^{-1/\varepsilon}\right).$$

Следовательно, полагая

$$Q_1 = (\lg x)^{M/2} \lg^C D \exp\left(-b_4\lambda (\lg D)^{1-a}\right),$$

$$\delta_\nu = (\lg x)^{M/2} \nu^{-2} \exp\left(-c_3\lambda \frac{\lg D}{\lg D + \lg \nu}\right),$$

$$\nu_0 = (\lg x)^M,$$

получим

$$\lg Q_1 \leqslant (M + C) \lg\lg D + M \lg(\lambda + B) - b_4\lambda(\lg D)^{1-a} \leqslant -\frac{1}{2} b_4\lambda (\lg D)^{1-a}$$

для $\lambda \geqslant \lambda_0(m)$ равномерно по D. Значит, для всех $\lambda \geqslant \varepsilon$, $D \in \vartheta$ имеем

$$Q_1 \leqslant b_6. \tag{2.14}$$

Аналогично для $\tau \leqslant \nu \leqslant \nu_0$ получаем оценку

$$\lg\left(\nu^{3/2}\delta_\nu\right) \leqslant -c_3\lambda \frac{\lg D}{\lg D + \lg \nu_0} + \frac{M}{2} \lg(\lambda + B).$$

Но $\lg \nu_0 = O(\lambda \lg D)$ и $\lg(\lambda + B) = O(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$; эти соотношения имеют место равномерно по D; значит, мы имеем для достаточно большого λ (равномерно по D)

$$\lg \nu^{3/2}\delta_\nu \leqslant 0 \quad \text{или} \quad \nu^{3/2}\delta_\nu \leqslant b_7;$$

следовательно,

$$\sum_{\nu=\tau}^{\nu_0} \delta_\nu \leqslant b_7 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-3/2} \leqslant b_7'. \tag{2.15}$$

И наконец, имеем

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \delta_\nu \leqslant (\lg x)^{M/2} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \nu^{-2} \ll (\lg x)^{M/2} \nu_0^{-1} \ll 1. \tag{2.16}$$

Соотношения (2.14)—(2.16) показывают, что при условиях леммы 2

$$(\lg x)^{M/2} |\delta_m(x)| \leqslant b_5(\varepsilon),$$

что и доказывает наше следствие.

Заметим теперь, что функции $S_\nu(x)$ ($\nu=0, 1, 2, \ldots$) монотонно возрастают по x; все они непрерывны при $\nu \geqslant 1$; наконец,

$$\frac{\partial}{\partial u} S_\nu(xe^u) = S_{\nu-1}(xe^u)$$

при $\nu \geqslant 2$ и $xe^u \geqslant 1$ для заданного D.

Из асимптотического закона о простых числах в прогрессиях немедленно следует, что для каждого натурального ν существует хотя бы одна функция $x_\nu(D)$, такая, что

$$d_\nu(x_\nu(D), D) \longrightarrow 0,$$

когда D пробегает все натуральные числа. Класс таких функций для заданного ν будем обозначать через P_ν.

Если задана последовательность ϑ, можно рассматривать задачу построения для нее функций упомянутого выше типа, которые возрастают сколь угодно медленно при $D \to \infty$. Кроме того, нас будет интересовать оценка величины $d_\nu(x_\nu(D), D)$.

Лемма 3. *Пусть $x_\nu \in P_\nu$ для некоторого ν и заданной последовательности ϑ; тогда*:

1) $x_\mu = e^{\nu-\mu} x_\nu \in P_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu$),

2) $d_0(x_0(D), D) \leqslant b_8 d_\nu^{1/2^\nu}$.

Доказательство. Выберем D_ν столь большим, что $d_\nu(x_\nu(D), D) \leqslant 1$ для всех $D \geqslant D_\nu$. Теорема о среднем значении дает

$$S_\nu(xe^\eta) - S_\nu(x) = \eta S_{\eta-1}(xe^{\eta\theta}),$$

$$S_\nu(x) - S_\nu(xe^{-\eta}) = \eta S_{\nu-1}(xe^{-\theta'\eta}),$$

где $0 \leqslant \theta,\ \theta' \leqslant 1,\ \eta > 0$. Поскольку $S_{\nu-1}(xe^u)$ монотонна, выполняются следующие неравенства:

$$S_{\nu-1}(xe^{-\theta'\eta}) \leqslant S_{\nu-1}(x) \leqslant S_{\nu-1}(xe^{\theta\eta}).$$

С другой стороны, для $\eta \leqslant 1$ и $x \geqslant x_\nu e$ имеем оценку

$$S_\nu(x) - S_\nu(xe^{-\eta}) = v\eta + O(v\eta^2) + O(vd_\nu),$$

где $d_\nu = d_\nu(x_\nu(D), D)$. Аналогичная оценка имеет место также для $S_\nu(xe^\eta) - S_\nu(x)$. Положим теперь $\eta = \sqrt{d_\nu} \leqslant 1$. Сравнивая упомянутые выше соотношения, получим

$$|\delta_{\nu-1}(x)| \leqslant b_9 \sqrt{d_\nu} \text{ для } x \geqslant x_\nu l,$$

т. е.

$$d_{\nu-1} = d_{\nu-1}(x_\nu l, D) \leqslant b_9 \sqrt{d_\nu}. \tag{2.17}$$

Значит, $d_{\nu-1} \to 0$ при $D \to \infty$. Следовательно,

$$x_\nu l \in P_{\nu-1}.$$

Применяя этот процесс индукции для всех значений x_ν от заданного ν до $\nu=2$, мы установим справедливость первого утверждения леммы 3 вплоть до значения $\nu=1$. Переход от $\nu=1$ к $\nu=0$ совершается, как в статье [9] (с. 216). Второе утверждение леммы 3 получается в результате ν-кратной итерации соотношения (2. 17).

Лемма 4. *Пусть $T \geqslant 1$ и для всех характеров $\chi \bmod D$ с $D \in \vartheta$ имеет место следующая оценка:*

$$\max_\chi \left| L\left(\frac{1}{2}+it,\ \chi\right)\right| \leqslant M(D)(T+2)^{c_0} \quad \textit{для всех} \quad |t| \leqslant T.$$

Тогда

$$N(\sigma,\ T) \leqslant b_{10} T^{1+2c_0} (DM^2(D))^{2(1-\sigma)} \lg^7 D.$$

Доказательство приведено в работе [10] (см. с. 422).

В дальнейшем мы предполагаем, что последовательность ϑ есть последовательность $\vartheta_p = \{p^n\}$, где $p > 2$ — фиксированное простое число; $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Рассмотрим свойства характеров $\chi(\nu) \bmod D$, где $D \in \vartheta_p$. Пусть $p > 2$; для каждого простого числа такого типа фиксируем первообразный корень $g \bmod p^2$ (скажем, наименьший из корней). Тогда, как известно, мультипликативная группа $(\bmod\ p^n)$ будет циклической группой с образующим элементом g. Следовательно, можно положить

$$\chi(\nu) = \zeta^{\operatorname{ind} \nu},$$

где ζ — корень из единицы степени $h=\varphi(p^n)$. Обозначим через $\deg \chi$ ($\deg \zeta$) степень характера (степень числа ζ); для любого характера имеется наименьшая степень h, такая, что $\chi^h=\chi_0$ — главный характер. В нашем случае $h=\deg \chi=\deg \zeta=\deg \chi(g)$. Очевидно, $h \mid p^{n-1}(p-1)$. Пусть $h=p^\beta\delta$, $\delta \mid p-1$. Покажем, что $p^{\beta+1}$ — главный (т. е. наименьший) модуль характера $\chi(\nu)$.

Действительно, прежде всего ясно, что если $p \nmid n$ и $n \equiv n'$ $(\bmod\ p^{\beta+1})$, то $\operatorname{ind} n \equiv \operatorname{ind} n'$ $(\bmod\ \varphi(p^{\beta+1}))$; значит,

$$\zeta^{\operatorname{ind} n} = \zeta^{\operatorname{ind} n'}, \text{ т. е. } \chi(n) = \chi(n')$$

для $(n,\ p) \neq 1$. Следовательно, $p^{\beta+1}$ является модулем для $\chi(\nu)$.

Пусть теперь $p^{\beta'}$ — главный модуль $\chi(\nu)$; так как $g^{\varphi(p^{\beta'})} \equiv$ $\equiv 1 (\bmod \beta')$, то мы имеем $\zeta^{\varphi(p^{\beta'})} = \chi(g^{\varphi(p^{\beta'})})$; но тогда $h \mid (\varphi(p^{\beta'}))$, т. е. $p^\beta \mid p^{\beta'-1}$, и, таким образом, $\beta+1 \leqslant \beta'$. Это и доказывает наше утверждение $\beta+1=\beta'$.

В частности, если $h=2$, то главный модуль характера χ равен p, так как $\beta=0$. В этом случае единственный реальный характер $\bmod\ p^n$ есть (ν/p) — символ Лежандра.

Лемма 5. *Для каждого положительного числа M и произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует такая константа $b_{11}(M, \varepsilon)$, что*

$$\beta(\gamma) \leqslant 1 - b_{11} (\lg D)^{-3/4} (\lg \lg D)^{-(3/4+\varepsilon)}, \qquad (2.18)$$

если $\rho \in \mathfrak{a}(D)$ *и* $|\gamma| \leqslant (\lg D)^M$.

Прежде всего заметим, что, поскольку второе слагаемое справа в (2. 18) монотонно, достаточно доказать нашу лемму только для тех χ, для которых $D = p^n$ является главным модулем. Следовательно, принимая во внимание сказанное выше о реальных характерах, мы проведем доказательство только для комплексных характеров с главным модулем $D = p^n$.

Исследование величины $\beta(\gamma)$ будет проведено классическим методом, т. е. с помощью оценки абсолютного значения $|L(s, \chi)|$ в полуплоскости $\sigma \geqslant 1/2$. Сначала полагаем $1 - \sigma \leqslant (\lg D)^{-1}$, $|t| \leqslant 2(\lg D)^{M+1}$. Хорошо известно, что тогда имеем

$$\lg |L(s, \chi)| \leqslant b_{12} \lg \lg D. \qquad (2.19)$$

(Например, можно положить $N = h[|t| + 1]$ в неравенстве (35. 6) книги [7], с. 101). Затем полагаем $1 - \sigma > (\lg D)^{-1}$. В полуплоскости $\sigma \geqslant 1/2 + \varepsilon$ имеем оценку

$$|L(s, \chi)| \ll |s| \left(\int_0^D |S(x)| \, x^{-\sigma-1} dx + D^{-1-\sigma} \int_0^D |S(x)| \, dx \right), \qquad (2.20)$$

где $S(x) = \sum_{\nu \leqslant x} \chi(\nu)$ (эта оценка является прямым следствием применения метода суммирования Абеля и периодичности $S(x)$; см. [7], с. 99).

В нашем случае

$$D^{-1-\sigma} |s| \int_0^D |S(x)| \, dx \ll D^{-\varepsilon} (\lg D)^{M+1} \ll 1. \qquad (2.21)$$

(Здесь применена хорошо известная оценка Виноградова—Пойа для характеров $|S(x)| \ll \sqrt{D} \lg D$ при любом $x > 0$).

Оценка первого слагаемого справа в (2. 20) требует исследования поведения $S(x)$ для ϑ_p, как это сделано в статье [6].

В лемме 1 статьи [6] доказано, что

$$\left| \sum_{N}^{N+x-1} \chi(\nu) \right| \leqslant x \Delta^{-1}, \quad \text{если} \quad x \geqslant l,$$

где N — произвольное целое число. Здесь $l = p^{2(n \lg n)^{5/4}}$, $\Delta = p^{n(\lg n)^{1/4}}$; $n \geqslant 2$.

Используя эту оценку, получим

$$\int\limits_0^{D-1} |S(x)|\, x^{-\sigma-1} dx = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} \int\limits_{\nu l}^{(\nu+1)l} |S(x)|\, x^{-\sigma-1} dx \ll$$

$$\ll \frac{l^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \Delta^{-l} \frac{l^{1-\sigma}\nu_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \frac{1}{2} l^{1-\sigma} \ll \frac{l^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \Delta^{-1} \frac{D^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \qquad (2.22)$$

где $\nu_0 l \leqslant D-1 < (\nu_0+1)\, l$. Оценки (2. 20)—(2. 22) в нашем случае дают:

$$|L(s, \chi)| \ll (\lg D)^{M+1} \max [\Delta^{-1} D^{1-\sigma}, l^{1-\sigma}]. \qquad (2.23)$$

Выберем теперь σ_1 так, чтобы было $\Delta^{-1} D^{1-\sigma_1} = 1$; тогда для любого $\sigma \geqslant \sigma_1$ оценка (2. 23) улучшается до

$$|L(s, \chi)| \ll (\lg D)^{M+1}\, l^{1-\sigma}$$

или

$$\lg |L(s, \chi)| \leqslant b_{12} \lg \lg D, \qquad (2.23')$$

поскольку $(1-\sigma_1) \lg l \leqslant 4 \lg p \cdot \lg \lg D$. Сравнивая (2. 19) с (2. 23′), мы видим, что оценка (2. 19) остается в силе в полуполосе S: $\sigma \geqslant \sigma_1$, $|t| \leqslant 2 (\lg D)^{M+1}$. Построим теперь круги C и C' с центрами в точках $s_0 = 1+\eta+it$ и $s_1 = 1+\eta+2ti$ и радиусом $R = \sigma_1 - 1$; здесь $\eta > 0$. Оба круга расположены вне S; следовательно, значения $|L(s, \chi)|$ и $|L(s, \chi^2)|$ оцениваются по формуле (2. 19). Поскольку $L(s, \chi)$ и $L(s, \chi^2)$ регулярны вне S, к ним применим классический метод оценивания величины $\beta(\gamma)$ (см. [7], с. 116—117). Как показывает этот метод, если η столь мало, что

$$\eta c_4 (b_{12} \lg \lg D - \lg \eta) \leqslant 0.5 R,$$

то

$$1 - \beta(t) \geqslant \frac{1}{7} \eta. \qquad (2.24)$$

Простым вычислением получаем, что в качестве η можно взять значение η, удовлетворяющее уравнению

$$\eta (1-\sigma_1)^{-1} (\lg \lg D)^{1+\varepsilon} = 1. \qquad (2.25)$$

Тогда для достаточно больших значений $D \geqslant D_0 (M, \varepsilon)$ будут удовлетворены наши требования относительно η и неравенство (2. 24) будет выполняться. Отыскав значение η из уравнения (2. 25) и подставив это значение в (2. 24), мы докажем оценку (2. 18).

Лемма 6. *Если $D \in \vartheta_p$, то имеет место следующая оценка*:

$$S(x) = \sum_{\nu \leqslant x} \chi(\nu) \ll D^{1/6} (\lg D)^{1/2} \sqrt{Q}, \quad \text{где } Q = \min(x, D^{2/3}). \qquad (2.26)$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что нашу лемму достаточно доказать для характеров с главным модулем

$D=p^n$ ввиду того, что правая часть оценки (2. 26) монотонна относительно D. Далее, достаточно доказать лемму для $x \leqslant D^{2/3}$; для бо́льших значений x она является прямым следствием упомянутой выше хорошо известной оценки Виноградова—Пойа. Таким образом, пусть $x \leqslant D^{2/3}$. Определим натуральное число s как наименьшее из всех чисел, бо́льших или равных $(n+2)/3$; если $x \leqslant p^s$, то наша лемма немедленно следует из тривиальной оценки $|S(x)| \leqslant x$. Поэтому будем предполагать, что $p^s \leqslant x \leqslant D^{2/3}$. Очевидно, имеем

$$|S(x)| \leqslant \sum_{\mu=0}^{\mu_0} S_\mu, \tag{2. 27}$$

где

$$S_\mu = \sum_{N \leqslant \nu \leqslant N'} \chi(\nu), \quad N = 2^\mu p^s, \quad N' \leqslant 2N \quad (\mu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \mu_0),$$

$$2^{\mu_0} p^s \leqslant x < 2^{\mu_0+1} p^s.$$

Таким образом, задача сводится к оценкам сумм типа

$$S_N = \sum_{N \leqslant \nu \leqslant N'} \chi(\nu)$$

при условиях $p^s \leqslant N \leqslant D^{2/3}$, $N' \leqslant 2N$.

Положим теперь $\nu = l + up^s$, $(l,\ p) = 1$. Тогда, по неравенству Буняковского—Шварца, получаем

$$|S_N| \leqslant \sum_{(l)}{}' \left| \sum_{u=N_1}^{N_2} \chi(l + up^s) \right| \leqslant p^{s/2} S_1^{1/2}, \tag{2. 28}$$

где $\sum\limits_{(l)}{}'$ означает суммирование по всем l, пробегающим приведенную систему вычетов по $\operatorname{mod} p^s$, $N_1 = p^{-s}(N - l)$, $N_2 = p^{-s}(N' - l)$; имеем

$$S_1 = \sum_{(l)}{}' \left| \sum_{u=N_1}^{N_2} \chi(l + up^s) \right|^2.$$

Пусть теперь l^* таково, что $ll^* \equiv 1 \pmod{p^{m-1}}$; тогда

$$S_1 = \sum_{(l)}{}' \left| \sum_{u=N_1}^{N_2} \chi(1 + l^* p^s u) \right|^2.$$

С другой стороны, если $p \geqslant 2$, для любого натурального v можно написать

$$\chi(1 + pv) = \exp\left(\frac{2\pi i}{\varphi(p^n)}\right) \operatorname{ind}_g (1 + pv).$$

В статье [5] на с. 21 показано, что

$$\operatorname{ind}_g (1 + pv) \equiv \Lambda (p - 1) f(v) \pmod{(p - 1)\, p^{n-1}},$$

где $p \nmid \Lambda$, Λ не зависит от v,

$$f(v) = v + a_2 v^2 + \ldots + a_N v^N.$$

Коэффициенты $a_2, \ldots, a_N$ — целые числа, $a_2 \equiv p/2 \pmod{p^{n-1}}$, так что $a_2 = pa_2'$, $p \nmid a_2'$. В нашем случае $v = l^* p^{s-1} u$, так что $v^m \equiv \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}$ для $m \geqslant 3$. Следовательно,

$$\chi(1 + l^* p^s u) = \exp(2\pi i (\alpha u^2 + \beta u)),$$

где

$$\alpha = \Lambda l^{*2} a_2' p^{-r}, \quad \beta = \Lambda l^* p^{s-n}, \quad r = n - 2s,$$

$$S_1 = \sum_{(l)}' \left| \sum_{u=N_1}^{N_2} \exp(2\pi i (\alpha u^2 + \beta u)) \right|^2. \tag{2.29}$$

Внутренняя сумма справа в (2.29) является тригонометрической суммой для квадратичного полинома; оценки таких сумм хорошо известны; в частности, известно, что

$$\left| \sum_{u=N_1}^{N_2} \exp(2\pi i (\alpha u^2 + \beta u)) \right|^2 \ll \sum_{|u| \leqslant N_2 - N_1} \min\left(N_2 - N_1, \frac{1}{\{\alpha u\}}\right), \tag{2.30}$$

где $\{x\}$ означает расстояние до ближайшего целого числа. В нашем случае, подставляя (2.30) в (2.29) и меняя порядок суммирования по u и l, получим

$$S_1 \ll \sum_{\tau=0}^{\tau_0} \sum_{|u'| \leqslant Np^{-s-\tau}} \sum_{(l)}' \min\left(Np^{-s}, \frac{1}{\{\Lambda a_2' u' p^{-\mu} l^{*2}\}}\right), \tag{2.31}$$

где $p^T \| u$, т. е. $u = u' p^T$, $p \nmid u'$, $\mu = r - \tau$, $\tau_0 \leqslant \lg Np^{-s} / \lg p$.

Рассмотрим теперь изменение величины в скобках справа в (2.31) при изменении l; переменная l пробегает все приведенные классы вычетов по $\bmod p^\mu$ с кратностью $p^{s-\mu}$. Переменная l^{*2} пробегает также эти классы, но с кратностью $\leqslant 2p^{s-\mu}$, если учесть, что l^* возведено в квадрат. Так как $p \nmid \Lambda a_2' u'$, то переменная $\Lambda a_2' u' l^{*2}$ также пробегает упомянутые классы с той же кратностью, что и l^{*2}. Следовательно, принимая во внимание, что $s - \mu \leqslant \tau - 5$, находим:

$$\sum_{(l)}' \min\left(Np^{-s}, \frac{1}{\{\Lambda a_2' u' p^{-\mu} l^{*2}\}}\right) \leqslant 2p^5 p^{s-\mu} \sum_{l=1}^{p^\mu} \min\left(Np^{-s-5}, \frac{1}{\{lp^{-\mu}\}}\right) \ll$$

$$\ll p^\tau \sum_{l=1}^{p^\mu} \min\left(Np^{-s}, \frac{1}{\{lp^{-\mu}\}}\right) \ll p^\tau (Np^{-s} + p^\mu \lg D) \ll p^\tau N p^{-s} + p^r \lg D.$$

Используя эту оценку и неравенство (2. 31), имеем

$$S_1 \ll \sum_{T=0}^{\tau_0} Np^{-s-T}(p^{\tau}Np^{-s}+p^{r}\lg D) \ll N^2p^{-2s}\tau_0+Np^{-s+2}\times$$

$$\times \lg D\sum_{\tau=0}^{\infty} p^{-\tau} \ll (N^2p^{-2s}+N)\lg D \ll N\lg D,$$

так как

$$N^2p^{-2s} \leqslant N. \tag{2.32}$$

Соотношения (2. 28) и (2. 32) дают

$$|S_N| \ll p^{s/2}\sqrt{N\lg D}.$$

Сравнивая это неравенство с (2. 27), получим

$$|S(x)| \leqslant p^s(\lg D)^{1/2}\sum_{\mu=0}^{\mu_0} 2^{\mu/2} \ll p^s(\lg D)^{1/2}(xp^{-s})^{1/2} \ll$$

$$\ll p^{s/2}\sqrt{x\lg D} \ll D^{1/6}\sqrt{x\lg D}.$$

Это соотношение доказывает лемму.

Лемма 7. *Если* $D \in \vartheta_p$, *то для любого* t

$$\left|L\left(\frac{1}{2}+it\right),\ \chi\right| \ll (|t|+1)\,D^{1/6}(\lg D)^{3/2}. \tag{2.33}$$

Доказательство. Метод суммирования Абеля дает (см. [7], с. 99):

$$\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\ \chi\right)\right| \leqslant |s|\int_1^{\infty}|S(x)|\,x^{-3/2}\,dx. \tag{2.34}$$

Но для $x \leqslant D^{1/3}$ имеем $|S(x)| \leqslant x$; следовательно,

$$|s|\int_1^{D^{1/3}}|S(x)|\,x^{-3/2}\,dx \ll (|t|+1)\int_1^{D^{1/3}} x^{-1/2}dx \ll D^{1/6}(|t|+1).$$

Оставшаяся часть интеграла (2. 34) может быть оценена с помощью леммы 6:

$$\int_{D^{1/3}}^{\infty}|S(x)|\,x^{-3/2}dx \ll \int_{D^{1/3}}^{D^{2/3}} D^{1/6}(\lg D)^{1/2}x^{-1}dx+$$

$$+\int_{D^{2/3}}^{\infty} D^{1/6}(\lg D)^{1/2}D^{2/3}x^{-3/2}dx \ll D^{1/6}(\lg D)^{3/2}.$$

Объединив эти оценки, мы докажем лемму 7.

Переходим теперь к доказательству нашей теоремы. Сопоставление лемм 4 и 6 показывает, что в нашем случае

$$N(\sigma, T) \leqslant b_{13} T^3 D^{(8/3)(1-\sigma)} (\lg D)^{13}.$$

В соответствии с леммой 5 мы можем взять

$$\eta(D) = b_{14} (\lg D)^{-4/5}, \quad \tau = (\lg D)^M,$$

где M — произвольное положительное число; $b_{14} = b_{14}(M)$. Тогда будут выполнены все условия для следствия из леммы 2; в этом следствии можно принять $a = 4/5$, $m = 4$. Тогда, используя оценки из следствия, получим

$$d_4(x, D) \ll b_{15} (\lg x)^{-M/32} \quad \text{при} \quad x \geqslant D^{8/3+\varepsilon}.$$

Теперь применение леммы 3 дает

$$|d_0(x, D)| \ll b_{16} (\lg x)^{-M/32} \quad \text{при} \quad x \geqslant D^{8/3+\varepsilon}.$$

Поскольку в качестве M может быть выбрано произвольное положительное число, наша теорема доказана.

Литература

1. Linnik Yu. V. On the least prime in an arithmetic progression. I, II. — Мат. сб., 1944, т. 15, вып. 2, с. 139—178; вып. 3, с. 347—368.
2. Родосский К. А. О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии. — Мат. сб., 1954, т. 34, вып. 2, с. 331—356.
3. Pan Cheng-tung. On the least prime in an arithmetical progression. — Sci. Record, China, 1957, vol. 1, № 5, p. 311—313.
4. Постников А. Г. О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1955, т. 19, № 1, с. 11—16.
5. Postnikov A. G. On Dirichlet L-series with the character modulus equal to the power of a prime number. — J. Indian Math. Soc., 1956, vol. 20, № 1—3, p. 217—226.
6. Розин С. М. О нулях L-рядов Дирихле. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, т. 23, № 4, с. 503—508.
7. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. М.—Л., 1947. 203 с.
8. Prachar K. Primzahlverteilung. Berlin [u. a.], 1957. 415 S.
9. Walfisz A. Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie. Berlin, 1963. 231 S.
10. Барбан М. Б. «Плотность» нулей L-рядов Дирихле и задача о сложении простых и «почти простых» чисел. — Мат. сб., 1963, т. 61, вып. 4, с. 418—425.

ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И НАИМЕНЬШИЙ ПРОСТОЙ КВАДРАТИЧНЫЙ ВЫЧЕТ

Совместно с А. И. Виноградовым

ДАН СССР, 1966, т. 168, № 2, с. 259—261

Доказательство Андрэ Вейлем гипотезы Римана для дзета-функций и L-функций [1] кривых над конечным полем привело к некоторым глубоким результатам и в аналитической теории чисел. Одно из наиболее замечательных применений теоремы Андрэ Вейля к аналитической теории характеров Дирихле было дано в работах Д. Берджесса [2, 3]. Применяя доказанную гипотезу Римана для гиперэллиптических кривых $y^2=p(x)$ ($p(x)$ — полином высокой степени) над простым конечным полем, он получил новую оценку для наименьшего квадратичного невычета, что составляло заметное продвижение в известной «I гипотезе И. М. Виноградова» о наименьшем квадратичном невычете.

В данной заметке мы соединим оценки, полученные Берджессом, с известной теоремой К. Л. Зигеля о квадратичных полях. На этом пути мы получаем продвижение в направлении II гипотезы И. М. Виноградова (о наименьшем простом квадратичном вычете).

II гипотеза И. М. Виноградова гласит, что наименьший простой квадратичный вычет по простому модулю D — наименьшее простое число $p=P_{\min}(D)$, для которого $\chi(p)=1$, имеет оценку $P_{\min}(D)=O(D^{\varepsilon})$ при $D\to\infty$ и любом $\varepsilon>0$. До сих пор было известно, что $P_{\min}(D)=O(D^{1/2})$ (следствие указанной теоремы Зигеля). Мы доказываем теоремы 1, 2.

Теорема 1. *Наименьший простой квадратичный вычет по простому модулю D имеет оценку*

$$P_{\min}(D)=O\left(D^{1/4+\varepsilon}\right) \tag{1}$$

при любом $\varepsilon>0$.

С теоремой 1 связана теорема об идеалах малой нормы в квадратичных полях. Пусть $D\gtrless 0$ — фундаментальный дискриминант. Рассмотрим неглавный реальный характер $\chi(n)$ по модулю D, соответствующий L-ряд $L(s,\chi)$ и ζ-функцию соответствующего квадратичного поля $k(\sqrt{D})$:

$$\zeta_k(s)=\zeta(s)L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}\quad(\text{при } s=\sigma+it,\ \sigma>1);$$

здесь числа a_n пробегают нормы идеалов поля.

Теорема 2. *При любом x при условии*

$$|D|^{1/4+\varepsilon}\leqslant x\leqslant|D|^{1/2} \tag{2}$$

имеем

$$\sum_{n\leqslant x} a_n = xL(1,\ \chi)\left[1+O\left(x^{-\eta_0}\right)\right]. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon>0$ — *сколь угодно малая константа;* $|D|>D_0(\varepsilon)$; $\eta_0=\eta_0(\varepsilon)$ — *константа, связанная с константой Берджесса* [3].

Доказательство теоремы 2. Замечаем, что

$$a_n=\sum_{d\mid n}\chi(d).$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{n\leqslant x}\left(1-\frac{n}{x}\right)a_n=\sum_{n\leqslant x}\left(1-\frac{n}{x}\right)\sum_{d\mid n}\mu(d)=\sum_{d\leqslant x}\chi(d)\sum_{m\leqslant x/d}\left(1-\frac{md}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-iT}^{2+iT}\frac{x^s}{s(s+1)}\zeta(s)\left(\sum_{d\leqslant x}\frac{\chi(d)}{d^s}\right)ds+O(1).$$

Переносом контура влево на $\operatorname{Re}s=1/2$ получаем

$$\sum_{n\leqslant x}\left(1-\frac{n}{x}\right)a_n=\frac{x}{2}\sum\frac{\chi(d)}{d}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1/2-iT}^{1/2+iT}\frac{x^s}{s(s+1)}\zeta(s)\left(\sum_{d\leqslant x}\frac{\chi(d)}{d^s}\right)+O(1). \tag{4}$$

Оценим сумму под интегралом. Представим ее в виде

$$\sum_{d\leqslant|D|^{1/4}}\frac{\chi(d)}{d^s}+\sum_{Q_i}\sum_{Q_i\leqslant d\leqslant 2Q_i}\frac{\chi(d)}{d^s},\quad Q_0=|D|^{1/4}.$$

С помощью частного суммирования найдем

$$\sum_{Q_i\leqslant d\leqslant 2Q_i}\frac{\chi(d)}{d^s}=s\int\limits_{Q_i}^{2Q_i}\frac{s(x)}{x^{s+1}}\,dx+\frac{s(2Q_i)}{(2Q_i)^s}-\frac{s(Q_i)}{Q_i^s}.$$

Но для интервала $(Q_i,\ 2Q_i)$ справедлива оценка Берджесса

$$|s(x)|\ll Q_i^{1-\eta}.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{Q_i\leqslant d\leqslant 2Q_i}\frac{\chi(d)}{d^s}\right|\ll|s|\,Q_i^{1/2-\eta}.$$

Собирая все оценки вместе, получаем

$$\left|\sum_{d\leqslant x}\frac{\chi(d)}{d^s}\right|\ll|s|\,x^{1/2-\eta},$$

где $\eta>0$ — константа из оценки Берджесса.

Следовательно, интеграл в правой части равенства (4) имеет величину порядка

$$x^{1-\eta}\ln^2 x.$$

Кроме того, из оценки Берджесса следует

$$\sum_{d\leqslant x}\frac{\chi(d)}{d}=L(1,\chi)+O(x^{1-\eta}\ln x).$$

Таким образом,

$$\sum_{n\leqslant x}\left(1-\frac{n}{x}\right)a_n=\frac{x}{2}L(1,\chi)+O(x^{1-\eta}\ln^2 x). \tag{5}$$

Переход от равенства (5) к равенству (3) осуществляется по классической схеме.

В теореме 2 и ее доказательстве под реальным характером мы понимали символ Кронекера (D/n). В теореме 1 в качестве реального характера $\chi(n)$ мы должны взять символ Лежандра (n/D), причем D — простое число. В этом случае

$$a_n=\prod_{p\mid n}[1+\chi(p)+\ldots+\chi(p^{\alpha_p})], \tag{6}$$

где $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_\nu^{\alpha_\nu}$. В каноническом разложении n сгруппируем вместе все простые множители — квадратичные вычеты $\operatorname{mod} D$ и обозначим эту часть числа через n_0, точно так же сгруппируем невычеты и обозначим их произведение через n_1. Следовательно,

$$n=n_0n_1.$$

Замечаем, что $a_n\geqslant 1$ в двух случаях: если $n_1=1$ и если $n_1=m^2$ $(m>1)$. Для того чтобы доказать теорему 1, нам нужно доказать существование таких n, что $n_1=1$. Чтобы это установить, применим решето:

$$a_n\sum_{\delta^2\mid n_1}\mu(\delta)=\begin{cases}a_n, & \text{если } n_1=1,\\ 0, & \text{если } n_1>1,\end{cases}$$

где $\delta\mid m$, $n_1=m^2$, $n=n_0m^2$.

Следовательно, если для суммы

$$\sum_{n\leqslant x}\left(1-\frac{n}{x}\right)a_n\sum_{\delta^2\mid n_1}\mu(\delta) \tag{7}$$

установить равенство, аналогичное (5), то теорема 1 будет доказана. Такое равенство для суммы (7) действительно можно установить тем же методом, который был изложен при доказательстве теоремы 2. Правда, решето внесет дополнительную арифметику для индексов суммирования, но она не играет существенной роли, так как решето по квадратам делителей является тривиальным и может быть оборвано при $\delta>x^{\varepsilon}$.

В заключение отметим, что теорема 2 имеет существенные применения в теории тернарных квадратичных форм и эргодической теории алгебраических полей [4].

Литература

1. Weil A. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1948, vol. 34, № 5, p. 204—207.
2. Burgess D. A. — Proc. London Math. Soc., 1963, vol. 13, № 51, p. 524—536.
3. Burgess D. A. — J. London Math. Soc., 1964, vol. 39, № 1, p. 103—108.
4. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л., 1967. 208 с.

О ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРЕМЫ АНДРЭ ВЕЙЛЯ К ТЕОРИИ ХАРАКТЕРОВ ДИРИХЛЕ

SUR UNE APPLICATION DU THÉORÈME D'ANDRÉ WEIL À LA THÉORIE DES CARACTÈRES DE DIRICHLET

Séminaire Delange—Pisot—Poitou. Théorie des nombres.
8 année. 1966/1967. № 6. Paris, 1968, p. 6-01—6-07

1. Знаменитая теорема Андрэ Вейля о числе дивизоров первой степени поля функций одной переменной над конечным полем (аналог гипотезы Римана для случая кривых) привела к значительным успехам в аналитической теории чисел. Вспомним эту теорему для случая простого конечного поля констант (поле вычетов mod p).

При простом p рассматривается неприводимая кривая $Q(x, y)=0$ над упомянутым полем P. Дивизоры степени 1 отвечают точкам этой кривой, принадлежащим полю P. Для числа N этих дивизоров имеем оценку

$$|N-(p+1)| \leqslant g\sqrt{p}, \tag{1}$$

где g — род нашей кривой.

Фундаментальная роль теоремы Андрэ Вейля и ее обобщений в теории алгебраических чисел и алгебраической геометрии хорошо известна. Влияние этой теоремы на аналитическую теорию чисел видно уже в фундаментальной работе М. Эйхлера [1], где оптимальные оценки погрешности в хорошо известной формуле для числа представлений целых чисел определенной кватернарной квадратичной формой были получены с ее помощью. Решение проблемы Харди—Литтлвуда об уравнении

$$n=p+x^2+y^2$$

с простым p и других проблем этого рода [2] также зависит от теоремы Андрэ Вейля (недавние работы Э. Бомбьери [3] показали, что теперь можно без нее обойтись). Наконец, замечательные работы Д. Берджесса [4—6] показали, как с помощью этой теоремы можно продвигаться в направлении гипотез И. М. Виноградова.

2. Напомним, в чем состоят гипотезы И. М. Виноградова (см., например, [7]). Рассмотрим некоторое целое число D и множество характеров Дирихле $(\chi(n))$ модуля D, из которого исключен главный характер; получится, таким образом, $\varphi(D)-1$ неглавных характеров.

Пусть χ — один из этих характеров; числа $n \in [1, D]$ — такие, что

$$\chi(n) \neq 0, 1,$$

будут называться невычетами для характера χ; $N_{\min}(D, \chi)$ будет обозначать наименьший невычет для χ. Через $P_{\min}(D, \chi)$ мы будем обозначать наименьший простой вычет для χ, т. е. наименьшее простое число n, для которого

$$\chi(n) = 1$$

(простые числа q, для которых $\chi(q)=0$, суть делители D, и они нас не интересуют).

$d_{\max}(D, \chi)$ означает наибольшее расстояние между двумя последовательными невычетами в отрезке $[1, D-1]$.

Три гипотезы И. М. Виноградова таковы:

$$(V_{\mathrm{I}}) \quad N_{\min}(D, \chi) = O(D^{\varepsilon}) \tag{2}$$

для любого $\varepsilon > 0$ равномерно относительно χ;

$$(V_{\mathrm{II}}) \quad P_{\min}(D, \chi) = O(D^{\varepsilon}) \tag{3}$$

для любого $\varepsilon > 0$ равномерно относительно χ;

$$(V_{\mathrm{III}}) \quad d_{\max}(D, \chi) = O(D^{\varepsilon}) \tag{4}$$

для любого $\varepsilon > 0$ равномерно относительно χ.

Эти гипотезы не доказаны и не опровергнуты до настоящего времени. Более слабые результаты, известные к 1958 г., были таковы:

$$N_{\min}(D, \chi) = O(D^{1/2})$$

(следствие одной теоремы Гаусса, доказанной в 1796 г.);

$$N_{\min}(D, \chi) = O\left(D^{1/2\sqrt{e}+\varepsilon}\right),$$

где e — неперово число, а $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало (И. М. Виноградов, 1926 г., см. [7]);

$$d_{\max}(\chi, D) = O(D^{1/2})$$

(И. М. Виноградов, 1925 г., см. [7]);

$$P_{\min}(\chi, D) = O(D^{1/2})$$

для D, не имеющего квадратных множителей, кроме 4 (следствие теоремы К. Л. Зигеля, см. [8]).

3. Первая замечательная работа Д. Берджесса появилась в 1957 г. [4]. Применяя весьма остроумным образом теорему Андрэ Вейля, Д. Берджесс получает

$$N_{\min}(D, \chi) = O\left(D^{1/4\sqrt{e}+\varepsilon}\right), \tag{5}$$

$$d_{\max}(D, \chi) = O\left(D^{(1/4)+\varepsilon}\right) \tag{6}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Нужно отметить, что оценки (2) и (3) суть непосредственные следствия расширенной гипотезы Римана, утверждающей, что все нули функций Дирихле $L(s, \chi)$ в критической полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$ расположены на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, но что уже для оценки (4) это не так, и даже замечательный результат Д. Берджесса (6) не есть непосредственное следствие обобщенной гипотезы Римана. Так как этот результат есть следствие неравенства (1), то отсюда видно, что это неравенство, т. е. теорема Андрэ Вейля, может давать более глубокие в сравнении с гипотезой Римана результаты в аналитической теории характеров Дирихле.

4. Мы покажем здесь, что рассуждения Д. Берджесса [4] могут быть применены к гипотезе (V_{II}), а именно что эти рассуждения в соединении с классической теоремой К. Л. Зигеля [8] для случая вещественных характеров $\chi(n)$ приводят к неравенству

$$P_{\min}(D, \chi) = O\left(D^{(1/4)+\varepsilon}\right) \tag{7}$$

для D, без квадратных множителей, отличных от 4. Соответствующее доказательство следует заметке [9]; добавим к этому еще некоторые результаты. Детально мы здесь изложим случай квадратичных характеров (вещественные характеры), остальные случаи будут лишь намечены.

Пусть $\chi(n)$ — вещественный характер модуля D указанного выше типа; образуем ряд Дирихле

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Положим $s = \sigma + it$; ряд сходится при $\sigma > 0$. Рассмотрим ряд Дирихле

$$Z(s) = \zeta(s) L(s, \chi), \tag{8}$$

где $\zeta(s)$ — функция Римана. Имеем

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1) \tag{9}$$

с a_n, равным числу представлений числа n нормой идеала в квадратичном поле $h(\sqrt{D})$ или $h(\sqrt{-D})$ в зависимости от типа вещественного характера χ. Хорошо известно, что если образовать сумматорную функцию для (9)

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x} a_n, \tag{10}$$

то существенную часть суммы (10) при большом x образуют те n, которые полностью разлагаются в соответствующем квадратичном поле; другие числа дают лишь не заслуживающие рассмотрения квадратные множители.

Имеем теперь для $x\geqslant 1$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^s}{s^3}Z(s)\,ds=\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x} a_n \ln^2\frac{x}{n}=S_1(x). \tag{11}$$

Рассуждения Д. Берджесса [4], опирающиеся на неравенство А. Вейля (1), приводят к следующей оценке:

$$\sum_{n\leqslant y}\chi(n)=O\left(y^{1-z_0}\right) \text{ для } y\geqslant D^{(1/4)+\varepsilon_0} \tag{12}$$

(z_0, z_1, . . . суть маленькие положительные константы, выбираемые одна за другой, а $\varepsilon_0>0$ — сколь угодно малая константа). Положим $s=\sigma+it$. Функцию $Z(s)=\zeta(s)\,L(s,\chi)$ можно оценить на вертикальных прямых, достаточно близких к прямой $\sigma=1$, с помощью (12). Рассмотрим прямую

$$s=\sigma_0+it,$$

где

$$\sigma_0=1-z_1,\quad z_1=\frac{z_0}{2}. \tag{13}$$

В силу (12) имеем на этой прямой, используя теорему суммирования Абеля и рассуждения, обычные в теории L-функций Дирихле (см., например, [10]):

$$|L(s,\chi)|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{D^{1/4+\varepsilon_0}}\frac{\chi(n)}{n^s}\right|+\left|\sum_{n>D^{1/4+\varepsilon_0}}\frac{\chi(n)}{n^s}\right|\leqslant D^{z_1(1/4+\varepsilon_0)}+O(|t|+1). \tag{14}$$

С другой стороны, на той же прямой

$$|\zeta(s)|=O\left[(|t|+1)^{z_1}\right] \tag{15}$$

(см. [10]). Сдвигая прямую интегрирования $(2-i\infty,\ 2+i\infty)$ на прямую (13), мы переходим через полюс с вычетом $xL(1,\chi)$ и имеем для любого $x\geqslant D^{1/4+2\varepsilon_0}$:

$$S_1(x)=\frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x} a_n\ln^2\frac{x}{n}=xL(1,\chi)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\frac{x^s}{s^3}Z(s)\,ds. \tag{16}$$

Используя (15) и (16), получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\frac{x^s}{s^3}Z(s)\,ds\right| = O\left(x^{\sigma_0}D^{z_1(1/4+\varepsilon_0)}\right). \tag{17}$$

Правая часть (17) может быть записана как

$$O\left(x\left(\frac{D^{1/4+\varepsilon_0}}{x}\right)^{-z_1}\right). \tag{18}$$

Поскольку $x \geqslant D^{1/4+2\varepsilon_0}$, то

$$\eta_x = \left(\frac{D^{1/4+\varepsilon_0}}{x}\right)^{-z_1} \leqslant D^{-\varepsilon_0 z_1}. \tag{19}$$

5. Таким образом, равенство (16) дает нам

$$S_1(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x} a_n \ln^2\frac{x}{n} = xL(1,\ \chi) + x\eta_x, \tag{20}$$

где η_x задается соотношением (19).

Теорема К. Л. Зигеля [8] утверждает, что

$$L(1,\ \chi) > c_\varepsilon D^{-\varepsilon}, \tag{21}$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. Взяв $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 z_1/2$, имеем тогда в силу (19) и (20)

$$S_1(x) = xL(1,\ \chi)(1+\eta'_x) \ \text{ для } \ x \geqslant D^{1/4+2\varepsilon_0}, \tag{22}$$

где

$$\eta'_x \leqslant (\eta_x)^{1/2}. \tag{23}$$

Так как значения a_n неотрицательны, то из (22) можно вывести, используя элементарные тауберовы приемы [10], асимптотическое соотношение

$$S(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n \sim xL(1,\ \chi) \ \text{ для } \ x \geqslant D^{1/4+2\varepsilon_0},\ D\to\infty. \tag{24}$$

Это соотношение проясняет асимптотическое распределение идеалов с маленькими нормами. Мы видим, что существуют неединичные идеалы, норма которых не превосходит

$$c_\varepsilon D^{1/4+\varepsilon},$$

поскольку $2\varepsilon_0$ — произвольно малое число.

Классическая теорема Минковского гарантирует существование целых идеалов заданного класса с нормой, не превосходящей $|d|^{1/2}$, где d — дискриминант поля. Для квадратичных полей наша оценка $c_\varepsilon D^{1/4+\varepsilon}$ более точна, но она не уточняет класса идеала. Легко видеть, впрочем, что оценку Минковского для идеалов, принадлежащих заданному классу, улучшить невозможно и улучшение оказывается возможным, только если не уточнять класса.

Теперь легко доказать соотношение (7). Если D — какое-нибудь число, не имеющее квадратных множителей, кроме 4, рассмотрим вещественный характер $\chi(n)$ модуля D. Соотношение (24) показывает, что существуют простые q, такие, что $\chi(q)=+1$. Поскольку $2\varepsilon_0$ произвольно мало, то имеем (7).

6. Соотношение (24) можно обобщить на куммеровские расширения, полагая

$$Z(s)=\zeta(s)\prod_{\chi \bmod D} L(s, \chi),$$

где χ — неглавные характеры модуля D. Таким путем получаем, что в любом поле Куммера $h(\sqrt[n]{D})$ существуют идеалы $\mathfrak{a}$, норма которых

$$|N(\mathfrak{a})| \leqslant c_\varepsilon |d|^{1/4+\varepsilon},$$

где ε произвольно мало.

Соотношение (24) оказывается полезным в приложении эргодических методов и теории алгебраических полей [11]. Оно позволяет изучать гораздо более простым способом, чем до сих пор, распределение целых точек на сфере

$$x^2+y^2+z^2=m$$

и вообще на эллипсоидах и гиперболоидах в трехмерном пространстве.

Литература

1. Eichler M. Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion. — Arch. Math., 1954, Bd 5, № 4—6, S. 355—366.
2. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л., 1961. 208 с.
3. Bombieri E. On the large sieve. — Mathematika, 1965, vol. 12, № 2, p. 201—225.
4. Burgess D. A. The distribution of quadratic residues and non-residues. — Mathematika, 1957, vol. 4, № 8, p. 106—112.
5. Burgess D. A. A note on the distribution of residues and non-residues. — J. London Math. Soc., 1963, vol. 38, № 2, p. 253—256.
6. Burgess D. A. A note on L-functions. — J. London Math. Soc., 1964, vol. 39, № 1, p. 103—108.
7. Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел. М., 1962. 272 с.
8. Siegel C. L. Über die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper. — Acta arithm., 1935, Bd 1, S. 83—86.
9. Линник Ю. В., Виноградов А. И. Гиперэллиптические кривые и наименьший простой квадратичный вычет. — ДАН СССР, 1966, т. 168, № 2, с. 259—261.
10. Prachar K. Primzahlverteilung. Berlin [u. a.], 1957. 415 S.
11. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л., 1967. 208 с.

III. ДИСПЕРСИОННЫЙ МЕТОД

ДИСПЕРСИЯ ДЕЛИТЕЛЕЙ И КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ В ПРОГРЕССИЯХ И НЕКОТОРЫЕ БИНАРНЫЕ АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ

ДАН СССР, 1958, т. 120, № 5, с. 960—962

Пусть $\tau(n)=\tau_2(n)=\sum\limits_{x_1x_2=n} 1$ — число делителей n; $\tau_k(n)=$ $=\sum\limits_{x_1x_2\ldots x_k} 1$; $Q(u, v)$ — целочисленная примитивная положительная бинарная квадратичная форма дискриминанта $d<0$. Достаточная информация о поведении $\tau(n)$ и $Q(u, v)$ в арифметических прогрессиях позволяет решить некоторые интересные бинарные аддитивные задачи. Суммы

$$\sum_{\substack{m\equiv l \pmod D\\ m\leqslant n}} \tau(m), \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{Q(u,v)\equiv n \pmod D\\ Q(u,v)\leqslant n}} 1 \tag{2}$$

при больших n и $D\leqslant n^{2/3-\varepsilon_0}$ могут быть трактованы с помощью оценок Андрэ Вейля для суммы Клостермана (в дальнейшем ε_i, η_i, ζ_i — малые положительные константы). (По поводу (1) см. [1], с. 22—29, и [2]).

Для таких значений D получаются формулы: при $(l, D)=1$, $1\leqslant l<D$,

$$\sum_{\substack{m\equiv l \pmod D\\ m\leqslant n}} \tau(m)=n\ln n\,\frac{\varphi(D)}{D^2}\,\rho(n, D)+O\left(n^{1-\alpha_1}\right), \tag{3}$$

$$\sum_{\substack{Q(u,v)\equiv n \pmod D\\ Q(u,v)\leqslant n}} 1=\frac{2\pi n}{\sqrt{|d|}\,D}\,\sigma(n, D)+O\left(n^{1-\alpha_1}\right), \tag{4}$$

где

$$\rho(n, D)=1-\frac{1}{\ln n}\left(1-2C_0+2\sum_{p\mid D}\frac{\ln p}{p-1}\right), \tag{5}$$

а $\sigma(n, D)$ определяется сложнее. Пусть $(n, D)=d_1$; $D=D_1d_1$; $d_1=d_{11}d_{12}$, где d_{11} состоит из простых множителей $p \mid D_1$, а $(d_{12}, D_1)=1$. Далее, пусть $X_d(m)=(d/m)$. Тогда

$$\sigma(n, D)=\prod_{p \mid D}\left(1-\frac{X_d(p)}{p}\right)\prod_{p \mid d_{11}}\left(1+X_d(p)+\ldots+X_d^{a_p}(p)\right)\times$$

$$\times\prod_{p \mid d_{12}}\left(1+X_d(p)+\ldots+X_d^{a_p-1}+\frac{X_d^{a_p}(p)}{1-X_d(p)/p}\right), \tag{6}$$

где $p^{a_p} \mid d_{1i}$, $p^{a_p+1} \nmid d_{1i}$.

Для некоторых бинарных аддитивных задач, однако, нужны формулы подобного типа для $D \leqslant n^{1-\eta_0}$. Тогда оценки типа Андрэ Вейля уже не приводят к цели и соответствующие формулы неизвестны. Однако для решения соответствующих бинарных задач достаточно иметь формулы типа (3) и (4) не для всех больших D, а для «почти всех», что приводит к мысли рассматривать «дисперсию» числа делителей и значений $Q(u, v)$ в арифметических прогрессиях. Эти соображения приводят к следующим формулам.

Теорема 1. *Пусть* $n^{1/2}\leqslant D_1\leqslant n^{1-\eta_1}$, $D_2=D_1^{1-\eta_2}$, $l\leqslant n$. *Тогда*

$$\sum_{\substack{(D, l)=1\\ D_1\leqslant D\leqslant D_1+D_2}}\left(\sum_{\substack{m\equiv l \,(\mathrm{mod}\, D)\\ m\leqslant n}}\tau(m)-\frac{n\ln n\cdot\varphi(D)}{D^2}\rho(n, D)\right)^2=O\left(\frac{n^{2-\eta_3}D_2}{D_1^2}\right). \tag{7}$$

Теорема 2.

$$\sum_{D_1\leqslant D\leqslant D_1+D_2}\left(\sum_{\substack{Q(u, v)\equiv n \,(\mathrm{mod}\, D)\\ Q(u, v)\leqslant n}}1-\frac{2\pi n}{\sqrt{|d|}D}\sigma(n, D)\right)^2=O\left(\frac{n^{2-\eta_3}}{D_1^2}D_2\right), \tag{8}$$

где D_1 и D_2 определяются, как ранее.

Эти теоремы дают «дисперсию» интересующих нас количеств в арифметических прогрессиях. Применяя очевидный аналог неравенства Чебышева, известного в теории вероятностей, можем вывести, что «почти для всех» D между D_1 и D_1+D_2 будут иметь место формулы (3) и (4). Число исключительных D, для которых это не будет выполняться, равно $O(D_1^{1-\eta_4})$, а для $D\leqslant\sqrt{n}$ применяем также (3) и (4). При решении соответствующих бинарных аддитивных задач влияние исключительных D учитывается с помощью тривиальной оценки сверху.

Одной из задач, поддающихся такой трактовке, является проблема асимптотического выражения суммы

$$\sum_{m\leqslant n}\tau_2(m)\tau_k(m+l), \tag{9}$$

которой занимались многие английские математики. Для $k=2$ такое выражение дано в работе [3]; для $k=3$ — в недавней работе К. Хооли [2]. При $k>3$ излагаемые там способы неприменимы.

Сумма (9) совпадает с числом решений диофантова уравнения

$$x_1x_2 - y_1y_2 \ldots y_k = l, \quad 1 \leqslant x_1x_2 \leqslant n. \tag{10}$$

С помощью теоремы 1 удается доказать теорему, годную для любого k; для простоты формулировки берем $l=1$.

Теорема 3. *При* $n \to \infty$, $k \geqslant 2$

$$\sum_{m \leqslant n} \tau_2(m)\,\tau_k(m+1) \sim k!\,C_{k-1}S_k n (\ln n)^k, \tag{11}$$

где

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, n^{-2} \cdot \prod_{p \mid n} \left(p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{k-1} \right) \right),$$

$$C_{k-1} = \lim_{Y \to \infty} (\ln Y)^{-k+1} \int\limits_{1 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_{k-1} \leqslant Y(y_1, \ldots, y_{k-1})^{-1}} \ldots \int (y_1 \ldots y_{k-1})^{-1}\, dy_1 \ldots dy_{k-1}.$$

Тот же метод позволяет получить для левой части (11) асимптотическое разложение вида

$$nP_k(\ln n) + O(n^{1-\zeta_0}), \tag{12}$$

где P_k — полином k-й степени.

Пусть $Q(u, v)$ — ранее упоминавшаяся бинарная форма дискриминанта $d < 0$; $\mathfrak{K}$ — поле алгебраических чисел, абелево над полем рациональных чисел дискриминанта $d_{\mathfrak{K}}$; $g > 0$ — целое число, и пусть $(d, gd_{\mathfrak{K}}) = 1$.

Теорема 4. *При* $n > n_0(d, g, d_{\mathfrak{K}})$ *разрешимо уравнение*

$$n = Q(u, v) + gN(\mathfrak{a}), \tag{13}$$

где $N(\mathfrak{a})$ — *норма целочисленного идеала из* $\mathfrak{K}$. *Действует соответствующий асимптотический закон.*

В частном случае $\mathfrak{K} = k(\sqrt{-1})$, $N(\mathfrak{a}) = z^2 + t^2$ получаем уже известную теорему теории кватернарных квадратичных форм: $n = Q(u, v) + g(z^2 + t^2)$. Другой частный случай получается за счет иного специального выбора $\mathfrak{K}$.

Теорема 5. *Для заданного* $D > 0$ *и* $n > n_0(D)$ *разрешимо уравнение*

$$n = \Pi_1 + \Pi_2, \tag{14}$$

где Π_1 *есть произведение простых чисел* $\equiv 1 \pmod 4$, Π_2 — *произведение простых чисел* $\equiv 1 \pmod D$. *Если считать* $p \mid \Pi_1$ *дважды, а* $p \mid \Pi_2$ $\varphi(D)$ *раз, то можно указать асимптотическую формулу для числа решений.*

При $D=4$ получается известная теорема о четырех квадратах. Для частного случая, когда абелево поле имеет дзета-функцию

$A(s)=\zeta(s)\prod_{k=1}^{q-1} L(s, \chi_k)$, где χ_k отвечают вычетам степени по простому модулю, и когда $g=1$, асимптотическая формула для числа решений (13) имеет вид

$$\frac{2\pi n}{\sqrt{|d|}}\mathfrak{S}(n)+O(n^{1-\zeta_1}), \tag{15}$$

где

$$\mathfrak{S}(n)=\sum_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{q-1}=1}^{\infty}\frac{\chi_1(\delta_1)\ldots\chi_{q-1}(\delta_{q-1})}{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-1}}\sigma(n, \delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-1}) \tag{16}$$

($\sigma(n, D)$ взято из (6)). Ряд $\mathfrak{S}(n)$ — условно сходящийся, и $\mathfrak{S}(n)>1/\ln n$ для больших n.

Вывод теорем 1 и 2 основывается на теории представления больших чисел тернарными квадратичными формами, разработанной автором и А. В. Малышевым (см., например [1, 4—6]). Здесь возможно лишь кратко пояснить его. Если раскрыть скобки в левой части (7), получаются суммы членов вида $\tau(D\nu_1+l)\ \tau(D\nu_2+l)$. Если $(D\nu_1+l, D\nu_2+l)=1$, то это произведение равно $\tau(D^2\nu_1\nu_2+Dl(\nu_1+\nu_2)+l^2)$, а последнее равно числу решений уравнения $D^2\nu_1\nu_2+Dl(\nu_1+\nu_2)+l^2=vw$, что можно свести, суммируя по D, к представлению числа $(l(\nu_1-\nu_2))^2$ формой u^2-vw при подходящих геометрических и конгруэнциальных условиях. Оценка (8) выводится аналогично.[1)]

Литература

1. Линник Ю. В. — Вестник ЛГУ, 1955, № 5. Сер. мат., физ., хим., вып. 2, с. 3—32.
2. Hooley C. — Proc. London Math. Soc., 1957, vol. 7, № 27, p. 396—413.
3. Ingham A. E. — J. London Math. Soc., 1927, vol. 2, № 3, p. 202—208.
4. Линник Ю. В. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1939, т. 3, № 1, с. 87—108.
5. Линник Ю. В. — Успехи мат. наук, 1949, т. 4, вып. 5, с. 49—98.
6. Линник Ю. В., Малышев А. В. — Успехи мат. наук, 1953, т. 8, вып. 5, с. 3—71.

---

1) Из-за допущенной автором неточности асимптотические теоремы статьи получаются с понижением в остаточных членах слабее степенного. Например, в формуле (12) остаточный член будет $O(n(\ln n)^{\zeta_0})$. См. реферат на настоящую статью (РЖМат, 1959, № 6, 5489) и примечание на с. 76 книги Ю. В. Линника [130]. (*Прим. ред.*)

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ БИНАРНЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧ ПОДСЧЕТОМ ДИСПЕРСИИ В ПРОГРЕССИЯХ

ДАН СССР, 1958, т. 123, № 6, с. 975—977

В моей предыдущей заметке [1] рассматривалось понятие дисперсии квадратичных форм, в том числе простейших форм $\varphi = \xi^2+\eta^2$ и $\varphi=\xi\cdot\eta$, в арифметических прогрессиях и пояснялось, как с помощью этого понятия решать некоторые бинарные задачи. Дальнейшее усовершенствование позволило решать бинарные задачи вида

$$n = uv + Q(\xi, \eta), \tag{1}$$

где u и v независимо пробегают довольно произвольные последовательности чисел, а $Q(\xi, \eta)=a\xi^2+b\xi\eta+c\eta^2$ — бинарная квадратичная форма. При этом получаются соответствующие асимптотические законы.

В качестве примера получаемых теорем рассмотрим уравнение

$$n = p_1p_2 + \xi^2 + \eta^2, \tag{2}$$

где p_1 и p_2 — простые числа.

Теорема. *Пусть $\alpha > 0$ — достаточно малое число; $N_1 = n^{1-\alpha}$, $N_2=n^{\alpha}$; p_1 пробегает простые числа $\leqslant N_1$; p_2 пробегает простые числа $\leqslant N_2$; $\xi^2+\eta^2$ пробегает числа, свободные от квадратов. Тогда число $H(n)$ решений* (2) *имеет вид*

$$H(n) = \mathrm{Li}(N_1)\,\mathrm{Li}(N_2)\,\pi \prod_p \left(1+\frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right)\times$$
$$\times\prod_{p>2}\left(1-\frac{2+\chi_4(p)-1/p-\chi_4(p)/p}{p^2-p+\chi_4(p)}\right)\prod_{p\mid n,\, p>2}\frac{(p-\chi_4(p))(p-1)}{p^2-p-2+1/p+\chi_4(p)/p}+$$
$$+O\left(\frac{N_1N_2}{(\ln n)^C}\right), \tag{3}$$

где C — сколь угодно большая константа.

Поясним вкратце идеи доказательства этой теоремы. Пусть $U(m)=\sum\limits_{m=\xi^2+\eta^2} 1$; $D_1=N_1=n^{1-\alpha}$; $D_2=n^{1-\alpha-\zeta_0}$ (в дальнейшем ζ_i, α_i — малые положительные константы); D пробегает числа $D_1 - D_2 \leqslant D \leqslant D_1$; ν пробегает простые числа сегмента $[1, N_2]$ $(N_2=n^{\alpha})$.

Пусть (QFR) — последовательность чисел, свободных от квадратов. Для сокращения изложения (и только для этого) полагаем в дальнейшем n простым числом.

$$r(n, D) = \sum_{\substack{m\leqslant n\\ m=n-D\nu\in(QFR)\\ \nu\ \text{простое}}} U(m) - A(n, D), \tag{4}$$

$$A(n,\ D)=\mathrm{Li}\,(N_2)\,\pi\prod_p\left(1+\frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right)\prod_{p>2}\left(1-\frac{2+\chi_4(p)-1/p-\chi_4(p)/p}{p^2-p+\chi_4(p)}\right)\times$$
$$\times\prod_{\substack{p\mid D\\ p>2}}\frac{(p-\chi_4(p))(p-1)}{p^2-p-2+1/p+\chi_4(p)/p}.\text{[1]}\qquad(5)$$

Дисперсией в прогрессиях называется в данном случае выражение

$$V=\sum_D(r(n,\ D))^2=\sum_D\left(\sum_{\substack{m\leqslant n\\ m=n-D\nu\in(QFR)\\ \nu\ \text{простое}}}U(m)-A(n,\ D)\right)^2.\qquad(6)$$

Основная лемма.

$$V\leqslant D_2N_2^2\frac{1}{(\ln n)^C};\qquad(7)$$

здесь C — сколь угодно большая константа.

Решение задачи (2) с помощью основной леммы весьма несложно: если D пробегает только простые числа, то, выбросив остальные числа, только уменьшим дисперсию, так что

$$\sum_{D\ \text{простые}}\left(\sum_{\substack{m\leqslant n\\ m=n-D\nu\in(QFR)\\ \nu\ \text{простое}}}U(m)-A(n,\ D)\right)^2\leqslant D_2N_2^2\frac{1}{(\ln n)^C}.\qquad(8)$$

Отсюда сразу следует наличие представлений $n=D\nu+\xi^2+\eta^2$, где D и ν — простые; $D_1-D_2\leqslant D<D_1$. В самом деле, если бы таких решений не было, то члены $\sum U(m)$ в (8) исчезли бы и полученная сумма совпадала бы с $\sum\limits_{D\ \text{простые}}(A(n,\ D))^2>N_2^2D_2/\ln^4 n$, что противоречило бы (8). Простой подсчет дает и асимптотический закон (9).

Поясним принципы подсчета (6). Скобки в левой части (6) раскрываются, и порядок суммирования меняется: сперва суммируем по D. Главную трудность представляет суммирование члена

$$\sum_D\left(\sum_\nu U(n-D\nu)\right)^2=\sum_{\nu_1,\ \nu_2}\sum_D U(n-D\nu_1)\,U(n-D\nu_2).$$

Здесь ν_1, ν_2 пробегают одинаковые последовательности простых чисел; $n-D\nu_i\in(QFR)$ $(i=1,\ 2)$.

Далее из элементарных соображений выводим при данных ν_1, ν_2:

$$\sum_D U(n-D\nu_1)\,U(n-D\nu_2)=$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{\substack{\delta\in(QFR)\\ \delta\leqslant n}}(U(\delta))^2\sum_{\substack{t\in(QFR)\\ (t,\ \delta)=1\\ t\leqslant n}}\mu(t)\sum_{\substack{D\\ n-D\nu_i\in(QFR)\\ t\delta\mid n-D\nu_i\ (i=1,\ 2)}}U\left(\frac{n-D\nu_1}{\delta}\,\frac{n-D\nu_2}{\delta}\right).\qquad(9)$$

[1] Для упрощения здесь считается, что n не имеет малых делителей.

Дело приводится, таким образом, к подсчету при изменении D числа представлений $(n-D\nu_1)(n-D\nu_2)=\delta^2(\xi^2+\eta^2)$ или

$$n^2(\nu_1-\nu_2)^2=(2\nu_1\nu_2 D-n(\nu_1+\nu_2))^2-4\delta^2\nu_1\nu_2(\xi^2+\eta^2), \tag{10}$$

т. е. квадратное число $n^2(\nu_1-\nu_2)^2$ нужно представить тернарной квадратичной формой $x^2-4\delta^2\nu_1\nu_2(\xi^2+\eta^2)$ при определенных геометрических и конгруэнциальных условиях на x. Такая задача вполне удовлетворительно (хотя и довольно громоздко) решается в более общей теории автора и А. В. Малышева (см. литературу в заметке [1]). Некоторую вычислительную трудность представляет лишь подсчет соответствующего арифметического множителя.

Общая задача (1) трактуется аналогично. Метод может быть приложен также к разложениям вида

$$n=N(\mathfrak{a})+Q(\xi,\eta), \tag{11}$$

где $N(\mathfrak{a})$ — норма идеала из любого (не только абелева, как в заметке [1]) поля, притом идеал $\mathfrak{a}$ можно взять из любого предписанного класса. Асимптотический закон также имеет место. Это обобщает теорему Клостермана об уравнении вида $n=ax^2+$ $+by^2+cz^2+dt^2$.

Наконец, общее решение уравнения (1) можно применить для исследования известного уравнения Харди—Литтлвуда [2]

$$n=p+\xi^2+\eta^2. \tag{12}$$

Это, однако, требует весьма кропотливых подсчетов.

Литература

1. Линник Ю. В. — ДАН СССР, 1958, т. 120, № 5, с. 960—962.
2. Hardy G. H., Littlewood J. E. — Acta Math., 1923, vol. 44, p. 1—70.

ПРОБЛЕМА ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА О СЛОЖЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ И ДВУХ КВАДРАТОВ

ДАН СССР, 1959, т. 124, № 1, с. 29—30

В числе арифметических гипотез, выдвинутых в 1923 г. Г. Харди и Дж. Литтлвудом в их известном мемуаре [1], имеется следующая гипотеза.

Гипотеза J. *Всякое большое число n есть сумма простого числа и двух квадратов. При этом имеет место асимптотическая формула:*

для числа решений $Q(n)$ уравнения

$$n=p+\xi^2+\eta^2 \tag{1}$$

имеем

$$Q(n) = \pi \operatorname{Li}(n) \prod_{p} \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} + R(n). \qquad (2)$$

Здесь $\operatorname{Li}(n) = \int\limits_2^n \frac{dx}{\ln x}$; $\chi_4(p)$ — характер по модулю 4; $R(n)$ — остаточный член. Этой гипотезе посвящено несколько работ, из которых самой значительной является недавняя работа К. Хоолп [2], сводящая эту гипотезу к расширенной гипотезе Римана для всех L-рядов.

Развивая «дисперсионный метод», кратко изложенный в моих предыдущих заметках [3, 4], я пришел к следующей теореме.

Теорема. *Все достаточно большие числа — суммы простого числа и двух квадратов. Эвристическая формула* (2) *Харди—Литтлвуда верна, причем* $R(n) = O(n(\ln n)^{-C})$, *где* $C > 0$ — *сколь угодно большая константа.*[1)]

Доказательство, будучи несложным по идее, громоздко по выполнению. Как указывалось в заметке [4], метод подсчета дисперсии в прогрессиях («дисперсионный» метод) позволяет трактовать уравнения вида

$$n = uv + Q(\xi, \eta), \qquad (3)$$

где $Q(\xi, \eta)$ — заданная целочисленная квадратичная форма, а u и v независимо пробегают довольно произвольные последовательности чисел.

Пусть n — представляемое большое число, $P = \exp(\ln n)^{\beta}$, где $\beta < 1$ — близкая к 1 константа. При $s > 2$ полагаем $\zeta_P(n) = \prod\limits_{p>P} (1 - 1/p^s)^{-1}$; $\Lambda_1(n) = 1/k$ при $n = p^k$ (степень простого числа); $\Lambda_1(n) = 0$ в иных случаях. Имеем:

$$\zeta_P(s) = 1 + T(s); \quad \ln \zeta_P(s) = T(s) - \frac{(T(s))^2}{2} + \frac{(T(s))^3}{3} - \ldots$$

Пусть, далее, Ω_P — множество чисел, не делящихся на простые числа, меньшие P. Для любого $m > P$ находим

$$\Lambda_1(m) = \tau_1'(m) - \frac{\tau_2'(m)}{2} + \frac{\tau_3'(m)}{3} - \ldots + (-1)^{k+1} \frac{\tau_k'(m)}{k} + \ldots, \qquad (4)$$

где $\tau_k'(m)$ — число решений уравнения $m = x_1 x_2 \ldots x_k$; $x_i \in \Omega_P$. Ряд (4) для $\Lambda_1(m)$ обрывается довольно быстро благодаря выбору P.

Для решения уравнения (1) рассматриваем при данных k суммы

$$\sum_{\xi^2+\eta^2 \leqslant n} \tau_k'(n - \xi^2 - \eta^2). \qquad (5)$$

---

1) Из-за пробела в рассуждениях автора следует считать $C > 0$ константой, несколько большей 1. См. примечание Ю. В. Линника в работе [128]. (*Прим. ред.*).

При $k=1$ применяется особое видоизменение решета Эратосфена. При $k>1$ сумма (5) есть число решений уравнения

$$n = x_1 x_2 \dots x_k + \xi^2 + \eta^2, \quad x_i \in \Omega_P. \tag{6}$$

Полагаем $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_k$. Очевидно, $x_1 > P$, по выбору P k не может быть чрезмерно большим. Разбиваем решения уравнения (6) на узкие зоны изменения x_1 и множителя $D = x_2 \dots x_k$. «Дисперсионный метод» (см. [4]) позволяет доказать, что для подавляющего большинства получившихся чисел $D = x_2 \dots x_k$ число решений уравнения

$$n = Dx_1 + \xi^2 + \eta^2 \tag{7}$$

может быть приближенно выражено аналитической формулой (которая не приводится из-за некоторой громоздкости ее), а для остальных D, составляющих меньшинство, можно удовольствоваться грубой оценкой сверху числа решений (7). Собирая получившиеся выражения по всем зонам, по всем $k > 1$, участвующим в ряде (4), и присоединяя результат при $k=1$, получаем асимптотическую формулу (2) с $R(n) = O(n(\ln n)^{-C})$, где $C > 0$ — произвольно большая константа.

Особую трудность представляет подсчет арифметического множителя в выражении для дисперсии в прогрессиях (см. [4]). Этот подсчет удается на основании одного приема И. М. Виноградова, разработанного им для поблемы Варинга (см. [5], с. 277). Следует заметить, что и сам предлагаемый «дисперсионный метод» может рассматриваться как некоторое применение основных идей метода И. М. Виноградова к новым концепциям.

«Дисперсионным методом» можно трактовать и уравнение

$$n = p + Q(\xi, \eta), \tag{8}$$

где $Q(\xi, \eta)$ — заданная целочисленная квадратичная форма. Это, однако, требует весьма кропотливых подсчетов. Надо заметить, что общее уравнение (8) не может быть решено по методу Хооли [2] и на основе расширенной гипотезы Римана.

Можно трактовать также уравнение

$$n = N(\mathfrak{a}) + Q(\xi, \eta), \tag{9}$$

где $N(\mathfrak{a})$ — норма идеала любого предписанного класса идеалов любого алгебраического поля. Это — обобщение известного уравнения Клостермана [6] $n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$.

Поддается трактовке также уравнение

$$n = x_1 x_2 x_3 + y_1 y_2 y_3, \tag{10}$$

т. е. асимптотика выражения $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \tau_3(\nu)\tau_3(n-\nu)$.

Задачи «неопределенного типа», например

$$p - Q(\xi, \eta) = 2, \tag{11}$$

также могут быть изучены «дисперсионным методом».

Литература

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of partitio numerorum. III. — Acta Math., 1923, vol. 44, p. 1—70.
2. Hooley C. — Acta Math., 1957, vol. 97, № 3—4, p. 189—210.
3. Линник Ю. В. — ДАН СССР, 1958, т. 120, № 5, с. 960—962.
4. Линник Ю. В. — ДАН СССР, 1958, т. 123, № 6, с. 975—977.
5. Виноградов И. М. Избранные труды. М., 1952. 436 с.
6. Kloosterman H. D. — Acta Math., 1926, vol. 49, p. 407—464.

О ПРОБЛЕМЕ ДЕЛИТЕЛЕЙ И РОДСТВЕННЫХ ЕЙ БИНАРНЫХ АДДИТИВНЫХ ПРОБЛЕМАХ

Proc. Intern. Congr. Math. (Edinburg, 1958). Cambridge, 1960, p. 313—321

1. Многие английские авторы изучали асимптотическое поведение сумм делителей вида

$$\sum_{n\leqslant x} \tau_{k_1}(n)\,\tau_k(n+l), \tag{1.1}$$

$$\sum_{\nu\leqslant n} \tau_{k_1}(\nu)\,\tau_k(n-\nu) \tag{1.2}$$

(см., например, [1—4]).

Были выведены асимптотические формулы для $k_1=2$; $k=2$, 3 (случай $k=3$ был изучен Хоолн [4]). Хорошо известно, что функция $\tau(n)=\tau_2(n)$ тесно связана с функцией $U(n)=\sum\limits_{n=u^2+v^2} 1$; их производящие ряды Дирихле довольно сходны с аналитической точки зрения. Ввиду этого, например, сумма (1. 2) для $k_1=k=2$ отвечает диофантову уравнению $u^2+v^2+w^2+t^2=n$.

Более общие уравнения, содержащие любую заданную кватернарную форму, были изучены Клостерманом [5], Тартаковским [6, 7] и в недавней работе — Эйхлером [8]. Эти исследования были связаны с теорией гиперкомплексных чисел и применены автором и А. В. Малышевым (см., например, [9—13]) для развития асимптотической теории представлений чисел тернарными квадратичными формами.

Интересно, что эта теория оказывается полезной при изучении сумм (1. 1), (1. 2) и связанных с ними задач, касающихся формы $au^2+buv+cv^2$. Именно, теория тернарных квадратичных форм позволяет вывести асимптотические выражения для сумм (1. 1), (1. 2) в случае $k_1=2$, $k\geqslant 2$ (любое число).

Пользуясь аналогией между $\tau_2(n)$ и $U(n)$, упоминавшейся ранее, можно вывести асимптотические формулы для числа решений уравнения

$$n=Q(u,\ v)+gN(\mathfrak{a}), \tag{1.3}$$

где $Q(u, v)$ — примитивная бинарная квадратичная форма дискриминанта $d < 0$, $\mathfrak{a}$ — идеал в заданном поле, абелевом над рациональным полем, $N(\mathfrak{a})$ — его норма, g — заданное положительное число, взаимно-простое с d. Более общее уравнение

$$n = g_1 Q(u, v) + g_2 N(\mathfrak{a})$$

можно трактовать так же.

Уравнение (1. 3) можно рассматривать как обобщение (частичное) уравнения Г. Д. Клостермана $n = au^2 + bv^2 + cw^2 + dt$; здесь абелево поле $-k(\sqrt{-1})$ и $c = d = g$.

2. Метод, основанный на теории тернарных квадратичных форм, позволяет вывести асимптотические формулы для сумм (1. 1) и (1. 2) только в случае $k_1 = 2$, $k \geqslant 2$ (любое число). Формулы для общего l довольно сложны; мы укажем лишь простейшую из них (с $l = 1$; она верна также для $l = -1$).

Теорема 1. *При $n \to \infty$, $k \geqslant 2$ имеем*

$$\sum_{n \leqslant x} \tau_2(n)\, \tau_k(n+1) \sim k!\, C_{k-1} S_k x (\ln x)^k, \tag{2. 1}$$

где

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \prod_{p \mid n} \left(p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{k-1} \right) \right), \tag{2. 2}$$

$$\begin{gathered} C_{k-1} = \lim_{Y \to \infty} \frac{1}{(\ln Y)^{k-1}} \int \cdots \int \frac{dy_1 \ldots dy_{k-1}}{y_1 y_2 \ldots y_{k-1}}, \\ 1 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_{k-1} \leqslant \frac{Y}{y_1 y_2 \ldots y_{k-1}}. \end{gathered} \tag{2. 3}$$

Разумеется, константу C_{k-1} можно подсчитать явно, как элементарную функцию k.

Более того, мы можем получить асимптотическое разложение для суммы (2. 1) вида

$$\sum_{n \leqslant x} \tau_2(n)\, \tau_k(n+1) = x P_k(\ln x) + O\left(x (\ln x)^{\alpha_0}\right), \tag{2. 4}$$

где $P_k(\ln x)$ — полином от $\ln x$ степени k; α_0 — константа (в дальнейшем α_i, η_i, ξ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — малые положительные константы).

Подобные асимптотические разложения можно получить для общих сумм (1. 1) и (1. 2).

3. Пусть теперь $d < 0$ — заданный фундаментальный дискриминант заданной целочисленной примитивной бинарной квадратичной формы $Q(u, v)$ ($d \equiv 0$; $1 \pmod 4$). Пусть $\mathfrak{R}$ — заданное алгебраическое поле, абелевое над полем рациональных чисел, с дискриминантом $d_{\mathfrak{R}}$ и $g > 0$ — целое, такое, что $(d, g d_{\mathfrak{R}}) = 1$.

Теорема 2. *Всякое достаточно большое число* $n > n_0(d, g, d_{\mathfrak{R}})$ *может быть представлено в форме*

$$n = Q(u, v) + gN(\mathfrak{a}), \tag{3.1}$$

где $\mathfrak{a}$ *— целый идеал поля* $\mathfrak{R}$.

Можно дать асимптотическую формулу для числа решений (3. 1). Заметим, что в случае $\mathfrak{R} = k(\sqrt{-1})$ $N(\mathfrak{a}) = z^2 + t^2$, и мы получаем частный (хотя и достаточно широкий) случай теоремы Тартаковского о кватернарных формах [7]:

$$n = Q(u, v) + g(z^2 + t^2).$$

Другой частный случай теоремы 2.

Теорема 2'. *Для заданного* $D > 0$ *и* $n > n_0(D)$ *имеем*:

$$n = \Pi_1 + \Pi_2, \tag{3.2}$$

где Π_1 *состоит только из простых чисел* $\equiv 1 \pmod 4$, *а* Π_2 *— только из простых чисел* $\equiv 1 \pmod D$. *Если считать каждый простой делитель* Π_2 *дважды, каждый простой делитель* Π_2 *—* $\varphi(D)$ *раз, можем получить асимптотическую формулу для числа решений* (3. 2).

Если $D = 4$, получаем известную теорему о четырех квадратах.

Укажем теперь асимптотическую формулу для (3. 1) в некоторых простых случаях $\mathfrak{R}$. Хорошо известно, что ввиду теоремы Кронекера—Вебера дзета-функция $\mathfrak{R}$ выражается через обыкновенные L-ряды Дирихле. Мы рассмотрим следующий случай. Пусть p_0 — простое число вида $p_0 = qm + 1$; q задано; существуют степенные вычеты степени q; пусть $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{q-1}$ будут соответствующие неглавные характеры Дирихле. Образуем ряд

$$A(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} = \zeta(s) \prod_{k=1}^{q-1} L(s, \chi_k), \quad \operatorname{Re} s > 1 \tag{3.3}$$

и рассмотрим сумму

$$T(n) = \sum_{n - Q(u, v) = gm} a_m. \tag{3.4}$$

Эта сумма дает число решений уравнения (3. 1) в частном случае, когда образующий ряд Дирихле для норм идеалов задается рядом (3. 3). Случай (3. 2) тесно связан с $A(s) = \zeta(s) \prod\limits_{k=1}^{\varphi(D)-1} L(s, \chi_k)$, где χ_k — неглавные характеры Дирихле для модуля D.

Асимптотическая формула для $T(n)$ довольно сложна. При заданных n и $D < n$ обозначим $d_1 = (n, D)$; $D = D_1 d_1$; $d_1 = d_{11} d_{12}$, где d_{11} состоит из простых чисел, делящих D_1, а d_{12} взаимно-просто с D_1. Обозначаем

$$\prod(n,\ D)=\prod_{p\mid D}\left(1-\frac{\chi_d(p)}{p}\right)\prod_{p\mid d_{11}}\left(1+\chi_d(p)+\ \dots\ +\chi_d^{a_p}(p)\right)\times$$
$$\times\prod_{p\mid d_{12}}\left(1+\chi_d(p)+\ \dots\ +\chi_d^{a_p-1}(p)+\frac{\chi_d^{a_p}(p)}{1-\chi_d(p)/p}\right). \tag{3.5}$$

Здесь d — дискриминант формы $Q(u,\ v)$, a_p — наивысшая степень p, делящая соответствующее число (d_{11} или d_{12}), $\chi_d(n)=(d/n)$ — характер Кронекера, принадлежащий d.

Теорема 3. *При* $g=1$

$$T(n)=\frac{2\pi n}{\sqrt{|d|}}\mathfrak{S}(n)+O(n^{1-\alpha_1}), \tag{3.6}$$

где

$$\mathfrak{S}(n)=\sum_{\delta_1,\ \delta_2,\ \dots,\ \delta_{q-1}=1}^{\infty}\frac{\chi_1(\delta_1)\dots\chi_{q-1}(\delta_{q-1})}{\delta_1\delta_2\dots\delta_{q-1}}\prod(n,\ \delta_1\delta_2\dots\delta_{q-1}). \tag{3.7}$$

Ряд $\mathfrak{S}(n)$, суммируемый по возрастающим $\delta_1\delta_2\dots\delta_{q-1}$, сгруппированным для одинаковых значений произведения $\delta_1\delta_2\dots\delta_{q-1}$, как легко видеть, условно сходится, и $\mathfrak{S}(n)>1/\ln n$.

4. Сформулируем теперь главные леммы. Хорошо известно, что сумма (1.1) совпадает с числом решений диофантова уравнения

$$x_1x_2-y_1y_2\dots y_k=l \tag{4.1}$$

под условием $x_1x_2\leqslant l$. Это число можно постепенно свести к $k!\times\times N(x,\ -l)$, где $N(x,\ -l)$ — число решений (4.1) при условии

$$1\leqslant x_1x_2\leqslant x,\quad y_1\leqslant y_2\leqslant\dots\leqslant y_k.$$

Далее, $y_1y_2\dots y_{k-1}\leqslant(x+l)^{(k-1)/k}$ и

$$N(x,\ -l)\sim\sum_{(y_i)}\ \sum_{\substack{n\equiv -l\,(\mathrm{mod}\,y_1\dots y_{k-1})\\ n\leqslant x}}\tau(n), \tag{4.2}$$

где область суммирования (y_i) есть

$$1\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\dots\leqslant y_{k-1}\leqslant\frac{x+l}{y_1y_2\dots y_{k-1}}.$$

Таким образом, чтобы вывести асимптотику (4.2), достаточно вывести асимптотические формулы для количеств

$$\sum_{\substack{n\equiv -l\,(\mathrm{mod}\,D)\\ n\leqslant x}}\tau(n) \tag{4.3}$$

при $D\leqslant(2x)^{(k-1)/k}$. Заметим, однако, что мы не нуждаемся в них для всех значений D, но, грубо говоря, для «почти всех» $D\leqslant\leqslant(2x)^{(k-1)/k}$, так как формула (4.2) имеет «усредняющий характер».

Формула (4. 3) дает число решений уравнения

$$x_1x_2 - Dy = -l \quad (x_1x_2 \leqslant x). \tag{4. 4}$$

Изучение этого уравнения приводит к тригонометрическим суммам Клостермана (см. [12], с. 22—29, и [4]). Применяя хорошо известные оценки Андрэ Вейля для сумм Клостермана, мы можем получить вполне удовлетворительные асимптотические формулы для $D \leqslant x^{2/3-\alpha_0}$ (смысл α_i был объяснен ранее). Но для нашей проблемы мы нуждаемся в $D \leqslant (2x)^{(k-1)/k}$, однако для «почти всех» таких D. Это составляет содержание главной леммы 1.

Лемма 1. *Пусть*

$$A(x, D) = \frac{x \ln x}{D^2} \varphi(D) \left(1 - \frac{1}{\ln x}\left(1 - 2c_0 + 2\sum_{p \mid D} \frac{\ln p}{p-1}\right)\right), \tag{4. 5}$$

где $\varphi(D)$ — *функция Эйлера и*

$$c_0 = -\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}.$$

Пусть $x^{1/2} \leqslant D_1 \leqslant x^{1-\eta_1}$, $D_2 = D_1^{1-\eta_2}$, $l \leqslant x$. *Тогда*

$$\sum_{\substack{(D,\ l)=1 \\ D_1 \leqslant D \leqslant D_1 + D_2}} \left(\sum_{\substack{n \equiv l (\mathrm{mod}\ D) \\ n \leqslant x}} \tau(n) - A(x, D)\right)^2 = O\left(\frac{x^{2-\eta_3}}{D_1^2} D_2\right). \tag{4. 6}$$

Здесь η_1, η_2 — небольшие константы, $\eta_3 = \eta_3(\eta_1, \eta_2) > 0$. Эта формула дает «дисперсию» $\tau(n)$ в арифметических прогрессиях; мы применим ее как неравенство Чебышева в теории вероятностей, чтобы доказать, что «почти для всех» D имеем удовлетворительную асимптотическую формулу для (4. 3). При $D < \sqrt{x}$ (даже при $D < x^{2/3-\alpha_0}$) мы можем применить формулы, упомянутые выше. Для оставшихся $D > \sqrt{x}$ применяем тривиальную верхнюю оценку.

5. Функция $\tau_2(n)$ отвечает квадратичной форме uv; для квадратичной формы $Q(u, v)$, указанной выше, можно вывести формулы, совершенно аналогичные (4. 6). Определяя функцию $\Pi(n, D)$ посредством (3. 5), имеем следующую лемму.

Лемма 2.

$$\sum_{D_1 \leqslant D \leqslant D_1 + D_2} \left(\sum_{\substack{Q(u,\ v) \equiv n (\mathrm{mod}\ D) \\ Q(u,\ v) \leqslant n}} 1 - \frac{2\pi D}{\sqrt{|d|}\, D} \prod (n, D)\right)^2 = O\left(\frac{n^{2-\eta_3}}{D_1^2} D_2\right), \tag{5. 1}$$

где D_1, D_2 *имеют то же значение, что и в лемме* 1; x *надо заменить на* n.

Эта «формула дисперсии» доставляет хорошие асимптотические формулы для «почти всех» $D > \sqrt{n}$; для $D \leqslant \sqrt{n}$ (даже для $D \leqslant n^{2/3-\alpha_0}$) индивидуальные формулы

$$\sum_{\substack{Q(u,\, v)\equiv n (\mathrm{mod}\, D) \\ Q(u,\, v)\leqslant n}} 1 = \frac{2\pi n}{D\sqrt{|d|}}\, \Pi(n,\ D) + O\left(n^{1-\eta_4}\right) \qquad (5.2)$$

имеют место в силу свойств сумм Клостермана.

6. Доказательство формул (4.6) и (5.1) базируется на мультипликативных свойствах входящих в них функций и теории тернарных квадратичных форм. Начнем с (4.6). Пусть (QFR) — множество свободных от квадратов чисел. Пусть $n_i \in (QFR)$ $(i = 1,\ 2)$; $(n_1,\ n_2) = \delta$. Тогда имеем, очевидно,

$$\tau(n_1)\,\tau(n_2) = (\tau(\delta))^2\, \tau\left(\frac{n_1 n_2}{\delta}\right).$$

Это приводит к следующему выражению: пусть ν_1, ν_2, δ фиксированы; $D\nu_i + l \leqslant n$ $(i = 1,\ 2)$; образуем

$$(\tau(\delta))^2 \sum_{s\leqslant n} \mu(s) \sum_{(D)} \tau\left(\frac{D\nu_1 + l}{\delta}\, \frac{D\nu_2 + l}{\delta}\right). \qquad (6.1)$$

Область (D) определена условиями: $0 \leqslant D\nu_i + l \leqslant n$; $D\nu_i + l \in (QFR)$; $\delta \mid D\nu_i + l$; $s \mid D\nu_i + l$; $(D,\ l) = 1$. Суммирование по s, с $\mu(s)$, вводится для того, чтобы сделать $(D\nu_i + l)/\delta$ взаимно-простыми.

Члены суммы (6.1) с фиксированными δ, s, ν_1, ν_2, как легко видеть, равны числу решений уравнения

$$(D\nu_1\nu_2 - l(\nu_1 + \nu_2))^2 - 4\nu_1\nu_2\delta^2 vw = (l(\nu_1 - \nu_2))^2, \qquad (6.2)$$

т. е. числу представлений квадрата $(l(\nu_1 - \nu_2))^2$ неопределенной тернарной квадратичной формой $u^2 - vw$ при некоторых простых геометрических и конгруэнциальных условиях на

$$u,\ v,\ w \ (\text{например},\ v \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 4\nu_1\nu_2\delta^2)).$$

Если δ, s, ν_1, ν_2 сравнительно малы (порядка $O(n^{\alpha_1})$), а D, v, w достаточно велики $(D > n^{1-\alpha_2})$, представление квадрата тернарной квадратичной формой этого типа может быть трактовано методами автора и А. В. Малышева (см., например, [10, 11]) вполне удовлетворительно.

Для данной формы $u^2 - vw$ даже нет нужды в этих методах, так как уравнение $u^2 - vw = (l(\nu_1 - \nu_2))^2$ может быть сведено к подсчету матриц

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix} \quad \text{c} \quad \det(A) = \pm l(\nu_1 - \nu_2)$$

при некоторых геометрических и конгруэнциальных условиях на α, β, γ, δ. Это в основном проблема теории кватернарных форм, очень сходная с задачей, разобранной в [12] (см. с. 25—29). (Есть также старая работа Г. Кантора [14], относящаяся к подобным вопросам). Заметим, что δ и s можно считать порядка $O(x^{\xi_1})$ ($\xi_1 > 0$ нужного порядка малости), так как для больших δ и s члены сумм (6. 1) могут быть оценены тривиально и оказываются сравнительно малыми. Произведение $\nu_1\nu_2$ тоже должно быть порядка $O(x^{\xi_1})$; это означает, что D должно быть большим ($D > x^{1-\xi_2}$). Естественно, что усреднение по большому интервалу значений D легче, чем по узкому. Нам нужны, однако, $D \geqslant \sqrt{x}$; мы объясним их трактовку ниже.

Результаты о числе представлений очень громоздки, и мы опускаем их трактовку. Чтобы приложить их к выводу формулы (4. 6), мы заставляем сперва n пробегать по свободным от квадратов числам и заменяем $A(x, D)$ на соответствующие $A'(x, D)$. Затем открываем скобки в (4. 6) и суммируем по D, прилагая к произведению $\tau(n_1)\,\tau(n_2)$ указанные выше результаты. «Линейное выражение», содержащее $\tau(D\nu_1+l)\,A'(x, D)$, тоже суммируется по D, и мы получаем оценку (4. 6) для $n \in (QFR)$. Общий случай затем получается легко.

Поскольку нам нужны «формулы дисперсии» для $\sqrt{x} < D < x^{1-\alpha_1}$, мы можем получить формулы этого типа, беря $D = pD'$; $p \asymp x^{\beta}$ выбираются большими простыми числами. Прогрессии

$$n \equiv l \pmod{D'p}$$

могут быть разложены затем на прогрессии

$$n \equiv l \pmod{D'p}; \quad n \equiv \xi \pmod{p}; \quad \xi = 1, \ldots, p-1.$$

Изменяя далее $p \asymp x^{\beta}$, мы можем получить требуемые усредняющие формулы для $n \equiv l \pmod{D'}$, $D' > \sqrt{x}$. Тем же методом мы можем получить асимптотическую формулу для суммы

$$\sum_{m \leqslant x} \tau_2(ax^2 + bx + c)$$

с остаточным членом $O(x^{1-\alpha_0})$. «Формула дисперсии» (5. 1) проверяется аналогично. Простейший случай: $Q(u, v) = u^2+v^2$. Для

$$U(m) = \sum_{u^2+v^2=m} 1, \; n_i \in (QFR), \; (n_1, n_2) = \delta$$

имеем

$$U(n_1)\,U(n_2) = \frac{1}{4}\,(U(\delta))^2\,U\left(\frac{n_1 n_2}{\delta}\right).$$

Общая форма $Q(u, v)$ требует более сложных формул и привлечения теории композиции классов. Действуя, как в случае $\tau(n)$, получаем уравнение

$$(n(\nu_1 - \nu_2))^2 = (D \cdot 2\nu_1\nu_2 - n(\nu_1 + \nu_2))^2 - \delta^2\nu_1\nu_2 Q_1(v, w). \qquad (6.\,3)$$

Таким образом, соответствующая тернарная форма будет

$$u^2 - aQ_1(v, w);$$

она должна представлять большой квадрат $(n(\nu_1-\nu_2))^2$; $a=\delta^2\nu_1\nu_2$; $Q(\nu, w)$ — примитивная бинарная квадратичная форма дискриминанта d. Представления подчинены некоторым геометрическим и конгруэнциальным условиям. Асимптотические формулы можно получить, используя методы, упомянутые выше [10, 12, 13]; остаточные члены хорошие.

Представление больших квадратов и даже чисел, имеющих большие квадратные делители, тернарными квадратичными формами — в основном проблема теории кватернарных квадратичных форм.

7. Возвратимся теперь к теореме 3 (формула (3.6)), чтобы пояснить ее связь с «формулой дисперсии» (5.1). Заметим, что в (3.3)

$$a_m = \sum_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-1}\mid m} \chi_1(\delta_1)\chi_2(\delta_2)\ldots\chi_{q-1}(\delta_{q-1}).$$

Берем $g=1$ (только для простоты). Имеем

$$T(n) = \sum_{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_{q-1}} \chi_1(\delta_1)\ldots\chi_{q-1}(\delta_{q-1}) \sum_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-1}\mid n-Q(u,v)} 1. \qquad (7.1)$$

Пусть $\delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \ldots \leqslant \delta_{q-1}$. Если $\delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-1} \leqslant n^{(q-2)/(q-1)+\eta_0}$, имеем хорошие асимптотические выражения для $\sum\limits_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-1}\mid n-Q(u,v)} 1$ и «почти всех» $\delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-1}$, по лемме 2.

Если $\delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-1} > n^{(q-2)/(q-1)+\eta_0}$, $\delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-1}\mid m$ $(m \leqslant n)$, мы можем отобразить произведение $\chi_1(\delta_1)\ldots\chi_{q-1}(\delta_{q-1})$ на произведение

$$\chi_1\bar{\chi}_{q-1}(\delta_1)\chi_2\bar{\chi}_{q-1}(\delta_2)\ldots\chi_{q-2}\bar{\chi}_{q-1}(\delta_{q-2})\chi_{q-1}\left(\frac{m}{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-1}}\right).$$

Далее,

$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-2}\frac{m}{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{q-1}} = \frac{m}{\delta_{q-1}} \leqslant n^{(q-2)/(q-1)-\eta_0/q-2},$$

так как $\delta_{q-1} \geqslant n^{1/(q-1)+\eta_0/(q-2)}$. Таким образом, лемма 2 будет достаточной, чтобы вычислить асимптотику (3.4).

Литература

1. Indham A. E. Some asymptotic formulae in the theory of numbers. — J. London Math. Soc., 1927, vol. 2, № 3, p. 202—208.
2. Estermann T. On the representation of a number as a sum of two products. — Proc. London Math. Soc., 1930, vol. 31, p. 123—133.
3. Titchmarsch E. C. Some problems in the analytic theory of numbers. — Quart. J. Math. Oxford Ser., 1942, vol. 13, p. 129—152.
4. Hooley C. An asymptotic formula in the theory of numbers. — Proc. London Math. Soc., 1957, vol. 7, № 27, p. 396—413.

5. Kloosterman H. D. On the representation of a number in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$. — Acta Math., 1926, vol. 49, p. 407—464.
6. Tartakowsky W. A. Expressions pour le nombre des représentations d'un nombre par une forme quadratique positive à plus de trois variables. — C. r. Acad. sci., 1928, t. 186, p. 1337—1340.
7. Tartakowsky W. A. Die Gesamtheit der Zahlen, die durch eine positive quadratische Form $F(x_1, \ldots, x_s)$ $(s \geqslant 4)$ darstellbar sind. I, II. — Изв. АН СССР. Отд-ние физ.-мат. наук, 1929, № 1, с. 111—122; № 2, с. 165—196.
8. Eichler M. Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion. — Arch. Math., 1954, Bd 5, № 4—6, S. 355—366.
9. Линник Ю. В. Одна общая теорема о представлении чисел отдельными тернарными квадратичными формами. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1939, т. 3, № 1, с. 87—108.
10. Линник Ю. В. Кватернионы и числа Кэли; некоторые приложения арифметики кватернионов. — Успехи мат. наук, 1949, т. 4, вып. 5, с. 49—98.
11. Линник Ю. В., Малышев А. В. Приложения арифметики кватернионов к теории тернарных квадратичных форм и к разложению чисел на кубы. — Успехи мат. наук, 1953, т. 8, вып. 5, с. 3—71. Исправление: Успехи мат. наук, 1955, т. 10, вып. 1, с. 243—244.
12. Линник Ю. В. Асимптотическое распределение приведенных бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского. 2. — Вестник ЛГУ, 1955, № 5. Сер. мат., физ., хим., вып. 2, с. 3—32.
13. Малышев А. В. Асимптотическое распределение целых точек на некоторых эллипсоидах. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1957, т. 21, № 4, с. 457—500.
14. Cantor G. De transformatione formarum ternariarum quadraticarum. Halis Saxonium (Habilitationsschrift), 1869.

О НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧАХ

Мат. сб., 1960, т. 51, вып. 2, с. 129—154

Введение. В настоящей работе излагается применение «дисперсионного метода» (см. [1, 2]) к выводу асимптотики числа решений для некоторых аддитивных задач, наиболее просто трактуемых этим методом. Рассматриваются уравнения:

$$n = \xi^2 + \eta^2 + p_1 p_2, \tag{0.1}$$

где p_1, p_2 пробегают все простые числа $p_i > \exp(\ln\ln n)^2$;

$$n = \xi^2 + \eta^2 + p_1 p_2^a, \tag{0.2}$$

где $a \geqslant 1$ — заданное целое число и p_1, p_2 пробегают простые числа некоторых сегментов, указанных ниже;

$$n = \xi^2 + \eta^2 + p_1 2^{m^a} \tag{0.3}$$

и более общее

$$n = \xi^2 + \eta^2 + p_1 d^{m^a}, \tag{0.4}$$

где $d \geqslant 2$, $a \geqslant 1$ — заданные целые числа, p_1 пробегает простые числа, d^{m^a} — числа в соответствующих сегментах. Пусть $Q_1(n)$,

$Q_2(n)$, $Q_3(n)$, $Q_4(n)$ — числа решений соответственно уравнений (0. 1)—(0. 4), причем в уравнениях (0. 2), (0. 3), (0. 4) p_1 пробегает простые числа сегмента $[1, N_1]$, а второй множитель (соответственно p_2^a, 2^{m^a}, d^{m^a}) — числа сегмента $[1, N_2]$; здесь $N_1 = n^{1-\alpha}$, $N_2 = n^{\alpha}$, где α — любая положительная константа, удовлетворяющая условию

$$0 < \alpha < \frac{1}{6}. \tag{0. 5}$$

Теорема 1.

$$Q_1(n) \sim \pi A_0 n \frac{\ln \ln n}{\ln n} \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)}, \tag{0. 6}$$

где

$$A_0 = \prod_p \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right). \tag{0. 7}$$

Теорема 2.

$$Q_2(n) = \pi A_0 \operatorname{Li}(N_1) \operatorname{Li}\left(N_2^{1/a}\right) \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} (1 + \rho(n)), \tag{0. 8}$$

где

$$\rho(n) = O\left((\ln n)^{-C}\right) \tag{0. 9}$$

и C — сколь угодно большая наперед заданная константа, $\operatorname{Li}(x)$ — *логарифмический интеграл x.*

Теорема 3. *При n, не делящемся на d, уравнение* (0. 4) *разрешимо. При нечетном d и n, взаимно-простом с d, число решений* уравнения (0. 4)

$$Q_4(n) \sim \frac{\pi A_0}{(\ln d)^{1/a}} \frac{N_1}{\ln N_1} (\ln N_2)^{1/a} \prod_{p \mid nd} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)}. \tag{0. 10}$$

Заметим, что теорему 1 (формулу (0. 6)) можно вывести из расширенной гипотезы Римана, а теоремы 2 и 3 непосредственно таким образом не выводятся.

§ 1. В дальнейшем мы дадим достаточно подробный вывод теоремы 1 и сведения о тех небольших видоизменениях, которые нужно в нем сделать для доказательства теорем 2 и 3.

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — малые константы; $c_0, c_1, c_2, \ldots$, $K_0, K_1, K_2, \ldots$ — положительные константы; B — ограниченное число, не всегда одно и то же.

Мы начинаем с доказательства основной леммы, представляющей и самостоятельный интерес, так как она дает оценку остаточного члена.

Основная лемма 1. *Пусть задано число $K_0 > 1000$ и сколь угодно малые ε_0 и α_0. Пусть*

$$n^{1/6-\varepsilon_0} > N_1 > \exp(\ln n)^{\alpha_0} \tag{1. 1}$$

и ν пробегает простые числа сегмента

$$N_1 - \frac{N_1}{(\ln n)^{K_0}} \leqslant \nu \leqslant N_1, \tag{1.2}$$

а p пробегает простые числа $p \leqslant n/N_1$. Уравнение

$$n = \xi^2 + \eta^2 + p\nu \tag{1.3}$$

имеет число решений, выражаемое асимптотической формулой

$$Q(n, N_1) = \pi A_0 \operatorname{Li}\left(\frac{n}{N_1}\right) L_1 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} + B \frac{n}{(\ln n)^C}, \tag{1.4}$$

где C — сколь угодно большая константа, а L_1 — число простых чисел ν в сегменте (1.2), *выражаемое известной асимптотической формулой.*

Покажем, как из формулы (1.4) выводится теорема 1 (формула (0.6)). При этом понадобится несколько несложных лемм.

Лемма 2. *Количество решений уравнения $n = \xi^2 + \eta^2 + p_1 p_2$, где $p_1 > p_2 > n^{1/7}$, не превосходит*

$$B \frac{n}{\ln n} \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p}\right). \tag{1.5}$$

Эта лемма доказывается стандартным применением метода решета. Среди чисел вида $n - \xi^2 - \eta^2$ высеиваются делящиеся на простые числа $p < n^{\alpha_1}$, где $\alpha_1 < 1/7$ — какая-либо константа. При этом учитывается, что число решений сравнения $\xi^2 + \eta^2 \equiv n \pmod q$, где q — нечетное простое число и $q \nmid n$, есть $q(1 - \chi_4(q)/q)$.[1] Решето проще всего проводится по методу А. Сельберга (см., например, [3]).

Таким же способом решета легко доказывается и следующая лемма.

Лемма 3. *Количество решений уравнения $n = \xi^2 + \eta^2 + p_1 p_2$, где $p_1 > p_2$, $\exp(\ln\ln n)^2 < p_2 \leqslant \exp(\ln n)^{\alpha_0}$, не превосходит*

$$B \frac{n}{\ln n} \alpha_0 \ln\ln n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p}\right). \tag{1.6}$$

Заметим, что $A_0 = \prod_p (1 + \chi_4(p)/p(p-1))$ — абсолютно сходящееся произведение. Умножая (1.5) и (1.6) на $A_0 A_0^{-1}$, непосредственно получаем из (1.5) оценку

$$B \frac{n}{\ln n} \prod_p \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)}, \tag{1.7}$$

---

[1] См. также таблицу в § 18.

а из (1.6) — оценку

$$B\frac{n}{\ln n}\alpha_0 \ln\ln n\prod_p\frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)}, \tag{1.8}$$

где B не зависит от α_0 при $n > n_0(\alpha_0)$.

§ 2. Дабы свести теорему 1 к основной лемме, рассмотрим еще уравнение

$$n=\xi^2+\eta^2+p\nu, \tag{2.1}$$

где p, ν — простые числа и ν пробегает сегмент (1. 2), а p — всевозможные простые значения. При каждом ν из нашего сегмента p пробегает интервал, который отличается от интервала $[1, n/N_1]$ на интервал длины $B\,(n/N_1)\,(\ln n)^{-K_0}$.

При данном ν оценим число решений уравнения (2. 1), когда p пробегает интервал такой длины; здесь можно действовать грубо и заменить (2. 1) уравнением $n=\xi^2+\eta^2+x\nu$, где x пробегает все целые числа нашего интервала длины $B\,(n/N_1)\,(\ln n)^{-K_0}$; тогда дело приводится к оценке количества чисел $\xi^2+\eta^2\equiv n \pmod{\nu}$, лежащих в интервале указанной длины. Так как $\nu\leqslant n^{1/6-\varepsilon_0}$, то такая оценка проводится элементарно с помощью указанной выше формулы для числа решений сравнения и дает

$$B\frac{n}{N_1}(\ln n)^{-K_0+3}. \tag{2.2}$$

Суммируя по всем ν из интервала (1.2) и по всем интервалам с $n^{1/6-\varepsilon_0}\geqslant N_1\geqslant \exp(\ln n)^{\alpha_0}$, найдем, что число подобных решений не превосходит

$$Bn(\ln n)^{-K_0+4}. \tag{2.3}$$

Теперь из леммы 2, леммы 3 и оценки (2. 3) видим, что количество $Q_1(n)$ (см. (0. 6)) отличается от суммы количеств $Q(n, N_1)$ решений всех уравнений вида (1. 3) не более чем на величину (1. 8). Если формула (1. 4) верна, то (учитывая, что p_1p_2 встречается дважды)

$$Q_1(n)=2\sum_{(N_1)}Q(n,\ N_1)+B\frac{n}{\ln n}\alpha_0\ln\ln n\prod_{p\mid n}\frac{(p-1)(p-\chi_4(q))}{p^2-p+\chi_4(p)}, \tag{2.4}$$

где суммирование распространяется по всем сегментам изменения ν вида (1. 2). Хороший остаточный член в (1. 4), который представляет самостоятельный интерес, при таком суммировании уже не нужен, так как добавка в (2. 4) сравнительно велика. Мы можем при суммировании в (1. 4) заменить $\mathrm{Li}\,(n/N_1)$ на $\pi\,(n/N_1)$, L_1 — на $\pi\,(N_1)-\pi\,(N_1-N_1/(\ln n)^{K_0})$ и суммировать выражения

$$\pi\left(\frac{n}{N_1}\right)\left(\pi(N_1)-\pi\left(N_1-\frac{N_1}{(\ln n)^{K_0}}\right)\right);$$

здесь $n^{1/6-\varepsilon_0} \geqslant N_1 \geqslant \exp(\ln n)^{\alpha_0}$. Элементарный подсчет дает при этом количество, асимптотически выражаемое через

$$\frac{1}{2}\frac{n}{\ln n}(1-\alpha_0)\ln\ln n. \tag{2.5}$$

Это количество, согласно сказанному выше, нужно удвоить. Далее, беря α_0 сколь угодно малым, $n > n_0(\alpha)$ и учитывая, что B не зависит от α_0, как было сказано выше, получаем асимптотический закон (0.6).

§ 3. Уравнения вида (1.3) удобны тем, что в них p, ν пробегают прямоугольную область значений. Уравнения подобного типа можно в некоторых случаях решать «дисперсионным методом» (см. [1, 2]). Поясним общую схему такого метода. Пусть $\{\varphi\}$ — какая-либо последовательность натуральных чисел (допускаются повторения); $\{\nu\}$ — последовательность каких-либо простых чисел или их степеней (без повторений), ν лежат в сегменте (1.2), который переобозначим как сегмент (ν); $\{D'\}$ — последовательность каких-либо натуральных нечетных чисел (без повторений) в сегменте длины D_2, входящем в $[1, n/N_1]$, этот сегмент обозначим через (D). Рассмотрим уравнение

$$n = \varphi + D'\nu. \tag{3.1}$$

Пусть $U(m)$ — число решений уравнения $\varphi = m$. Тогда число решений уравнения (3.1) задается суммой

$$\sum_{D'\in(D)}\sum_{\nu\in(\nu)} U(n-D'\nu). \tag{3.2}$$

Пусть имеются основания предполагать, что число решений уравнения (3.1) при любом заданном $D'=D$ имеет приближенное асимптотическое выражение

$$A(n, D). \tag{3.3}$$

В таком случае выражение

$$V' = \sum_{D'\in(D)}\Big(\sum_{\nu\in(\nu)} U(n-D'\nu) - A(n, D')\Big)^2 \tag{3.4}$$

будем называть *зональной дисперсией для уравнения* (3.1) *при предполагаемой асимптотике* $A(n, D)$. Зональная дисперсия V' имеет простое, но важное свойство: при D', пробегающем какие-либо нечетные числа сегмента $[D_1, D_1+D_2]=(D)$, она только увеличивается, если мы заставим D пробегать все нечетные числа этого сегмента, так что

$$V' \leqslant V = \sum_{\substack{D_1\leqslant D\leqslant D_1+D_2 \\ D \text{ нечетно}}}\Big(\sum_{\nu\in(\nu)} U(n-D\nu) - A(n, D)\Big)^2. \tag{3.5}$$

Имеем теперь

$$V = V_1 - 2V_2 + V_3, \tag{3.6}$$

где

$$V_1 = \sum_{\substack{D \in (D) \\ D \text{ нечетно}}} \Big(\sum_{\nu \in (\nu)} U(n - D\nu) \Big)^2, \tag{3. 7}$$

$$V_2 = \sum_{\substack{D \in (D) \\ D \text{ нечетно}}} A(n, D) \sum_{\nu \in (\nu)} U(n - D\nu), \tag{3. 8}$$

$$V_3 = \sum_{\substack{D \in (D) \\ D \text{ нечетно}}} (A(n, D))^2. \tag{3. 9}$$

Если после подсчета асимптотических выражений для (3. 7), (3. 8) и (3. 9) (3. 6) оказывается сравнительно малым по отношению к (3. 9), то отсюда следует, что V и V' сравнительно малы и выражения, стоящие в скобках в (3. 4), достаточно близки для большинства значений D', что приводит к асимптотике для (3. 1).

Рассмотрим выражение V_1. Очевидно, оно равно количеству решений системы двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} n - D\nu_1 &= \varphi_2, \\ n - D\nu_2 &= \varphi_1, \end{aligned}\right\} \tag{3. 10}$$

где φ_1, φ_2 независимо пробегают числа последовательности $\{\varphi\}$. Как говорилось выше, ν пробегает последовательность простых чисел или их степеней; таким образом, ν_1 и ν_2 либо взаимно-просты, либо совпадают. Если $\nu_1 = \nu_2$, то (3. 10) приводится к сумме

$$\sum_{\nu \in (\nu)} \sum_{D_1 \leqslant D \leqslant D_1 + D_2} (U(n - D\nu))^2, \tag{3. 11}$$

которую достаточно грубо оценить сверху. Если же ν_1 и ν_2 взаимно-просты, то (3. 10) совпадает с числом решений уравнения

$$\nu_1\varphi_1 - \nu_2\varphi_2 = n(\nu_1 - \nu_2), \tag{3. 12}$$

где φ_1 и φ_2 лежат в таких интервалах, что

$$\frac{n - \varphi_1}{\nu_2} \in (D), \quad \frac{n - \varphi_2}{\nu_1} \in (D). \tag{3. 13}$$

В самом деле, уравнение (3. 12) следует из (3. 10). Далее, если выполнено (3. 12), то $\varphi_2 \equiv n \pmod{\nu_1}$, $\varphi_1 \equiv n \pmod{\nu_2}$, ибо $(\nu_1, \nu_2) = 1$. Тогда числа $(n - \varphi_1)/\nu_2$ и $(n - \varphi_2)/\nu_1$ целые. В силу (3. 12) они равны между собой, а в силу (3. 13) они лежат в сегменте (D); таким образом, (3. 12) равносильно системе уравнений (3. 10). Для подсчета V_1 этим способом достаточно найти совокупное число решений уравнения (3. 12) для всех пар (ν_1, ν_2) взаимно-простых чисел и грубую оценку для (3. 11).

§ 4. Если $\{\varphi\}$ — последовательность значений квадратичной формы $\varphi(\xi, \eta)$, например $\varphi = \xi^2 + \eta^2$, то уравнение (3. 12) примет вид

$$\nu_1\varphi(\xi, \eta) - \nu_2\varphi(\xi', \eta') = n(\nu_1 - \nu_2), \tag{4. 1}$$

т. е. встает задача об асимптотическом выражении количества изображений числа n $(\nu_1-\nu_2)$ кватернарной неопределенной квадратичной формой; здесь ν_1, ν_2 — коэффициенты большого размера, что и составляет особую трудность расчета.

Вернемся к уравнению (1. 3). Сперва будем считать n четным числом, так что $\xi^2+\eta^2$ должно быть нечетным. В (4. 1) положим $\varphi(\xi,\ \eta)=\xi^2+\eta^2$, $\psi(\xi',\ \eta')=\xi'^2+\eta'^2$. Пусть ν_1, ν_2 — различные простые числа, удовлетворяющие условию (1. 2). Составляем уравнение

$$\nu_1(\xi^2+\eta^2)-\nu_2(\xi'^2+\eta'^2)=n(\nu_1-\nu_2) \tag{4. 2}$$

при условиях: $\xi^2+\eta^2$ нечетно, $\xi'^2+\eta'^2$ нечетно,

$$(\nu_1\nu_2,\ n)=1,\quad \nu_1\equiv\nu_2 \pmod 4,$$

$$D=\frac{n-\xi^2-\eta^2}{\nu_2}=\frac{n-\xi'^2-\eta'^2}{\nu_1}\leqslant\frac{n}{N_1}=D_1 \tag{4. 3}$$

или

$$n\geqslant\xi^2+\eta^2\geqslant n-\nu_2D_1,\quad n\geqslant\xi'^2+\eta'^2\geqslant n-\nu_1D_1. \tag{4. 4}$$

При этом, по условию,

$$\exp(\ln n)^{\alpha_0}\leqslant\nu_i\leqslant n^{1/6-\varepsilon_0},\quad \frac{1}{2}\leqslant\frac{\nu_1}{\nu_2}\leqslant 2.$$

Теперь надлежит доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Количество решений уравнения* (4. 2) *при указанных выше условиях выражается асимптотической формулой*

$$8D_1\left(\sum_{\substack{\delta\mid n\,(\nu_1-\nu_2)\\ \delta\ \text{нечетно}}}\frac{1}{\delta}\right)(1+Bn^{-\varepsilon_1}), \tag{4. 5}$$

где $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\varepsilon_0)>0$ — *константа.*

Для доказательства сперва замечаем, что если удовлетворяется уравнение (4. 2) для чисел $(\xi,\ \eta,\ \xi',\ \eta')$ и выполнено первое из условий (4. 4), то второе условие (4. 4) выполняется автоматически. Далее, полагая

$$U(m)=\sum_{\xi^2+\eta^2=m}1=4\sum_{\rho\mid m}\chi_4(\rho)=4\sum_{xy=m}\chi_4(x), \tag{4. 6}$$

видим, что искомое количество решений уравнения (4. 2) равно сумме количеств $U(m_1)\,U(m_2)$, распространенной по всем решениям уравнения

$$\nu_1m_1-\nu_2m_2=n(\nu_1-\nu_2)=M \tag{4. 7}$$

при условиях:

$$m_i\ \text{нечетные},\ n\geqslant m_1\geqslant n-\nu_2D_1. \tag{4. 8}$$

Из (4.6) видим, что надлежит найти

$$16 \sum \chi_4(x)\chi_4(z) \tag{4.9}$$

по всем решениям уравнения

$$\nu_1 xy - \nu_2 zt = M, \quad n \geqslant xy \geqslant n - \nu_2 D_1; \tag{4.10}$$

здесь xy и zt нечетны. Мы можем считать, что

$$xy \equiv zt \equiv 1 \pmod 4, \tag{4.11}$$

иначе $U(m_1)\, U(m_2)=0$. Заметим, что $n(\nu_1-\nu_2)\equiv 0 \pmod 4$ в силу наших условий, и из $xy\equiv 1 \pmod 4$ автоматически следует $zt\equiv$ $\equiv 1 \pmod 4$.

§ 5. Упорядочим числа x, y, z, t в (4.9) так:

$$x \leqslant y, \quad z \leqslant t. \tag{5.1}$$

Число решений, где встречается знак равенства в (5.1), таково, что сумма (4.9) по ним мала; тривиальной оценкой числа таких решений будет

$$B(\varepsilon)\, n^{1/2+\varepsilon}. \tag{5.2}$$

Для остальных решений знак равенства не встречается; принимая условие (5.1), надо будет потом лишь учетверить полученную сумму (4.9). В самом деле, в силу (4.11) $\chi_4(x)\,\chi_4(z)$ не меняется от замены $x \to y$, $z \to t$.

Для дальнейшего важно значение

$$\delta = \text{О. Н. Д. } (x, z). \tag{5.3}$$

Очевидно, $\delta \mid n(\nu_1-\nu_2)$. Будем считать сперва $\delta=1$. Далее, $\nu_1 \nmid z$; иначе $\nu_1 \mid n$, что исключено условиями. Имеем из (4.10):

$$y \equiv (\nu_1 - \nu_2)\, n \nu_1' x' \pmod{\nu_2 z}, \tag{5.4}$$

где $\nu_1' x'$ — обратный элемент к $\nu_1 x \pmod{\nu_2 z}$. Далее,

$$y \in \left[\frac{n - \nu_2 D_1}{x}, \ \frac{n}{x}\right], \tag{5.5}$$

согласно (4.7). Пусть $\varepsilon_2 = \varepsilon_1/10^6$, и пусть выполнено условие

$$\frac{\nu_2 D_1}{x} > \nu_2 z n^{\varepsilon_2}, \quad xz < D_1 n^{-\varepsilon_2}. \tag{5.6}$$

В этом случае сравнение (5.4) вместе со сравнением

$$y \equiv x \pmod 4 \tag{5.7}$$

разрешимо и в силу (5.5) y пробегает

$$\frac{D_1}{4xz} + B \tag{5.8}$$

значений. Здесь

$$\frac{D_1}{4xz} > \frac{1}{4} n^{\varepsilon_2}, \quad (z, x) = 1. \tag{5.9}$$

Будем суммировать (5.8) с множителем $\chi_4(x)\chi_4(z)$; в силу (5.6) получим:

$$\frac{D_1}{4} \sum_{\substack{xz \leqslant D_1 n^{-\varepsilon_2} \\ (x, z)=1}} \frac{\chi_4(x)\chi_4(z)}{xz} + BD_1 n^{-\varepsilon_2/2}. \tag{5.10}$$

Здесь нечетность xz учитывается характером $\chi_4(xz)$. Это выражение даст главный член нужного нам количества.

§ 6. Теперь рассмотрим значения x и z, для которых

$$xz > D_1 n^{-\varepsilon_2}. \tag{6.1}$$

Мы имеем $x < y$; значит, $x \leqslant n^{1/2}$ и в силу (6.1)

$$z > \frac{D_1 n^{-\varepsilon_2}}{x} \geqslant \frac{D_1 n^{-\varepsilon_2}}{n^{1/2}} \geqslant n^{1/3+\varepsilon_0-\varepsilon_2}. \tag{6.2}$$

Кроме того,

$$z \leqslant n^{1/2}, \quad x \geqslant \frac{D_1 n^{-\varepsilon_2}}{n^{1/2}} \geqslant n^{1/3+\varepsilon_0-\varepsilon_2}. \tag{6.3}$$

При каждом заданном x, подчиненном условиям (6.3), y изменяется в сегменте (5.5). Пусть дано такое значение $x = x_0$; рассмотрим сегмент изменения

$$[x_0, \ x_0 + x_0^{1-\varepsilon_0}], \tag{6.4}$$

где $\varepsilon_3 = \varepsilon_2/10^6$. При каждом таком значении x сегмент изменения (5.5) будет отличаться от сегмента

$$\left[\frac{n - \nu_2 D_1}{x_0}, \ \frac{n}{x_0}\right] \tag{6.5}$$

двумя сегментами общей длины $B(n/x_0)\, x_0^{-\varepsilon_3}$. Покажем, что соответствующими решениями можно пренебречь. В уравнении

$$\nu_1 xy - \nu_2 zt = M \tag{6.6}$$

пусть $n^{1/2} \geqslant x \geqslant n^{1/3+\varepsilon_0-\varepsilon_2}$ (см. (6.3)) и при данном x y пробегает два сегмента длины $B(n/x)\, n^{-\varepsilon_4}$. Тогда совокупное число значений xy будет $Bn^{1-\varepsilon_4} \ln n$; они еще определяются по модулю ν_2 из (6.6); каждое повторяется $B(\varepsilon)\, n^{\varepsilon}$ раз, так что, беря $\varepsilon = \varepsilon_4/4$, найдем для числа таких решений оценку

$$B\,\frac{n^{1-\varepsilon_4/2}}{\nu_1}. \tag{6.7}$$

В дальнейшем можем считать, что при изменении x в сегменте (6.4) y меняется в сегменте (6.5). Далее, имеем сравнение (5.4).

Кроме того, $y \equiv x \pmod 4$. Пусть, например, $y \equiv x \equiv 1 \pmod 4$. Положим $y = 4y_1 + 1$, $x = 4x_1 + 1$. Тогда

$$y_1 \equiv M\,(4\nu_1)'\,(4x_1+1)' - 4' \pmod{\nu_2 z} \tag{6.8}$$

и в силу (6.5)

$$y \in \left[\frac{n - D_1\nu_2}{4x_0} - 1,\quad \frac{n}{4x_0} - 1\right]. \tag{6.9}$$

Этот сегмент обозначим через $I_{y,\,x_0}$. Из сегмента $I_{y,\,x_0}$ выделим часть, где $\nu_2 z$ укладывается целое число раз (если такая часть есть); обозначим эту часть через $E_{y,\,x_0}$, а остаточный сегмент — через $F_{y,\,x_0}$, так что

$$I_{y,\,x_0} = E_{y,\,x_0} + F_{y,\,x_0}. \tag{6.10}$$

Целое число, равное отношению длин $E_{y,\,x_0}$ и $\nu_2 z$, обозначим через e_{x_0}. Для каждого возможного значения x из его сегмента y принимает ровно e_{x_0} значений из $E_{y,\,x_0}$ (z фиксировано). Далее, отношение длин $F_{y,\,x_0}$ и $\nu_2 z$ обозначим через μ (оно зависит от x_0 и z). Если при этом

$$\mu < \frac{n}{x_0\nu_2 z}\, n^{-\varepsilon_1}, \tag{6.11}$$

то решение, где y пробегает сегменты $F_{y,\,x_0}$ со столь малыми μ, а z пробегает допустимые значения, можно отбросить с той же погрешностью (6.7). Поэтому будем считать, что

$$\mu \geqslant \frac{n}{x_0\nu_2 z}\, n^{-\varepsilon_1}. \tag{6.12}$$

§ 7. Схема решений сравнения (6.8), когда z фиксировано, x пробегает сегмент (6.4), а y пробегает $F_{y,\,x_0}$, строится совершенно так же, как доказательство леммы о матрицах в работе [4] (лемма 15, с. 22—30). Основную роль играют лемма И. М. Виноградова (в нужной нам форме см.: там же, с. 25) и способ И. М. Виноградова сведения неполной системы вычетов к полной (см., например: там же, с. 26—27). Для получения результата с $\nu_i \leqslant n^{1/6-\varepsilon_0}$ надо, однако, брать новейшие оценки сумм Клостермана по методу Андрэ Вейля (см., например, [5]).

При $y \in F_{y,\,x_0}$ мы должны иметь

$$0 \leqslant \left\{\frac{y_2}{\nu_2 z}\right\} \leqslant \mu, \tag{7.1}$$

где положено $y_2 \equiv f(x_1) \equiv M\,(4\nu_1)'\,(4x_1+1)' - 4' \pmod{\nu_2 z}$, $\{\ \}$ — знак дробной части. Для подсчета количества y_2 при x, пробегающем свой сегмент, поступаем совершенно так же, как в [4] (с. 25—26), — строим верхнюю и нижнюю функции И. М. Виноградова для подсчета дробных частей, попадающих в сегмент $[0, \mu]$: $\bar{\psi}$ и $\underline{\psi}$. Если $Q(z)$ — искомое количество, то

$$\sum_{(x_1)} \underline{\psi}\left(\frac{f(x_1)}{\nu_2 z}\right) \leqslant Q(z) \leqslant \sum_{(x_1)} \bar{\psi}\left(\frac{f(x_1)}{\nu_2 z}\right). \tag{7.2}$$

Рассмотрим поведение ψ; вторая функция трактуется аналогично. В лемме И. М. Виноградова в форме, данной в [4] (с. 25), полагаем:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \mu, \quad \Delta' = \mu n^{-\varepsilon_4}, \quad r = 100, \tag{7.3}$$

$$\psi(x) = \mu' + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(a_m + ib_m)\exp 2\pi imx + \frac{1}{2}\sum(a_m - ib_m)\exp(-2\pi imx);$$

здесь

$$\mu' = \mu + B\mu n^{-\varepsilon_4}. \tag{7.4}$$

Ряд можно оборвать при $m > \mu^{-1}n^{2\varepsilon_4}$ с допустимой погрешностью (см. [4], с. 25—26); при этом можно считать

$$|a_m \pm ib_m| = B\mu. \tag{7.5}$$

Дело приводится к оценке сумм

$$S_m = \sum_{(x_1)}\exp\frac{2\pi imf(x_1)}{\nu_2 z}, \quad m \neq 0, \quad |m| < \mu^{-1}n^{2\varepsilon_4}. \tag{7.6}$$

Применяем способ И. М. Виноградова для сведения начальной системы вычетов к полной (в нужной нам форме см. [4], с. 26—27; роль параметра t играет $4x_1 + 1$). Оценка S_m сводится тогда к оценке сумм Клостермана

$$S'_m = \sum_{(x,\, \nu_2 z)=1}\exp\frac{2\pi i}{\nu_2 z}(mM(4\nu'_1)x' - sx) \tag{7.7}$$

при любом целом s.

В силу оценок Андрэ Вейля (см., например, [5], а также [6] и [7]) имеем: при любых целых a, b и нечетном q

$$\sum_{\substack{x=1\\(x,\,q)=1}}^{q-1}\exp\frac{2\pi i}{q}(ax + bx') = B(\varepsilon)\,q^{1/2+\varepsilon}\min\left[(a, q)^{1/2}, (b, q)^{1/2}\right]. \tag{7.8}$$

В нашем случае (см. (7.7)) роль (a, q) играет $(M, \nu_2 z) = ((\nu_1 - \nu_2)n, \nu_2 z)$. Так как $\nu_2 \neq \nu_1$, $\nu_2 \nmid n$, то $((\nu_1 - \nu_2)n, \nu_2 z) = (n, z)$. Пусть $\varepsilon_5 = \varepsilon_0/10^8$, и пусть

$$\rho = (n, z) \geq n^{\varepsilon_5}. \tag{7.9}$$

В уравнении $\nu_1 xy - \nu_2 zt = n(\nu_1 - \nu_2)$ $\rho | n$ и $\rho | z$, стало быть, $\rho | xy$. Число $xy\rho^{-1}$ меняется в сегменте длины $Bn\rho^{-1}$ и задается по модулю ν_2 нашим уравнением; отсюда число соответствующих решений оценивается, как $B(\varepsilon)(n^{1+\varepsilon}/\nu_1\rho)$. Собирая по $\rho | n$ при условии (7.9), найдем оценку количества таких решений:

$$B\frac{n^{1-\varepsilon_5/2}}{\nu_1}. \tag{7.10}$$

Для остальных решений можем считать

$$(n, z) \leqslant n^{\varepsilon_5}. \tag{7.11}$$

Для них получается:

$$|S'_m| = B(\nu_2 z)^{1/2+2\varepsilon_5}(m, z)^{1/2}. \tag{7.12}$$

Ввиду этого (см. [4], с. 26—27)

$$|S_m| = B(\nu_2 z)^{1/2+3\varepsilon_5}(m, z)^{1/2}. \tag{7.13}$$

Отсюда оценкой суммы в (7.2), отвечающей $\underline{\psi}$ и значениям $|m| \leqslant \leqslant \mu^{-1} n^{2\varepsilon_5}$, $m \neq 0$, будет (см. (7.5))

$$B\mu(\nu_2 z)^{1/2+3\varepsilon_5} \sum_{m \leqslant \mu^{-1} n^{2\varepsilon_4}} (m, z)^{1/2} = B(\nu_2 z)^{1/2} n^{3\varepsilon_4}. \tag{7.14}$$

Поступая таким же образом с $\bar{\psi}$, найдем из (7.2):

$$Q(z) = \mu \sum_{(x_1)} 1 + B(\nu_2 z)^{1/2} n^{3\varepsilon_4} + B\mu n^{-\varepsilon_4} \sum_{(x_1)} 1. \tag{7.15}$$

§ 8. Сегмент (6.4) изменения x обозначим через I_x. Тогда

$$\sum_{(x_1)} 1 = \sum_{\substack{x \in I_x \\ x \equiv 1 \pmod 4 \\ (x, z) = 1}} 1. \tag{8.1}$$

Длина сегмента I_x, согласно (6.4) и (6.1), будет не менее

$$\frac{D_1 n^{-\varepsilon_2}}{z} = \frac{n^{1-2\varepsilon_2}}{\nu_2 z}. \tag{8.2}$$

Далее, так как $z \leqslant n^{1/2}$,

$$(\nu_2 z)^{1/2} n^{3\varepsilon_4} < \left(n^{1/6-\varepsilon_0+1/2}\right)^{1/2} n^{3\varepsilon_4} = n^{1/3-\varepsilon_0/2+3\varepsilon_4}, \tag{8.3}$$

$$\frac{n^{1-2\varepsilon_2}}{\nu_2 z} > n^{1/3+\varepsilon_0-2\varepsilon_2}. \tag{8.4}$$

Внося это в (7.15), найдем, учитывая (6.12) и (6.4):

$$Q(z) = \mu \Big(\sum_{\substack{x \in I_x \\ x \equiv 1 \pmod 4 \\ (x, z) = 1}} 1 \Big)(1 + Bn^{-\varepsilon_4}). \tag{8.5}$$

У нас было $y \equiv x \equiv 1 \pmod 4$. Если $x \equiv -1 \pmod 4$, то должно быть $y \equiv x \equiv -1 \pmod 4$. Для таких x получаем ту же сумму, что и в (8.5), с заменой условия $x \equiv 1 \pmod 4$ на условие $x \equiv -1 \pmod 4$. Очевидно, соответствующие $Q(z)$ (для $x \equiv 1$ и для $x \equiv -1 \pmod 4$) будут различаться не более чем на

$$B\mu \Big(\sum_{\substack{(x, y) = 1 \\ x \in I_x}} 1 \Big) n^{-\varepsilon_4}. \tag{8.6}$$

Будем теперь суммировать выражение $\chi_4(x)\chi_4(z)$ при данном z и $x \in I_x$, $(x, z)=1$, x нечетно. Здесь $\chi_4(z)$ фиксировано, и в силу сказанного выше сумма по $\chi_4(x)$ даст значение (8. 6). Далее, при $y \in E_{y, x_0}$, очевидно, соответствующая сумма будет, как убеждаемся элементарным подсчетом,

$$Be_{x_0}\Big(\sum_{\substack{(x, z)=1\\ x\in I_x}} 1\Big)n^{-\varepsilon_4}. \tag{8. 7}$$

Итак, (8. 6) и (8. 7) дают вместе оценку

$$B(e_{x_0}+\mu)\Big(\sum_{\substack{(x, z)=1\\ x\in I_x}} 1\Big)n^{-\varepsilon_4}. \tag{8. 8}$$

Но

$$e_{x_0}+\mu=\frac{D_1\nu_2}{x_0\nu_2 z}=\frac{D_1}{x_0 z}, \tag{8. 9}$$

и имеем оценку

$$B\frac{D_1}{z}\frac{n^{-\varepsilon_4}}{x_0}\sum_{\substack{(x, z)=1\\ x\in I_x}} 1. \tag{8. 10}$$

Суммируя такие оценки по всем допустимым z и I_x, $(x, z)=1$, придем к оценке

$$BD_1 n^{-\varepsilon_4/2} \tag{8. 11}$$

для нужной суммы $\sum \chi_4(x)\chi_4(z)$.

§ 9. Пусть теперь $(x, z)=\delta>1$. Тогда $\delta \mid n(\nu_1-\nu_2)$. Если $\delta \geqslant n^{\varepsilon_5}$, то, как и ранее, убеждаемся, что соответствующие решения можно отбросить.

Пусть $\delta<n^{\varepsilon_5}$, $x=x_1\delta$, $z=z_1\delta$, $(x_1, z_1)=1$. Здесь δ нечетно. Получаем уравнение

$$\nu_1 x_1 y-\nu_2 z_1 t=\frac{M}{\delta}. \tag{9. 1}$$

При этом, очевидно, $\chi_4(xz)=\chi_4(x_1 z_1)$ и уравнение может быть трактовано как старое с заменой M на M/δ и D_1 на D_1/δ. Возьмем сперва $\delta=1$. Обращаемся к формуле (5. 10). Надлежит суммировать ряд

$$\sum_{\substack{xz\leqslant D_1 n^{-\varepsilon_2}\\ (x, z)=1}} \frac{\chi_4(x)\chi_4(z)}{xz}. \tag{9. 2}$$

Здесь $D_0=D_1 n^{-\varepsilon_2}>n^{1/2}$. Такой ряд суммируется элементарно. Рассматриваем область $1\leqslant x\leqslant\sqrt{D_0}$, $1\leqslant z\leqslant\sqrt{D_0}$ и дополнительные области, суммы по которым дают малые остатки. В результате суммирования получим:

$$\sum_{\substack{xz\leqslant D_0\\(x,z)=1}} \frac{\chi_4(x)\chi_4(z)}{xz}=\frac{8}{\pi^2}(L(1,\ \chi_4))^2+Bn^{-0.01}=\frac{1}{2}+Bn^{-0.01}. \qquad (9.3)$$

Надлежит учесть еще множитель 16 при $\chi_4(x)\chi_4(z)$, множитель $D_1/4$ при (9.2) и упорядочение $x<y$, $z<t$, заставляющее учетверить результат. В результате находим

$$8D_1(1+Bn^{-0.01}), \qquad (9.4)$$

а с присоединением всех остаточных членов —

$$8D_1(1+Bn^{-\varepsilon_6}), \qquad (9.5)$$

где можно взять $\varepsilon_6=\varepsilon_0\cdot 10^{-12}$.

Пусть теперь $\delta>1$, $\delta<n^{\varepsilon_5}$. В силу сказанного выше получим для количества представлений оценку

$$\frac{8D_1}{\delta}(1+Bn^{-\varepsilon_6}). \qquad (9.6)$$

Далее,

$$\sum_{\substack{\delta\mid M\\ \delta>n^{\varepsilon_5}}} \frac{1}{\delta}=Bn^{-\varepsilon_5/2}. \qquad (9.7)$$

Ввиду этого полное число представлений оценивается через

$$8D_1\sum_{\substack{\delta\mid n(\nu_1-\nu_2)\\ \delta\ \text{нечетно}}} \frac{1}{\delta}+BD_1n^{-\varepsilon_6}. \qquad (9.8)$$

§ 10. Мы рассмотрели случай, когда n четно, $\nu_1-\nu_2\equiv 0 \pmod 4$; наша основная последовательность $\{\varphi\}$ состояла из нечетных чисел $\varphi=\xi^2+\eta^2$. Пусть теперь n нечетно и рассматривается уравнение

$$n=(\xi^2+\eta^2)\,2^\lambda+D\nu, \qquad (10.1)$$

где $\xi^2+\eta^2$ нечетно, так что данная последовательность получается из основной умножением на 2^λ. Основное уравнение (4.2) примет вид

$$\nu_1 2^\lambda(\xi^2+\eta^2)-\nu_2 2^\lambda(\xi'^2+\eta'^2)=n(\nu_1-\nu_2), \qquad (10.2)$$

где $\xi^2+\eta^2$ и $\xi'^2+\eta'^2$ нечетно. Так как n нечетно, то $\nu_1-\nu_2\equiv$ $\equiv 0 \pmod{2^\lambda}$, кроме того, $\xi^2+\eta^2\equiv\xi'^2+\eta'^2\equiv 1 \pmod 4$, так что $\nu_1-\nu_2\equiv n\dfrac{(\nu_1-\nu_2)}{2^\lambda} \pmod 4$, откуда, как нетрудно вывести,

$$\nu_1\equiv\nu_2 \pmod{2^{\lambda+2}}. \qquad (10.3)$$

Из (10.2) находим:

$$\nu_1(\xi^2+\eta^2)-\nu_2(\xi'^2+\eta'^2)=\frac{n(\nu_1-\nu_2)}{2^\lambda}. \qquad (10.4)$$

Роль прежнего D_1 здесь играет $D_1 2^{-\lambda}$. Будем считать, что

$$2^\lambda < n^{\varepsilon_6}, \qquad (10.5)$$

в противном случае уравнения (10.1) будут иметь при D, ν, пробегающих соответствующие значения, в совокупности

$$Bn^{1-\varepsilon_6/2} \qquad (10.6)$$

решений; такие уравнения в дальнейшем можно отбросить. В таком случае уравнение (10.2) при условиях (10.3), $(\nu_1\nu_2,\ n)=1$ и интервалах изменения для $2^\lambda(\xi^2+\eta^2)$ и $2^\lambda(\xi'^2+\eta'^2)$ тех же, какие были раньше для $\xi^2+\eta^2$ и $\xi'^2+\eta'^2$, решается так же, как (4.2), и число его решений будет

$$\frac{8D_1}{2^\lambda}\left(\sum_{\substack{\delta \mid n(\nu_1-\nu_2)2^{-\lambda}\\ \delta \text{ нечетно}}}\frac{1}{\delta}\right)(1+Bn^{-\varepsilon_7}). \qquad (10.7)$$

Имеем далее при $M=n(\nu_1-\nu_2)$:

$$\sum_{\substack{\delta\mid M\\ \delta>\exp(\ln\ln n)^3}}\frac{1}{\delta}=B(C)(\ln n)^{-C} \qquad (10.8)$$

при любом $C>0$. Поэтому (10.7) можно переписать в виде:

$$\frac{8D_1}{2^\lambda}\sum_{\substack{\delta\mid n(\nu_1-\nu_2)2^{-\lambda}\\ \delta<\exp(\ln\ln n)^3\\ \delta \text{ нечетно}}}\frac{1}{\delta}+B(C)\frac{D_1}{2^\lambda}(\ln n)^{-C}. \qquad (10.9)$$

§ 11. Пусть снова n — четное число с каноническим разложением

$$n=2^\mu p_1^{\rho_1}p_2^{\rho_2}\dots p_k^{\rho_k}. \qquad (11.1)$$

Будем суммировать количества решений уравнений вида (4.2) по всем простым ν_i из сегмента (1.2), $\nu_1\neq\nu_2$. Формула (10.9) (при $\lambda=0$) у нас выведена при условии $\nu_1\equiv\nu_2 \pmod 4$, $(\nu_1\nu_2,\ n)=1$. Если $\nu_1\mid n$ или $\nu_2\mid n$, то тривиальная оценка числа решений уравнений (4.2) для такой пары ν_1, ν_2 будет следовать из элементарных оценок для суммы числа делителей в прогрессиях (см. [8]), она дает

$$BD_1(\ln n)^4. \qquad (11.2)$$

Однако простых чисел $\nu_1\mid n$ будет $O(\ln n)$, так что совокупным числом таких решений будет

$$BD_1L_1(\ln n)^4, \qquad (11.3)$$

где L_1 — количество простых чисел в сегменте (1.2). Для остальных пар ν_1, ν_2 будем иметь формулу (10.9) ($\lambda=0$).

Пусть $\delta_1 < \exp(\ln\ln n)^3$ — нечетное число. Количество чисел ν_1, ν_2 с условиями $\nu_1 \neq \nu_2$, $(\nu_1\nu_2, n)=1$, ν_i — простые числа из сегмента (1.2) и

$$\left.\begin{aligned} \nu_1-\nu_2 &\equiv 0 \pmod 4, \\ \nu_1-\nu_2 &\equiv 0 \pmod{\delta_1}, \end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$

будет равно

$$\frac{L_1^2}{2\varphi(\delta_1)}\left(1+B(C)(\ln n)^{-C}\right), \tag{11.5}$$

если $\delta_1 < (\ln n)^{K_1}$ (хорошо известную неэффективность этой формулы можно обойти за счет усложнения рассуждений; см. [9], с. 321—322).

Далее, имеем оценку

$$\frac{BL_1^2}{2\varphi(\delta_1)}, \tag{11.6}$$

если $(\ln n)^{K_1} < \delta_1 < \exp(\ln\ln n)^3$, как следует из известных теорем теории решета. Заметим теперь, что если нечетное $\delta \mid n(\nu_1-\nu_2)$, то δ можно представить в виде $\delta=\delta_1\delta_0$, где $(\delta_1, n)=1$ и $\delta_0 = p_1^{\rho_1'}p_2^{\rho_2'}\ldots p_k^{\rho_k'}$. При этом должно быть

$$\nu_1-\nu_2 \equiv 0\left(\bmod\ 4\delta_1 p_1^{\sigma_1}\ldots p_k^{\sigma_k}\right), \tag{11.7}$$

где $\sigma_i = \max(0, \rho_i'-\rho_i)$. Далее, ряд $\sum(1/m\varphi(m))$ сходится абсолютно, и $1/m\varphi(m) < B(\ln m/m^2)$ $(m>1)$. Пользуясь оценками (11.5) и (11.6) и указанным выше разложением $\delta=\delta_0\delta_1$, можем произвести суммирование (10.9) по ν_1, ν_2 ($\lambda=0$).

После элементарных алгебраических выкладок, которые мы опускаем, приходим к выражению

$$\frac{\pi^2}{2}D_1L_1^2\prod_{p>2}\frac{p^3-p^2+1}{p^2(p-1)}\prod_{\substack{p^\rho\| n\\ p>2}}\frac{(p^{\rho+1}-1)(p^2-1)+p}{p^\rho(p^3-p^2+1)}+ \\ +B(C)D_1L_1^2(\ln n)^{-C}, \tag{11.8}$$

где C — сколь угодно большая константа; знак $p^\rho \| n$ означает: $p^\rho \mid n$, $p^{\rho+1}\nmid n$. Заметим, что первое произведение в (11.8) сходится абсолютно. Во втором произведении при $\rho=0$ (т. е. при $p\nmid n$) получаются единицы.

§ 12. Рассмотрим случай $\lambda>0$, $2^\lambda < n^{\varepsilon_0}$ (см. (10.5)). Здесь должны быть выполнены условия $\nu_1 \equiv \nu_2 \pmod{2^{\lambda+2}}$. Будем рассматривать λ, удовлетворяющие условию

$$2^\lambda < (\ln n)^{K_1}, \tag{12.1}$$

где $K_1 > K_0$ — заданная большая константа. Для таких λ можем провести предыдущие вычисления и придем, пользуясь (10.9), к выражению

$$\frac{\pi^2}{2^{2\lambda+1}} D_1 L_1^2 \prod_{p>2} \frac{p^3-p^2+1}{p^2(p-1)} \prod_{\substack{p^\rho \| n \\ p>2}} \frac{(p^{\rho+1}-1)(p^2-1)+p}{p^\rho(p^3-p^2+1)} + \\ + BD_1L_1^2(\ln n)^{-K_2}. \tag{12.2}$$

§ 13. Для нахождения зональной дисперсии V' вида (3. 5) уравнения (3. 1) введем еще выражение $A\ (n, D)$ ожидаемого асимптотического выражения для числа решений при данном D уравнения

$$n=\xi^2+\eta^2+D\nu, \tag{13.1}$$

где ν — простые числа из сегмента (1. 2), а D — заданное нечетное число, $D \leqslant n/N_1$. Сперва считаем n четным, $\xi^2+\eta^2$ будет тогда нечетным. $A\ (n,\ D)$ находится таким образом: для каждого $q \leqslant (\ln n)^{K_3}$ рассматривается число решений сравнения $n-D\nu \equiv \equiv 0 \pmod q$ при данном D и переменном простом ν; пусть главным членом соответствующего выражения будет $N\ (q,\ n,\ D)$. Составляется ряд $\sum\limits_{q \leqslant (\ln n)^{K_3}} \chi_4(q)\, N(q, n, D)\, q^{-1}$, к которому затем приписываются формально такие же числа с $q > (\ln n)^{K_3}$. Этот ряд и принимается за $A\ (n,\ D)$ — ожидаемое в среднем квадратичном число решений уравнения (13. 1). Приведем получающееся таким образом определение А $(n,\ D)$. Пусть

$$n=2^\mu p_1^{\rho_1} p_2^{\rho_2} \ldots p_k^{\rho_k}, \quad p_i \text{ нечетные.} \tag{13.2}$$

Тогда $A\ (n,\ D)$ будет зависеть от того, какая степень чисел p делит D. Для каждого p_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ вводим $\Delta_i \geqslant 0$, такое, что

$$p_i^{\Delta_i} \| D. \tag{13.3}$$

Набор чисел $\{\Delta_1,\ \Delta_2, \ldots, \Delta_n\}$ входит в определение $A\,(n,\ D)$. Нужно положить при заданных $\Delta_1,\ \Delta_2, \ldots, \Delta_n$

$$A\ (n,\ D)=\pi L_1 A_0 \prod_{\substack{p \mid D \\ p \nmid n}} (1+\xi_p) \prod_{p_i \mid n} (1+\xi_{p_i})(1+\eta(p_i,\ \Delta_i)), \tag{13.4}$$

где

$$A_0=\prod_p \left(1+\frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right) \tag{13.5}$$

(см. (0.7)),

$$1+\xi_p=\frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)}=1-\frac{p\chi_4(p)}{p^2-p+\chi_4(p)}, \tag{13.6}$$

$$1+\eta(p_i,\ \Delta_i)=\begin{cases} 1+\chi_4(p_i)+\ldots+\chi_4^{\Delta_i}(p_i) & \text{при } \Delta_i<\rho_i, \\ 1+\chi_4(p_i)+\ldots+\chi_4^{\rho_i}(p_i) & \text{при } \Delta_i>\rho_i, \\ 1+\chi_4(p_i)+\ldots+\chi_4^{\rho_i}(p_i)+\dfrac{p_i\chi_4^{\rho_i+1}(p_i)}{(p_i-1)(p_i-\chi_4(p_i))} & \\ \qquad\qquad \text{при } \Delta_i=\rho_i. \end{cases} \tag{13.7}$$

Заметим, что $|\xi_p| < 2/p\ (p \geqslant 3)$.

§ **14.** Мы можем теперь произвести суммирование

$$\sum_{(D)} (A(n, D))^2, \tag{14.1}$$

где D пробегает нечетные числа, $D \leqslant n/N_1$. Для этого разбиваем сперва значения D на категории по значениям $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n\}$.

Обозначая через $D_1 = n/N_1$ длину сегмента изменения D, видим, что количество D в заданной категории будет

$$\frac{1}{2} D_1 \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^{\Delta_i}} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + B. \tag{14.2}$$

Из (13.4) находим:

$$(A(n, D))^2 = \pi^2 L_1^2 A_0 \prod_{\substack{p \mid D \\ p \nmid n}} (1 + 2\xi_p + \xi_p^2) \prod_{p_i \mid n} (1 + \xi_{p_i})^2 (1 + \eta(p_i, \Delta_i))^2. \tag{14.3}$$

Пусть

$$1 + 2\xi_p + \xi_p^2 = 1 + E_p, \quad |E_p| \leqslant \frac{2}{p} + \frac{4}{p^2}. \tag{14.4}$$

Из (14.3) видим, что только первое произведение зависит от D; дело приводится к суммированию по нужным нам D выражения

$$\prod_{\substack{p \mid D \\ p \nmid n}} (1 + E_p). \tag{14.5}$$

Заметим еще, что в (14.2) можем считать

$$\prod p_i^{\Delta_i} \leqslant n^{\varepsilon_6}, \tag{14.6}$$

ибо если $\prod p_i^{\Delta_i} > n^{\varepsilon_6}$, то, ввиду того что $p_i \mid n$, суммой выражений (14.2) при таком условии будет

$$B D_1 n^{-\varepsilon_6/2} \tag{14.7}$$

и суммирование по таким D в (14.3), как нетрудно подсчитать, дает выражение

$$B D_1 L_1^2 n^{-\varepsilon_6/4}. \tag{14.8}$$

§ **15.** Пусть q — нечетное число, свободное от квадратов, $E_q = \prod_{p \mid q} E_p$. Дело приводится к суммированию при каждом q, $(q, n) = 1$, по $D \equiv 0 \pmod{q}$ из данной категории. Для данного $q \leqslant D_1$ получается член

$$\frac{E_q}{2} \frac{1}{2} D_1 \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i^{\Delta_i}} + B E_q. \tag{15.1}$$

Далее, $|E_q| \leqslant \tau(q)/q$, $E_q/q \leqslant \tau(q)/q^2$. Суммирование по вторым членам дает $B \ln^2 n$, а первые члены образуют ряд, сходящийся как $1/q^2$. Мы можем оборвать его при $q \geqslant (\ln n)^{K_3}$. Таким образом, суммируя (14.3) в данной категории и затем собирая по категориям, получим выражение

$$\sum_{\substack{D \leqslant D_1 \\ D \text{ нечетно}}} (A(n, D))^2 = \frac{\pi^2}{2} L_1^2 A_0^2 D_1 \prod_{\substack{p \nmid n \\ p > 2}} \left(1 + \frac{2\xi_p}{p} + \frac{\xi_p^2}{p}\right) \times$$

$$\times \prod_{p_i \mid n} (1 + \xi_{p_i})^2 \sum_{\Delta_i = 0}^{\infty} (1 + \eta(p_i, \Delta_i))^2 \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \frac{1}{p_i^{\Delta_i}} + B L_1^2 D_1 (\ln n)^{-K_4}. \quad (15.2)$$

Это можно переписать так:

$$\sum_{\substack{D \leqslant D_1 \\ D \text{ нечетно}}} (A(n, D))^2 = \frac{\pi^2}{2} D_1 L_1^2 A_0^2 \prod_{p > 2} \left(1 + \frac{2\xi_p}{p} + \frac{\xi_p^2}{p}\right) \times$$

$$\times \prod_{p_i \mid n} \frac{(1 + \xi_{p_i})^2}{1 + 2\xi_{p_i}/p_i + \xi_{p_i}^2/p_i} \sum_{\Delta_i = 0}^{\infty} (1 + \eta(p_i, \Delta_i))^2 \frac{1}{p_i^{\Delta_i}} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) +$$

$$+ B L_1^2 D_1 (\ln n)^{-K_4}. \quad (15.3)$$

Имеем: $A_0 = \prod_p (1 + \chi_4(p)/p(p-1))$. Далее, непосредственно находим

$$\left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right)^2 \left(1 + \frac{2\xi_p}{p} + \frac{\xi_p^2}{p}\right) = \frac{p^3 - p^2 + 1}{p^2(p-1)}, \quad (15.4)$$

так что главный член (15.3) превращается в произведение

$$\frac{\pi^2}{2} D_1 L_1^2 \prod_{p > 2} \frac{p^3 - p^2 + 1}{p^2(p-1)} \prod\nolimits_1, \quad (15.5)$$

где первое произведение абсолютно сходится и

$$\Pi_1 = \prod_{p_i \mid n} \frac{(1 + \xi_{p_i})^2}{1 + 2\xi_{p_i}/p_i + \xi_{p_i}^2/p_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \sum_{\Delta_i = 0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\Delta_i}} (1 + \eta(p_i, \Delta_i))^2. \quad (15.6)$$

При данном p_i подсчет отдельного множителя является элементарной задачей; значения ξ_{p_i} даны формулой (13.6), а $\eta(p_i, \Delta_i)$ — формулой (13.7). Какого-либо упрощения вычислений провести не удается; окончательный результат подсчета дает:

$$\Pi_1 = \prod_{p_i \mid n} \frac{(p_i^{\rho+1} - 1)(p_i^2 - 1) + p_i}{p_i^{\rho_i}(p_i^3 - p_i^2 + 1)}. \quad (15.7)$$

Таким образом, имеем для четного n:

$$\sum_{\substack{D\leqslant D_1\\ D \text{ нечетно}}} (A(n, D))^2 = \frac{\pi^2}{2} D_1 L_1^2 \prod_{p>2} \frac{p^3-p^2+1}{p^2(p-1)} \prod_{\substack{p^\rho | n\\ p>2}} \frac{(p^{\rho+1}-1)(p^2-1)+p}{p^\rho(p^3-p^2+1)} + \\ + BL_1^2 D_1 (\ln n)^{-K_4} \qquad (15.8)$$

(заметим, что при $\rho=0$, $p \nmid n$ во втором произведении получаются единицы).

§ 16. Сравнивая выражение (15. 8) с (11. 8), видим, что (15. 8) и (11. 8) совпадают с точностью до остаточных членов. Обращаясь к § 3 (формулы (3. 7)—(3. 9)), видим, что для доказательства совпадения V_1 и V_3 с точностью до остаточных членов надо еще дать оценку суммы

$$\sum_{\nu, D} (U(n-D\nu))^2, \qquad (16.1)$$

отвечающей совпадениям $\nu_i : \nu_1 = \nu_2$. Здесь можно удовольствоваться грубой оценкой. Так как ν простые, то $D\nu$ могут повторяться не более двух раз, так что (16. 1) не превосходит

$$2 \sum_{m\leqslant n} (U(m))^2 = Bn \ln^4 n = BD_1 L_1^2 (\ln n)^{-K_4}. \qquad (16.2)$$

Таким образом, имеем:

$$V_1 = V_3 + BD_1 L_1^2 (\ln n)^{-K_4}. \qquad (16.3)$$

Мы предполагали n четным. Если n нечетное, то будем рассматривать уравнение (10. 1) при заданном λ, $2^\lambda \leqslant (\ln n)^{K_5}$ и нечетном $\xi^2+\eta^2$. При данном нечетном D ν должны быть таковы, что $2^\lambda \| n-D\nu$; здесь в качестве $A(n, D)$ берем значение его из (13. 4), деленное на 2^λ; в (15. 8) получается главный член того же вида, деленный на $2^{2\lambda}$; учитывая (12. 2) и (16. 2), снова приходим к (16. 3) с заменой K_4 на K_6 (K_6 — заданная сколь угодно большая константа).

§ 17. Нам остается сравнить V_2 и V_3. Считая сперва n четным, мы хотим доказать, что

$$\sum_{(\nu)} \sum_{\substack{D\leqslant D_1\\ D \text{ нечетно}}} U(n-D\nu) A(n, D) = \\ = \frac{\pi^2}{2} D_1 L_1^2 \prod_{p>2} \frac{p^3-p^2+1}{p^2(p-1)} \prod_{\substack{p^\rho \| n\\ p>2}} \frac{(p^{\rho+1}-1)(p^2-1)+p}{p^\rho(p^3-p^2+1)} + \\ + BL_1^2 D_1 (\ln n)^{-K_7}. \qquad (17.1)$$

Обращаясь к выражению (13. 4) для $A(n, D)$, снова разбиваем значения D на категории по значениям $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$. Пусть

$(D;\ \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ — соответствующая область значений D. Имеем:

$$\sum_{(\nu)} \sum_{(D;\ \Delta_1, \ldots, \Delta_n)} U(n - D\nu) A(n, D) =$$

$$= \pi L_1 A_0 \prod_{p_i \mid n} (1 + \xi_{p_i})(1 + \eta(p_i, \Delta_i)) \times$$

$$\times \sum_{(\nu)} \sum_{(D;\ \Delta_1, \ldots, \Delta_n)} \prod_{\substack{p \mid D \\ p \nmid n}} (1 + \xi_p) U(n - D\nu). \qquad (17.2)$$

Положим для нечетного числа q, свободного от квадратов, $\xi_q = \prod_{p \mid q} \xi_p$; тогда $\xi_q \leqslant \tau(q)/q$. Легко убеждаемся, что за счет погрешности $BD_1L_1^2 n^{-\varepsilon_7}$ $(\varepsilon_7 \geqslant 10\varepsilon_6)$ можно считать $q \leqslant n^{\varepsilon_8}$, и внутренняя сумма сведется к

$$\sum_{(\nu)} \sum_{\substack{(q, n)=1 \\ q \leqslant n^{\varepsilon_8}}} \xi_q \sum_{(D;\ \Delta_1, \ldots, \Delta_n)} U(n - D\nu). \qquad (17.3)$$

Здесь числа q нечетны и свободны от квадратов. Во внутренней сумме $p_i^{\Delta_i} \parallel D$. Рассмотрим сумму $\sum U(n - D\nu)$ при данном ν и D, удовлетворяющем условию $qp_1^{\Delta_1} \ldots p_k^{\Delta_k} \mid D$; D нечетное; $D \leqslant D_1$. Она приводится к сумме

$$\sum U(n - dp_1^{\Delta_1} \ldots p_k^{\Delta_k} q\nu),$$

где d нечетно и $d \leqslant D_1/p_1^{\Delta_1} \ldots p_k^{\Delta_k} q$.

Проведем подсчет такой суммы. Она равна количеству нечетных чисел $\xi^2 + \eta^2 \equiv n \pmod{p_1^{\Delta_1} \ldots p_k^{\Delta_k} q\nu}$, лежащих между $n - \nu$ и $n - D_1\nu$. При этом $p_1^{\Delta_1} \ldots p_k^{\Delta_k} q < n^{\varepsilon_6 + \varepsilon_8}$, $\nu \leqslant n^{1/6 - \varepsilon_0}$.

Пусть $Q(n, p^s)$ — полное число решений сравнения

$$\xi^2 + \eta^2 \equiv n \pmod{p^s}. \qquad (17.4)$$

Тогда элементарным подсчетом убеждаемся в том, что наша сумма имеет асимптотическое выражение

$$\frac{\pi D_1}{2q^2\nu p_1^{2\Delta_1} \ldots p_k^{2\Delta_k}} \prod_{p \mid q\nu} Q(n, p) \prod_{i=1}^{k} Q(n, p_i^{\Delta_i}) + B\sqrt{n}\,\nu n^{\varepsilon_9}. \qquad (17.5)$$

Заметим, что так как $\nu \leqslant n^{1/6 - \varepsilon_0}$, то $\sqrt{n}\,\nu n^{\varepsilon_9} \leqslant n^{2/3 - \varepsilon_0 + \varepsilon_9}$, и, считая $\varepsilon_9 < \varepsilon_0/100$, видим, что остаточный член в (17.5) может быть записан в виде

$$B \frac{D_1 n^{-\varepsilon_{10}}}{2q^2\nu p_1^{2\Delta_1} \ldots p_k^{2\Delta_k}}. \qquad (17.6)$$

§ **18.** Число решений сравнения (17.4) задается следующей таблицей, где p нечетно и $p^\rho \| n$, $\rho > 0$:

При $\rho \geqslant s$

$p \equiv 1 \pmod 4$	$p \equiv -1 \pmod 4$
$Q(n, p^s) = p^s\left(s+1-\frac{s}{p}\right)$	$Q(n, p^s) = p^{s-1}$ (s нечетно) $Q(n, p^s) = p^s$ (s четно)

При $\rho < s$

	$p \equiv 1 \pmod 4$	$p \equiv -1 \pmod 4$
1) s нечетно, ρ нечетно	$(\rho+1)p^\rho\left(1-\frac{1}{p}\right)$	0
2) s нечетно, ρ четно	$(\rho+1)p^\rho\left(1-\frac{1}{p}\right)$	$p^\rho\left(1+\frac{1}{p}\right)$
3) s четно, ρ нечетно	$(\rho+1)p^\rho\left(1-\frac{1}{p}\right)$	0
4) s четно, ρ нечетно	$(\rho+1)p^\rho\left(1-\frac{1}{p}\right)$	$p^\rho\left(1+\frac{1}{p}\right)$

Мы должны учесть еще, что $p_i^{\Delta_i} \| D$, так что $p_i^{\Delta_i+1} \nmid D$. Учитывая это и данные таблицы для $Q(n, p^s)$, приходим к выражению для внутренней суммы в (17.3):

$$\frac{1}{2}\frac{\pi D_1}{q}\prod_{p\mid q^\nu}\left(1-\frac{\chi_4(p)}{p}\right)\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{p_i^{2\Delta_i}}Q(n, p_i^{\Delta_i}) - \frac{1}{p_i^{2\Delta_i+2}}Q(n, p_i^{\Delta_i+1})\right] +$$
$$+ B\frac{D_1 n^{-\varepsilon_{10}}}{2\nu q^2 p_1^{2\Delta_1}\dots p_k^{2\Delta_k}}. \qquad (18.1)$$

Заметим теперь, что член $1-\chi_4(\nu)/\nu$ можно заменить на 1 с погрешностью $O(1/\nu) = O(\exp(-(\ln n)^{\alpha_0}))$. Далее, $|\xi_q/q| \leqslant \tau(q)/q$. Ввиду этого (17.3) можно переписать так:

$$\frac{1}{2}\pi D_1 L_1 \sum_{(q,\, 2n)=1}\frac{\xi_q}{q}\left(1-\frac{\chi_4(q)}{q}\right)\prod_{i=0}^{k}\left[\frac{1}{p_i^{2\Delta_i}}Q(n, p^{\Delta_i}) - \frac{1}{p_i^{2\Delta_i+2}}Q(n, p^{\Delta_i+1})\right] +$$
$$+ BD_1L_1\exp(-(\ln n)^{\alpha_0/2}). \qquad (18.2)$$

Из выражения для ξ_q (см. (13.6)) находим для абсолютно сходящегося ряда в (18.2):

$$\sum_{(q,\, 2n)=1}\frac{\xi_q}{q}\left(1-\frac{\chi_4(q)}{q}\right) = \prod_{p\nmid 2n}\frac{p^3-p^2+1}{p(p^2-p+\chi_4(p))}. \qquad (18.3)$$

Внося в (17.2) и учитывая выражение для A_0, находим из (17.2) выражения

$$\frac{\pi^2}{2}D_1L_1^2\prod_{p>2}\frac{p^3-p^2+1}{p^2(p-1)}\prod_{p_i\mid n}\left(1+\frac{\chi_4(p_i)}{p_i(p_i-1)}\right)\frac{p_i^2(p_i-1)}{p_i^3-p_i^2+1}\times$$
$$\times(1+\xi_{p_i})(1+\eta(p_i,\Delta_i))\left[\frac{1}{p_i^{2\Delta_i}}Q(n,p_i^{\Delta_i})-\frac{1}{p_i^{2\Delta_i+2}}Q(n,p_i^{\Delta_i+1})\right]+$$
$$+BD_1L_1^2\exp\left(-(\ln n)^{\alpha_0/2}\right). \qquad (18.4)$$

Легко убедиться, что в (18.4) можно суммировать по Δ_i от 0 до ∞, заменяя остаточный член на $BD_1L_1^2(\ln n)^{-K_7}$. Кроме того,

$$(1+\xi_{p_i})\left(1+\frac{\chi_4(p_i)}{p_i(p_i-1)}\right)=1-\frac{\chi_4(p_i)}{p_i},$$

и, суммируя главный член (18.4) по категориям $(\Delta_1,\ldots,\Delta_k)$, найдем:

$$\frac{\pi^2}{2}D_1L_1^2\prod_{p>2}\frac{p^3-p^2+1}{p^2(p-1)}\prod_{p_i\mid n}\frac{p_i^2(p_i-1)}{p_i^3-p_i^2+1}\left(1-\frac{\chi_4(p_i)}{p_i}\right)(1+\eta(p_i,\Delta_i))\times$$
$$\times\sum_{\Delta_i=0}^{\infty}\left[\frac{1}{p_i^{2\Delta_i}}Q(n,p^{\Delta_i})-\frac{1}{p_i^{2\Delta_i+2}}Q(n,p_i^{\Delta_i+1})\right]+BD_1L_1^2(\ln n)^{-K_7}. \qquad (18.5)$$

Прямой подсчет с помощью таблицы значений $Q(n,p^s)$ дает:

$$\frac{p_i^2(p_i-1)}{p_i^3-p_i^2+1}\left(1-\frac{\chi_4(p_i)}{p_i}\right)(1+\eta(p_i,\Delta_i))\times$$
$$\times\sum_{\Delta_i=0}^{\infty}\left[\frac{1}{p_i^{2\Delta_i}}Q(n,p_i^{\Delta_i})-\frac{1}{p_i^{2\Delta_i+2}}Q(n,p^{\Delta_i+1})\right]=$$
$$=\frac{(p_i^{\rho_i+1}-1)(p_i^2-1)+p_i}{p_i^{\rho_i}(p_i^3-p_i^2+1)}. \qquad (18.6)$$

Таким образом,

$$V_1=\frac{\pi^2}{2}D_1L_1^2\prod_{p>1}\frac{p^3-p^2+1}{p^2(p-1)}\prod_{\substack{p^\rho\parallel n\\ p>2}}\frac{(p^{\rho+1}-1)(p^2-1)+p}{p^\rho(p^3-p^2+1)}+$$
$$+BD_1L_1^2(\ln n)^{-K_7} \qquad (18.7)$$

и

$$V_2=V_3+BD_1L_1^2(\ln n)^{-K_7}. \qquad (18.8)$$

Совершенно аналогично проводим подсчет для уравнения (10.1) при заданном λ и $2^\lambda\leqslant(\ln n)^{K_5}$ в случае нечетного n.

§ **19.** Итак, имеем для уравнения (3.1) (см. (3.4)):

$$V' = BD_1L_1^2(\ln n)^{-K_8}. \tag{19.1}$$

Пусть $K_9 < K_8/10$ — какая-либо константа; D' пробегает простые числа $\leqslant N_1$, а Q_r — количество таких чисел среди них, что

$$L_1(r+1)(\ln n)^{-K_8/10} \geqslant \left|\sum_{(\nu)} U(n - D'\nu) - A(n, D')\right| \geqslant$$
$$\geqslant L_1 r (\ln n)^{-K_8/10}. \tag{19.2}$$

Тогда, очевидно, $r \leqslant B(\varepsilon)n^{\varepsilon}$ и, рассуждая, как при доказательстве неравенства Чебышева, находим:

$$Q_r = BD_1(\ln n)^{-K_8/2}r^{-2}. \tag{19.3}$$

Оценим теперь $\sum\limits_{D'}\sum\limits_{\nu} U(n - D'\nu) - \sum\limits_{D'} A(n, D')$, где сумма по D' берется для D', отвечающих данному r. В силу (19.2) и (19.3) эта сумма не превосходит

$$Q_rL_1(r+1)(\ln n)^{-K_8/10} = BD_1(\ln n)^{-K_8/2}\frac{L_1}{r}. \tag{19.4}$$

Суммируя по r от $r = 1$ до $B(\varepsilon)n^{\varepsilon}$ (можно взять $\varepsilon = 1/10$), получаем оценку

$$BD_1L_1(\ln n)^{-K_9}. \tag{19.5}$$

При $r < 1$, т. е. для всех остальных D, в количестве

$$D_1 - BD_1(\ln n)^{-K_8/2} \tag{19.6}$$

будем иметь:

$$\left|\sum_{(\nu)} U(n - D\nu) - A(n, D)\right| < L_1(\ln n)^{-K_8/10}. \tag{19.7}$$

Отсюда

$$\sum_{(\nu)}\sum_{\substack{D\ \text{простое} \\ D \leqslant D_1}} U(n - D\nu) = \sum_{\substack{D \leqslant D_1 \\ D\ \text{простое}}} A(n, D) + BD_1L_1(\ln n)^{-K_{10}}. \tag{19.8}$$

Для четного n при простом D имеем из (13.4):

$$A(n, D) = \pi A_0 L_1 \prod_{p \mid n}(1 + \xi_{p_i}) + B, \tag{19.9}$$

т. е.

$$A(n, D) = \pi A_0 L_1 \prod_{p \mid n}\frac{(p-1)(p - \chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} + B. \tag{19.10}$$

Подставляя это выражение в (19.8) и учитывая, что число значений D есть $\mathrm{Li}(n/N_1) + B(n/N_1)(\ln n)^{-C}$, доказываем формулу (1.4).

§ **20.** Обратимся к случаю нечетного n и к уравнению (10. 1). Здесь будут иметь место те же рассуждения с заменой прежнего выражения $A(n, D)$ на $A(n, D)/2^\lambda$ ($\lambda=1, 2, \ldots$).

Суммируя получившееся выражение по λ при $\lambda \leqslant (\ln n)^{K_0}$, снова придем к выражению вида (1. 4). Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2 не имеет существенных отличий от доказательства теоремы 1: если вместо последовательности простых чисел ν пробегает последовательность их a-х степеней, то количество ν, удовлетворяющих условию $\nu \leqslant N_2$, будет асимптотически выражаться как $\mathrm{Li}\,(N_2^{1/a})$; распределение их в прогрессиях разностей $\leqslant (\ln n)^{K_0}$ будет сводиться к распределению простых чисел в прогрессиях таких же разностей; остаточный член будет лучше, чем в теореме 1 (см. (0.9)), так как не нужно отбрасывать интервалов малого изменения ν, что создает наибольшие погрешности.

Для доказательства теоремы 3 вместо замены D' на все нечетные числа D данного интервала надо заменить D' на все числа данного интервала, не имеющие простых множителей, меньших $n^{1/(\ln\ln n)^2}$. Как показал К. Хооли [10], такие числа хорошо распределены в прогрессиях с большой разностью; соответствующие уравнения вида (4. 1)

$$\nu_1\varphi(\xi, \eta) - \nu_2\varphi(\xi', \eta') = n(\nu_1 - \nu_2)$$

будут содержать еще дополнительные условия вида $\varphi(\xi, \eta) \equiv n \pmod{d^m}$, $\varphi(\xi', \eta') \equiv n \pmod{d^m}$, так как ν_1 и ν_2 уже не взаимно просты. Замена же нечетных чисел D на числа указанного вида, не имеющие малых простых множителей, приведет еще к дополнительным условиям

$$\varphi(\xi, \eta) \equiv n \pmod{r_1}, \quad \varphi(\xi', \eta') \equiv n \pmod{r_2},$$

где $r_1 \leqslant n^{\alpha_2}$, $r_2 \leqslant n^{\alpha_2}$ и α_2 — сколь угодно малая константа. Уравнение (4. 1) легко разрешается и при таких дополнительных условиях, и мы получаем асимптотическую формулу (0. 10).

Заметим еще, что вместо $\xi^2+\eta^2$ в предыдущих рассуждениях можно взять любую целочисленную бинарную форму за счет замены числа $1/6-\varepsilon_0$ на $1/20-\varepsilon_0$. Теорема типа 1 от этого не меняется, а в остальных теоремах надо заменить $1/6-\varepsilon_0$ на $1/20-\varepsilon_0$. При этом уже можно не пользоваться оценками Андрэ Вейля для суммы Клостермана, а достаточны более старые оценки Г. Д. Клостермана [7] и Г. Салье [6].

Литература

1. Линник Ю. В. Дисперсия делителей и квадратичных форм в прогрессиях и некоторые бинарные аддитивные задачи. — ДАН СССР, 1958, т. 120, № 5, с. 960—962.
2. Линник Ю. В. Решение некоторых бинарных задач подсчетом дисперсии в прогрессиях. — ДАН СССР, 1958, т. 123, № 6, с. 975—977.

3. Ожигова Е. П. Видоизменение метода решета Эратосфена, данное А. Сельбергом. — Успехи мат. наук., 1953, т. 8, вып. 3, с. 119—124.
4. Линник Ю. В. Асимптотическое распределение приведенных бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского. 2. — Вестник ЛГУ, 1955, № 5. Сер. мат., физ., хим., вып. 2, с. 3—32.
5. Carlitz L., Uchiyama S. Bounds for exponential sums. — Duke Math. J., 1957, vol. 24, № 1, p. 37—41.
6. Salié H. Über Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$. — Math. Z., 1931, Bd 34, № 1, S. 91—109.
7. Kloosterman H. D. On the representation of numbers in the form $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$. — Acta Math., 1926, vol. 49, p. 407—464.
8. Виноградов А. И., Линник Ю. В. Оценка суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии. — Успехи мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4, с. 277—280.
9. Виноградов И. М. Избранные труды. М., 1952. 436 с.
10. Hooley C. On the representation of a number as the sum of two squares and a prime. — Acta Math., 1957, vol. 97, № 3—4, p. 189—210.

ВСЕ БОЛЬШИЕ ЧИСЛА — СУММЫ ПРОСТОГО И ДВУХ КВАДРАТОВ. (О ПРОБЛЕМЕ ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА). I—II.

Мат. сб., 1960, т. 52, вып. 2, с. 661—700; 1961, т. 53, вып. 1, с. 3—38

Введение. В работе [1] рассматривались применения «дисперсионного метода» к некоторым аддитивным задачам типа задач Харди—Литтлвуда [2]. После введения понятия зональной дисперсии уравнения (см. [1], § 3) основным аппаратом «дисперсионного метода» является некоторое видоизменение основных идей известного метода И. М. Виноградова.

В настоящей работе, продолжающей статью [1], при использовании «дисперсионного метода» и дополнительных соображений решается для всех больших чисел n известное уравнение Харди—Литтлвуда [2]

$$n = p + \xi^2 + \eta^2. \tag{0.1}$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Число решений $Q(n)$ уравнения* (0. 1) *при достаточно большом n удовлетворяет неравенству*

$$Q(n) > 0.979\pi \frac{n}{\ln n} \prod_p \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right) \cdot \prod_{p\mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)}. \tag{0.2}$$

Легко заметить, что для второго произведения в правой части имеем оценку

$$\left(\prod_{p\mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)}\right)^{-1} = O(\ln\ln n),$$

так что число решений $Q(n)$ весьма велико.[1]

[1] В мемуаре Харди и Литтлвуда [2] высказывается гипотеза, что $Q(n)$ асимптотически представляется правой частью (0.2) с заменой множителя

Установление асимптотики для $Q(n)$ требует дополнительных рассуждений, которыми мы здесь не будем заниматься. Здесь мы докажем лишь асимптотическую формулу следующего типа. Пусть $P = \exp(\ln n \ln \ln \ln n / k \ln \ln n)$, где K — достаточно большая константа, и $L(n) = \sum\limits_{\substack{p_1 p_2 \leqslant n \\ p_i > P}} 1$. Пусть $S(n)$ — число решений уравнения

$$n = p_1 p_2 + \xi^2 + \eta^2, \quad p_i > P \ (i = 1, 2). \tag{0.3}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.

$$5Q(n) + 6S(n) =$$

$$= \pi \prod_p \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right) \cdot \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} \left(5 \frac{n}{\ln n} + 6L(n)\right) + R(n), \tag{0.4}$$

где

$$|R(n)| < n / (\ln n)^{1+\tau_0}, \quad \tau_0 \text{ — \textit{положительная константа.}}$$

Заметим, что в работе [1] выведена асимптотическая формула для числа решений уравнения (0. 3) без ограничений $p_i > P$. Однако остаточный член этой формулы, будучи бесконечно малым относительно главного члена, все же слишком груб, чтобы можно было сочетать указанную формулу с (0. 4).

Изложенных в настоящей статье рассуждений в сочетании с некоторыми элементарными теоремами арифметической теории квадратичных форм достаточно для решения уравнения

$$n = p + Q(\xi, \eta), \tag{0.5}$$

где $Q(\xi, \eta) = a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2$ — примитивная положительная квадратичная форма и $n > n_0 = n_0(Q)$. Соответствующее доказательство будет изложено в другом месте.

§ 1. В дальнейшем будем употреблять следующие обозначения:

K_0, K_1, K_2 — большие положительные константы;

a_0, a_1, a_2 — положительные константы;

ε_0, ε_1, . . .; α_0, α_1, . . .; η_0, η_1, . . . — малые положительные константы (каждая из констант фиксируется по всем предыдущим);

B — ограниченная абсолютной константой функция, не всегда одна и та же;

$\tau_k(m) = {\sum\limits_{x_1 x_2 \ldots x_k = m}}' 1$ — число распадений числа m на k множителей, причем учитывается порядок.

0.979 на 1. В моей заметке [3] утверждается верность этой гипотезы и указывается остаточный член формулы. В силу пробела в рассуждениях заметки [3] на самом деле пока нельзя гарантировать такого остаточного члена. Вопросу об асимптотической формуле для $Q(n)$ будет посвящена особая работа.

Пусть $K > 100$ — большая константа, которая будет фиксирована в дальнейшем, n — достаточно большое число,

$$P = \exp\left(\frac{\ln n \ln \ln \ln n}{K \ln \ln n}\right), \tag{1.1}$$

Ω_P — множество целых чисел, все простые множители которых больше P. Положим $\zeta_P(s) = \prod_{p>P}(1-p^{-s})^{-1}\,(s>1)$; $\zeta_P(s) = 1 + T(s)$. Рассматривая

$$\ln \zeta_P(s) = T(s) - \frac{(T(s))^2}{2} + \frac{(T(s))^3}{3} - \ldots,$$

легко выводим (см. [3]):

$$Q(n) = \sum_{k=1}^{r_1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\xi^2+\eta^2 \leqslant n} \tau'_k(n - \xi^2 - \eta^2) + Bn^{3/4}, \tag{1.2}$$

где $\tau'_k(m)$ — число решений уравнения $x'_1 \ldots x'_k = m$ при $x'_i \in \Omega_P$, r_1 — константа, на которой ряд (1.2) естественно обрывается. Из (1.1) очевидно, что

$$r_1 \leqslant \frac{K \ln \ln n}{\ln \ln \ln n} = r_0. \tag{1.2'}$$

Обозначим через $Q_k(n)$ число решений уравнения

$$n = x'_1 \ldots x'_k + \xi^2 + \eta^2, \quad x'_i \in \Omega_P. \tag{1.3}$$

Тогда получим из (1.2):

$$Q(n) = Q_1(n) - \frac{1}{2}Q_2(n) + \frac{1}{3}Q_3(n) - \frac{1}{4}Q_4(n) + \frac{1}{5}Q_5(n) - \frac{1}{6}Q_6(n) + \\ + \frac{1}{7}Q_7(n) - \ldots + (-1)^{r_1+1}\frac{1}{r_1}Q_{r_1}(n) + Bn^{3/4}. \tag{1.4}$$

Ряд в (1.4) обрывается после $u = r_1$. Мы видим, таким образом, что для нахождения $Q(n)$ достаточно найти $Q_u(n)$ при $u \leqslant r_1$. Однако соответствующие асимптотические формулы должны иметь погрешность, например, вида $B(n/(\ln n)^{1+\tau_0})$, где $\tau_0 > 0$, ибо само $Q(n)$ ожидается порядка (0.2).

Нетрудно дать оценку $\tau'_k(m)$ при $k \leqslant r_1$. Имеем:

$$\tau'_k(m) = Br_0^{r_0} = B(\ln n)^{2K}. \tag{1.5}$$

§ 2. Обратимся к уравнениям (1.3) при $k \leqslant r_1$. Уравнение с данным индексом k обозначим через (Y'_k). Уравнения (Y'_1), (Y'_2), (Y'_3), (Y'_4), (Y'_5) мы будем трактовать с помощью особого метода, а уравнения (Y'_6), (Y'_7), $\ldots$, $(Y^1_{r_1})$ — «дисперсионным методом». Сперва мы рассмотрим уравнение (Y'_k), где

$$7 \leqslant k \leqslant r_1. \tag{2.1}$$

Уравнение (Y'_k) имеет вид

$$n = x'_1 x'_2 \ldots x'_k + \xi^2 + \eta^2, \quad x'_i \in \Omega_P, \tag{2. 2}$$

или

$$n = X' + \xi^2 + \eta^2, \tag{2. 3}$$

где число $X' = x'_1 \ldots x'_k$ должно считаться $\tau'_k(X')$ раз.

Нетрудно подсчитать с помощью оценки (1. 5), что в уравнениях (2. 2) или (2. 3) числа X' можно считать свободными от квадратов за счет возможной погрешности в числе решений, не превосходящей

$$Bn \exp(-\sqrt{\ln n}). \tag{2. 4}$$

Будем считать X' свободными от квадратов и выделим из каждого X' его минимальный простой множитель ν.

Ввиду условия (2. 1) очевидно следующее соотношение, весьма важное для дальнейшего:

$$P < \nu \leqslant n^{1/k} \leqslant n^{1/7}. \tag{2. 5}$$

Число X' представится в виде

$$X' = D'\nu, \quad D' \leqslant \frac{n}{\nu}. \tag{2. 6}$$

Здесь число D' надлежит считать $k\tau'_k(D')$ раз; все простые множители его больше ν; оно должно иметь не менее $k-1$ простых множителей; в остальном же оно произвольно. Уравнение (Y'_k) перепишется при данном k в виде

$$n = \xi^2 + \eta^2 + D'\nu. \tag{2. 7}$$

Отрезок (2. 5) изменения ν разобьем на зоны:

$$(\nu_0) : [\nu_0, \ \nu_0 + \nu_0 (\ln n)^{-K_1}] \tag{2. 8}$$

(где константа K_1 будет указана в дальнейшем). В силу (2. 6) для соответствующих D' получаются границы изменения, зависящие от ν; кроме того, зависимость D' от ν заключается в том, что все простые множители D' больше ν.

Рассмотрим, какая погрешность в числе решений уравнения (2. 7) получится от замены условия $D' \leqslant n/\nu$ условием $D' \leqslant n/\nu_0$ при $\nu \in (\nu_0)$. Вариация границ изменения D' при заданном $\nu \in (\nu_0)$ не превосходит

$$B \frac{n}{\nu_0} (\ln n)^{-K_1}, \tag{2. 9}$$

а соответствующее число решений уравнения (2. 7) при заданном $\nu \in (\nu_0)$ не превосходит числа решений уравнения

$$n = xy + D'\nu, \tag{2. 10}$$

где xy нужно считать 4 раза, а D' — $k\tau'_k(D')$ раз.

Здесь можно применить оценки для числа делителей в прогрессиях разности ν (полезные оценки такого вида имеются в работе [4]). Если K_1 достаточно велико сравнительно с K, то, учитывая (1. 5) и применяя эти оценки, выведем оценку вариации в числе решений уравнения (2. 7); собирая по всем $\nu \in (\nu_0)$, получим

$$B \text{ дл } (\nu_0) \cdot \frac{n}{\nu_0} (\ln n)^{-K_2}, \tag{2. 11}$$

где

$$K_2 = \frac{K_1}{2} \tag{2. 12}$$

и дл (ν_0) означает длину зоны (ν_0). Собирая по (ν_0), получим общую погрешность в числе решений уравнения (2. 7):

$$Bn (\ln n)^{-K_3}, \tag{2. 13}$$

где $K_3 = K_2 - 2$.

Заметим еще, что может быть случай «малой населенности» зоны (ν_0); условия (2. 5) и (2. 8) могут привести к тому, что получатся крайние зоны вида $[\nu_0, \nu_0 + \theta\nu_0]$, где $\theta < (\ln n)^{-4K_1}$. Число решений уравнений (2. 7), отвечающих таким зонам, как легко убедиться, можно отбросить с общей погрешностью (2. 13).

В уравнении (2. 7) при $\nu \in (\nu_0)$ простые множители D' больше ν. Рассмотрим такие решения, где минимальный простой множитель D' лежит в зоне (ν_0). В этом случае

$$D = pD'', \quad p \in (\nu_0).$$

Соответствующее число решений уравнения (2. 7) заменим числом решений уравнения

$$n = xy + p\nu D'', \tag{2. 14}$$

где xy считается 4 раза, а D'' — надлежащее число раз. При данном $p \in (\nu_0)$, $\nu \in (\nu_0)$ получаем с помощью, например, [4] оценку

$$B \frac{n}{p\nu} (\ln n)^{3k}. \tag{2. 15}$$

Суммируя (2. 15) по $p \in (\nu_0)$, $\nu \in (\nu_0)$, найдем оценку

$$B \frac{n}{\nu_0} \text{ дл } (\nu_0) \frac{\text{дл } (\nu_0)}{\nu_0} (\ln n)^{3K} = B \frac{n}{\nu_0} \text{ дл } (\nu_0) \cdot (\ln n)^{-K_2} \tag{2. 16}$$

при достаточно большом K_1. Собирая по (ν_0), придем, как и в (2. 13), к оценке

$$Bn (\ln n)^{-K_3}. \tag{2. 17}$$

Сегмент $D' \leqslant n/\nu_0$ изменения D' при данном ν_0 обозначим через (D_0), а его длину — через дл (D_0).

Итак, уравнение (2. 7) приводится к ряду уравнений

$$\xi^2 + \eta^2 + D'\nu = n, \tag{2. 18}$$

где $\nu \in (\nu_0)$, $D' \in (D_0)$, числа ν и D' независимы; D' считается $\tau'_k(D'\nu)$ раз и пробегает числа, которые имеют не менее $k-1$ простых множителей и все простые множители которых больше ν_0.

§ 3. Ввиду условия (2. 5) все уравнения (2. 18) разрешимы «дисперсионным методом» так, как изложено в работе [1], § 3—18. В этих параграфах работы [1] считалось, что $\exp(\ln n)^{\alpha_0} \leqslant \nu \leqslant n^{1/6-\varepsilon}$, а D' — простое число. У нас при $k \leqslant 7$ выполнено даже условие $P < \nu \leqslant n^{1/7}$. Числа D' у нас не простые, но $D' \in \Omega_P$, так что все простые множители D' больше P и каждое D' считается

$$\tau'_k(\nu D') = B(\ln n)^{2K} \tag{3. 1}$$

раз.

Внимательное ознакомление с § 3—18 работы [1] показывает, что все рассуждения указанных параграфов применимы и к уравнениям (2. 18) (причем весьма существенна оценка (3. 1)).

Числа ν и D' нечетные. Пусть сперва n четное. Тогда в (2.18) $\xi^2+\eta^2$ нечетно. В таких условиях число решений уравнения (2. 18) будет задаваться формулой (19. 8) работы [1], где $A(n, D)$ задано выражениями (13.4)—(13.7) той же работы, но вместо условия $D=D_1$, D_1 простое, надлежит взять $D=D'$, $D' \in (D_0)$; D' определяется как указано выше и считается $k\tau'_k(D')$ раз. Окончательно для (2. 18) при $\nu \in (\nu_0)$ и $D' \in (D_0)$ имеем число решений

$$\sum_{D' \in (D_0)} A(n, D') + B\,\text{дл}\,(D_0)\,\text{дл}\,(\nu_0)(\ln n)^{-K_4}, \tag{3. 2}$$

где K_4 можно считать превосходящим $K_1/2$.

Рассмотрим теперь выражение для $A(n, D)$, задаваемое формулами (13. 4)—(13. 7) работы [1]. Из (13. 4) видна особая роль общих делителей n и D'. Но $D' \in \Omega_P$, поэтому такие делители весьма велики, и соответствующие решения уравнений (2. 18) проще отбросить.

Пусть $p|n$, $p|D'$; тогда $p>P$. Из (2. 18) легко находим оценку для соответствующих чисел решений уравнений, например:

$$Bn\exp(-\sqrt{\ln n}). \tag{3. 3}$$

Далее, количество $p|n$, $p>P$ будет $O(\ln\ln n)$, так что всего отброшенные уравнения имеют число решений

$$Bn\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\ln n}\right). \tag{3. 4}$$

Таким образом, при суммировании по D' в (3. 2) можно присоединить условие $(D', n)=1$. В таком случае

$$A(n, D') = \pi A_0 L_1 \prod_{p|n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)}, \tag{3. 5}$$

где $L_1 = \sum_{\nu \in (\nu_0)} 1$ (число простых чисел в зоне (ν_0)) и константа $A_0 = \prod_p (1 + \chi_4(p)/p\,(p-1))$ (см. формулу (13. 5) в работе [1]). Теперь сумма в (3. 2) запишется так:

$$\sum_{D' \in (D_0)} A\,(n,\ D') = \pi A_0 L_1 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)\,(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} \sum_{D \in (D_0)} 1. \tag{3. 6}$$

Далее, выражение

$$L_1 \sum_{D' \in (D_0)} 1 \tag{3. 7}$$

равно количеству чисел $D'\nu$, $D' \in (D_0)$, $\nu \in (\nu_0)$ с погрешностью

$$\text{дл}\,(\nu_0)\ \text{дл}\,(D_0)\,(\ln n)^{-K_5}, \tag{3. 8}$$

где K_5 может быть сделано сколь угодно большим (при этом учитывается, что мы выбрасывали некоторые из чисел D').

Собирая (3. 2) по всем зонам (ν_0) и учитывая все сказанное выше, придем наконец к формуле

$$Q_k\,(n) = \pi A_0 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)\,(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} \sum_{D'\nu \leqslant n} 1 + Bn\,(\ln n)^{-K_6}, \tag{3. 9}$$

где K_6 сколь угодно велико. Далее, введем обозначение

$$L_k\,(n) = \sum_{\substack{x'_1 \ldots x'_k \leqslant n \\ x'_i \in \mathfrak{Q}_P}} 1.$$

Тогда $\sum_{D'\nu \leqslant n} 1 = L_k\,(n)$, и имеем окончательно

$$Q_k\,(n) = \pi A_0 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)\,(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} L_k\,(n) + Bn\,(\ln n)^{-K_6} \tag{3. 10}$$

для случая четного n.

Переходя к нечетному n, поступаем так же, как в § 19 работы [1]. Уравнение (2. 7) заменим рядом уравнений

$$n = (\xi^2 + \eta^2)\, 2^\lambda + D'\nu, \tag{3. 11}$$

где $\xi^2 + \eta^2$ нечетно. Здесь можно считать $2^\lambda \leqslant (\ln n)^{K_7}$ с возможной погрешностью в числе решений уравнения (2. 7)

$$B\ \text{дл}\,(\nu_0)\ \text{дл}\,(D_0)\,(\ln n)^{-K_8}, \tag{3. 12}$$

где K_8 сколь угодно велико вместе с K_7. Далее проводим те же рассуждения, что в работе [1], с заменой выражения $A\,(n,\,D)$, даваемого формулой (13. 4), на $A\,(n,\,D)/2^\lambda$ (см. [1], § 20). Затем результаты собираем по $2^\lambda \leqslant (\ln n)^{K_7}$ и по зонам (ν_0), после чего приходим к формуле (3. 10) и для нечетных n.

Обратим внимание на то, что хороший остаточный член в (3. 10) для всех $k \leqslant r_1$, не превосходящий $K_9 n (\ln n)^{-K_6}$, позволит нам в дальнейшем безболезненно произвести суммирование асимптотических выражений для $Q_k(n)$ в формуле (1. 4).

§ 4. Условие $k \geqslant 7$, влекущее за собой условие $\nu \leqslant n^{1/7} < n^{1/6-\varepsilon_0}$, было весьма существенным. При $k=6$ оно не выполняется, и уравнение (Y'_6) нам нужно трактовать отдельно.

Перейдем к уравнению (Y'_6):

$$x'_1 \ldots x'_6 + \xi^2 + \eta^2 = n, \quad x'_i \in \Omega_P. \tag{4. 1}$$

Полагая $X' = x'_1 \ldots x'_6$, выделим из числа X' наименьший простой множитель ν. Имеем, очевидно,

$$P \leqslant \nu \leqslant n^{1/6}. \tag{4. 2}$$

Пусть $\eta_0 > 0$ — малая константа. Числа $X' \leqslant n$ разобьем на два класса.

I класс $\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$: числа ν из (4. 2) удовлетворяют условию

$$P \leqslant \nu \leqslant n^{1/6} \exp(-(\ln n)^{1-\eta_0}). \tag{4. 3}$$

II класс $\mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$: числа ν удовлетворяют условию

$$n^{1/6} \exp(-(\ln n)^{1-\eta_0}) < \nu \leqslant n^{1/6}. \tag{4. 4}$$

Сначала займемся классом $\mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$. Из его определения явствует, что все простые делители $p \mid X'$ при $X' \in \mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$ удовлетворяют условию

$$p > n^{1/6} \exp(-(\ln n)^{1-\eta_0}). \tag{4. 5}$$

Выделим в уравнении (4. 1) числа $X' \in \mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$ и оценим для них число решений уравнения (4. 1). Имеем: $X' = \nu y$, где y в силу (4. 5) имеет не более пяти простых множителей (т. е. y почти простой; для $p \mid y$ имеем условие (4. 5)). Далее, число $X' = \nu y$ считается B раз (B, как и ранее, — абсолютно ограниченная функция). Будем оценивать при этих условиях число решений уравнения

$$\xi^2 + \eta^2 + \nu y = n, \quad \xi^2 + \eta^2 \leqslant n. \tag{4. 6}$$

Прежде всего имеем:

$$\xi^2 + \eta^2 \equiv n \pmod{\nu}. \tag{4. 7}$$

Для чисел $\nu \nmid n$, ввиду того что $\nu > n^{1/7}$, оценкой числа решений сравнения (4. 7) будет

$$Bn^{7/8}. \tag{4. 8}$$

При $\nu \nmid n$ сравнение (4. 7) имеет полное число решений по модулю ν, указанное, например, в работе [1], § 18 (где нужно взять $\rho = 0$, $s = 1$). Это число равно $\nu(1 - 1/\nu)$ при $\nu \equiv 1 \pmod 4$ и $1 + 1/\nu$ при $\nu \equiv -1 \pmod 4$. Для каждого ν выписываем все решения (ξ_1, η_1) соответствующего сравнения. Имеем: $\xi \equiv \xi_1$, $\eta \equiv \eta_1 \pmod{\nu}$. В уравнении (4.6) можно считать с самого начала $\xi > n^{1/2-\varepsilon_1}$, $\eta > n^{1/2-\varepsilon_1}$ с погрешностью в общем числе решений уравнений (4.6) при всех допустимых ν

$$Bn^{1-\varepsilon_1/2}. \tag{4.9}$$

Здесь $\varepsilon_1 > 0$ — малая константа.

Теперь рассматриваем $\xi \equiv \xi_1$, $\eta \equiv \eta_1 \pmod \nu$ и при данном ν уравнение

$$\xi^2 + \eta^2 + \nu x = n, \quad \xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1 \pmod \nu). \tag{4.10}$$

Это дает

$$\xi = \xi_1 + \nu\xi', \quad \eta = \eta_1 + \nu\eta', \quad \xi' \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\nu}, \quad \eta' \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\nu}.$$

Здесь $\sqrt{n}/\nu > n^{1/3}$, ибо $\nu \leqslant n^{1/6}$. Среди пар (ξ', η'), действуя стандартными методами решета Эратосфена, вычеркиваем пары так, чтобы остались только числа x, имеющие все простые множители, большие n^{η_1}. Производя эту операцию решета, находим для числа решений уравнения (4.10) оценку

$$B\left(\frac{\sqrt{n}}{\nu}\right)^2 \frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n} = B\,\frac{n}{\nu^2}\,\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}. \tag{4.11}$$

Собирая по (ξ_1, η_1) и учитывая указанное выше число решений сравнения (4.7), найдем оценку

$$B\,\frac{n}{\nu}\,\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}. \tag{4.12}$$

Для оценки числа решений уравнения (4.6) надо просуммировать (4.11) по ν. Заметим, что ν — простые числа с условием (4.4). Пользуясь хорошо известной асимптотической формулой для $\sum\limits_{\nu \leqslant x} (1/\nu)$ при простых ν, получаем после суммирования (4.12) оценку

$$Bn\,(\ln n)^{-\eta_0}\,\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n} = B\,\frac{n}{(\ln n)^{1+\eta_0/2}}. \tag{4.13}$$

Такая же оценка (4.13) будет иметь место и для числа решений уравнения (4.1) при $X' \in \mathfrak{A}_{II}$.

§ 5. Перейдем к рассмотрению уравнения (4.1) при условии $X' \in \mathfrak{A}_1$. Если бы вместо (4.3) было условие $P \leqslant \nu \leqslant n^{1/6-\varepsilon_0}$, то мы могли бы непосредственно применить для решения (4.1) дисперсионный метод § 3—18 работы [1]. Внимательно рассматривая рассуждения § 3—18 работы [1], мы убедимся, что условие $\nu \leqslant n^{1/6-\varepsilon_0}$ вызывается только тем, что оценка суммы Клостермана (формула (7.8) работы [1]) имеет вид

$$\sum_{\substack{x=1\\(x,q)=1}}^{q-1} \exp \frac{2\pi i}{q}(ax + bx') = B(\varepsilon)\, q^{1/2+\varepsilon} \min\left[(a, q)^{1/2}, (b, q)^{1/2}\right].$$

Между тем можно установить несколько более тонкую оценку (см. [5]):

$$\sum_{\substack{x=1 \\ (x,q)=1}}^{q-1} \exp \frac{2\pi i}{q} (ax + bx') = B\tau(q)\, q^{1/2} \min [(a, q)^{1/2}, (b, q)^{1/2}]. \qquad (5.1)$$

Применение такой более тонкой оценки для суммы Клостермана (5.1) дает возможность путем тривиальных видоизменений рассуждений § 7—10 работы [1] заменить условие $\exp(\ln n)^{\alpha_0} \leqslant \leqslant \nu \leqslant n^{1/6-\varepsilon_0}$ на $\exp(\ln n)^{\alpha_0} \leqslant \nu \leqslant n^{1/6} \exp(-(\ln n)^{1-\eta_0})$, сохраняя те же результаты. Ввиду этого для числа решений уравнения (4.1) получаем:

$$Q_6(n) = \pi A_0 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} L_6'(n) + B \frac{n}{(\ln n)^{1+\eta_0/2}}, \qquad (5.2)$$

где $L_6'(n)$ — число $x_1' \ldots x_6' \leqslant n$, $x_i' \in \Omega_P$ при дополнительном условии $\nu \leqslant n^{1/6} \exp(-(\ln n)^{1-\eta_0})$.

Мы всегда имеем $\nu \leqslant n^{1/6}$. Ввиду этого $L_6'(n)$ отличается от $L_6(n)$ не более чем на число $x_1' \ldots x_6' \leqslant n$, таких, что

$$n^{1/6} \exp(-(\ln n)^{1-\eta_0}) \leqslant \nu \leqslant n^{1/6}. \qquad (5.3)$$

Количество таких X' легко оценивается, как

$$B \frac{n}{(\ln n)^{1+(2/3)\eta_0}}. \qquad (5.4)$$

Поэтому из (5.2) находим:

$$Q_6(n) = \pi A_0 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} L_6(n) + B \frac{n}{(\ln n)^{1+\eta_0/2}}. \qquad (5.5)$$

§ 6. Переходим к уравнению (Y_5'):

$$x_1' \ldots x_5' + \xi^2 + \eta^2 = n, \quad x_i' \in \Omega_P. \qquad (6.1)$$

В формулу (1.4) входит количество $(1/5)\, Q_5(n)$. В данной работе нам придется ограничиться лишь некоторой достаточно хорошей оценкой нужного нам количества $(1/5)\, Q_5(n)$ снизу.

Числа $X' = x_1' \ldots x_5'$ разобьем на два класса соответственно поведению наименьшего простого делителя ν числа X'. Имеем:

$$P < \nu \leqslant n^{1/5}. \qquad (6.2)$$

I класс $\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$ будет состоять из чисел X' с условием

$$P < \nu < n^{1/6-\varepsilon_0}, \qquad (6.3)$$

где ε_0 — малая константа, значение которой будет уточнено далее.

II класс $\mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$ составляют числа X', для которых

$$n^{1/6-\varepsilon_0} \leqslant \nu \leqslant n^{1/5}. \qquad (6.4)$$

Пусть $X' \in \mathfrak{A}_{II}$. Имеем $X' = \nu p'$, где p' — почти простое число. Его простые делители больше $n^{1/6-\varepsilon_0}$, и оно не превосходит $n/\nu \leqslant n^{5/6+\varepsilon_0}$. Ввиду этого p' не может иметь более пяти простых множителей, а число X' имеет не более шести простых множителей.

Оценим сперва количество чисел $X' \in \mathfrak{A}_{II}$, имеющих шесть простых множителей. Все такие множители больше $n^{1/6-\varepsilon_0}$, а наименьший из них ν удовлетворяет условию

$$n^{1/6-\varepsilon_0} \leqslant \nu \leqslant n^{1/6}. \tag{6.5}$$

Отсюда количество $X' \in \mathfrak{A}_{II}$ легко оценивается в виде

$$B \frac{n}{\ln n} \sum_{(\nu)} \frac{1}{\nu},$$

где суммирование идет по простым числам ν с условием (6.5). Теперь непосредственно находим оценку

$$B \frac{n}{\ln n} \varepsilon_1(\varepsilon_0), \tag{6.6}$$

где $\varepsilon_1(\varepsilon_0) \to 0$ вместе с ε_0.

Оценим количество $X' \in \mathfrak{A}_{II}$, имеющих ровно пять простых множителей (по конструкции X', таких множителей не меньше пяти). Одну пятую этого количества обозначим через

$$\frac{1}{5} L_5'(n). \tag{6.7}$$

Имеем:

$$\frac{1}{5} L_5'(n) = \frac{1}{5} \sum_{\substack{p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \leqslant n \\ p_i > n^{1/6-\varepsilon_0}}} 1. \tag{6.8}$$

Численный расчет, произведенный в Ленинградском отделении Математического института АН СССР им. В. А. Стеклова под руководством К. Е. Чернина, привел к оценке: при достаточно малом ε_0 и $n > n_0$

$$\frac{1}{5} L_5'(n) < 0.02099 \frac{n}{\ln n}. \tag{6.9}$$

Приведем еще грубый, но короткий расчет, показывающий, что

$$\frac{1}{5} L_5'(n) < 0.3 \frac{n}{\ln n}.$$

Ввиду условия $p_i > n^{1/6-\varepsilon_0}$ легко устанавливаем, что имеет место неравенство $p_i < n^{1/3+8\varepsilon_0}$. Далее, из (6.8) выводим:

$$\frac{1}{5} L_5'(n) = \frac{1}{5} \sum_{(p_5)} \pi\left(\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}\right), \quad \frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4} \geqslant n^{1/6-\varepsilon_0},$$

$$\pi\left(\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}\right) \sim \frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4} \left(\ln \frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}\right)^{-1}.$$

Отсюда при $n > n_0$

$$\frac{1}{5} L_5'(n) < \frac{n}{5} \frac{6}{1-6\varepsilon_0} \frac{1}{\ln n} \sum_{(p_i)} \frac{1}{p_1 p_2 p_3 p_4} <$$

$$< \frac{6}{5} \frac{1}{1-6\varepsilon_0} \frac{n}{\ln n} \Bigg(\sum_{n^{1/6-\varepsilon_0} \leqslant p \leqslant n^{1/3+8\varepsilon_0}} \frac{1}{p} \Bigg)^4 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{6}{5} + \varepsilon_1\right) \frac{n}{\ln n} (\ln 2 + \varepsilon_2)^4 < \frac{6}{5} \frac{n}{\ln n} (0.7)^4 < 0.3 \frac{n}{\ln n}.$$

§ 7. Теперь обратимся к $X' \in \mathfrak{A}_\mathrm{I}$. Количество чисел $X' \leqslant n$, $X' \in \mathfrak{A}_\mathrm{I}$, считая повторения, обозначим через $L_5^{(\mathrm{I})}(n)\, T$. Ввиду условия (6. 3) мы можем применять для решения уравнения (6. 1) при дополнительном условии $X' \in \mathfrak{A}_\mathrm{I}$ «дисперсионный метод» (см. [1], § 3—18). Число решений уравнения (6. 1) при таких условиях обозначим через $Q_5^{(\mathrm{I})}(n)$. Имеем:

$$Q_5^{(\mathrm{I})}(n) = \pi A_0 L_5^{(\mathrm{I})}(n) \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{q^2 - p + \chi_4(p)} + Bn (\ln n)^{-K_8}. \tag{7. 1}$$

Далее, обозначая, как обычно, $L_5(n) = \sum\limits_{x_1' \ldots x_5' \leqslant n}$ и учитывая (6. 6) и (6. 7), найдем: при $n > n_0$

$$L_5^{(\mathrm{I})}(n) > L_5(n) - 0.020995 \frac{n}{\ln n}. \tag{7. 2}$$

Отсюда и из (7. 1) выводим:

$$\frac{1}{5} Q_5(n) > \frac{1}{5} Q_5^{(\mathrm{I})}(n) > \frac{1}{5} \pi A_0 L_5(n) \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} -$$

$$- 0.020999 \frac{n}{\ln n} \pi A_0 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)}. \tag{7. 3}$$

Этой оценкой для числа решений уравнения (Y_5') нам придется ограничиться в настоящей работе.

§ 8. Перейдем к уравнениям (Y_4'), (Y_3'), (Y_2'), (Y_1'). Здесь мы будем доказывать асимптотические формулы

$$Q_k(n) = \pi L_k(n) A_0 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} + R_k(n), \tag{8. 1}$$

где

$$R_k(n) = B \frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_0}} \tag{8. 2}$$

($\tau_0 > 0$ — константа; $A_0 = \prod\limits_p (1 + \chi_4(p)/p(p-1))$).

Пусть $k=1, 2, 3, 4$. Уравнение (Y'_k)

$$x'_1 x'_2 x'_3 \ldots x'_k + \xi^2 + \eta^2 = n, \quad x'_i \in \Omega_P, \tag{8.3}$$

можно свести путем элементарного решета к уравнениям вида

$$d x_1 \ldots x_k + \xi^2 + \eta^2 = n,$$

где x_i пробегает все числа подряд.

Пусть Λ_P обозначает множество нечетных чисел, все простые делители которых меньше P. Обозначим через $W(n, q_1 \ldots q_k)$ число решений уравнения

$$q_1 \ldots q_k x_1 \ldots x_k + \xi^2 + \eta^2 = n, \quad q_1 \ldots q_k \in \Lambda_P, \tag{8.4}$$

где x_i пробегает все нечетные числа подряд. Имеем, очевидно:

$$Q_k(n) = \sum_{\substack{q_1 \ldots q_k \leqslant n \\ q_1 \ldots q_k \in \Lambda_P}} \mu(q_1) \ldots \mu(q_k) W(n, q_1 \ldots q_k). \tag{8.5}$$

Положим $q_1 \ldots q_k = d$. Для данного $k \leqslant 4$ разобьем уравнения (8. 4) на два класса.

I класс $\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$: $d \leqslant n^\tau$, где $\tau = 0.001$.

II класс $\mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$: $n^\tau < d \leqslant n$.

Покажем, что совокупностью уравнений (8. 4) класса $\mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$ можно пренебречь. Мы докажем следующую лемму.

Лемма 1.

$$\sum_{n^\tau < q_1 \ldots q_k \leqslant n} W(n, q_1 \ldots q_n) = Bn (\ln n)^{-K_{10}}, \tag{8.6}$$

где $K_{10} = K_{10}(K) \to \infty$ *при* $K \to \infty$.

Замечая, что $\sum_{\xi^2+\eta^2=m} 1 \leqslant 4\tau(m)$, находим $(d = q_1 \ldots q_k \in \Lambda_P)$:

$$\sum_{n^\tau < q_1 \ldots q_k \leqslant n} W(n, q_1 \ldots q_k) \leqslant 4 \sum_{\substack{n^\tau < d \leqslant n \\ d \in \Lambda_P \\ x \leqslant n/d}} \tau(n - dx)\, \tau_4(x). \tag{8.7}$$

Обозначим через (d) совокупность чисел d при указанных выше условиях. Тогда (8. 7) не может превосходить

$$4 \Big(\sum_{\substack{d \in (d) \\ dx \leqslant n}} (\tau(n - dx),^2) \Big)^{1/2} \Big(\sum_{\substack{dx \leqslant n \\ d \in (d)}} (\tau_4(x))^2 \Big)^{1/2}. \tag{8.8}$$

Пользуясь известными сумматорными оценками для числа делителей (см., например, работу [6]), найдем для второй суммы (8. 8) оценку:

$$\sum_{\substack{dx \leqslant n \\ d \in (d)}} (\tau_4(x))^2 = B (\ln n)^{a_1} \sum_{d \in (d)} \frac{n}{d} =$$

$$= B (\ln n)^{a_1} \cdot n \sum_{m \leqslant n} \frac{\tau_4(m)}{m} = Bn (\ln n)^{a_2}. \tag{8.9}$$

Перейдем к оценке суммы

$$S = \sum_{\substack{dx \leqslant n \\ d = q_1 \dots q_k \in (d)}} (\tau(n - dx))^2. \qquad (8.10)$$

Положим $S = S_1 + S_2$, где

$$S_1 = \sum_{\substack{n^{\tau} \leqslant d \leqslant n^{0.98} \\ d \in (d)}} (\tau(n - dx))^2,$$

$$S_2 = \sum_{\substack{n^{0.98} < d \leqslant n \\ d \in (d)}} (\tau(n - dx))^2. \qquad (8.11)$$

Рассмотрим сперва S_2. У каждого числа $d \in \Lambda_P$ при указанных условиях выделим произведение наименьших простых множителей, так что оно представится в виде

$$d = d_1 d_2, \text{ где } \frac{\sqrt{n}}{P} \leqslant d_1 < \sqrt{n}.$$

При этом будем брать наибольшее из возможных d_1 для d. Имеем:

$$S_2 \leqslant \sum_{\substack{d_1,\, d_2,\, x \\ d_1,\, d_2 \in (d)}} (\tau(n - d_1 d_2 x))^2 = \sum_{\substack{d_1 d_2,\, x \\ d_1 d_2 \in (d)}} (\tau(n - d_1 d_2 x))^2 \tau_4(d_1 d_2). \qquad (8.12)$$

В последней сумме $d_1 d_2$ берется без повторений; они учитываются членом $\tau_4(d_1 d_2)$. Далее, $\tau_4(d_1 d_2) = B\tau_4(d_1)\tau_4(d_2)$. Ввиду этого (8.12) не превосходит

$$\sum_{\substack{d_1 m \leqslant n \\ d_1 \in (d)}} \tau(n - d_1 m)\, \tau_4(d_1)\, \tau_4(m). \qquad (8.13)$$

Здесь $\sqrt{n}\, P^{-1} \leqslant d_1 \leqslant \sqrt{n}$; d_1 считается без повторения; $d_1 \in \Lambda_P$. Сумму (8.13) оцениваем через

$$\Bigg(\sum_{\substack{d_1 m \leqslant n \\ d_1 \in (d)}} \tau^2(n - d_1 m)\, \tau^2(d_1)\Bigg)^{1/2} \Bigg(\sum_{d_1 m \leqslant n} (\tau_4(m))^2\Bigg)^{1/2}. \qquad (8.14)$$

Имеем далее:

$$\sum_{d_1 m \leqslant n} (\tau_4(m))^2 = Bn (\ln n)^{a_3} \sum_{d_1} \frac{1}{d_1}. \qquad (8.15)$$

Здесь $\sqrt{n}\, P^{-1} \leqslant d_1 \leqslant \sqrt{n}$, $d_1 \in \Lambda_P$.
Далее, из работы [4] выводим оценку

$$\sum_{d_1 m \leqslant n} \tau^2(n - d_1 m)\, \tau^2(d_1) = Bn (\ln n)^{a_3} \sum_{d_1} \frac{\tau^2(d_1)}{d_1} = Bn (\ln n)^{a_4}. \qquad (8.16)$$

Обратимся к сумме $\sum\limits_{(d_1)}(1/d_1)$. Докажем оценку

$$\sum_{\substack{n^\rho\leqslant d_1\leqslant 2n^\rho\\ d_1\in\Lambda_P}}\frac{1}{d_1}=B(\ln n)^{-K_{11}};\tag{8.17}$$

здесь $K_{11}=K_{11}(K)\to\infty$ при $K\to\infty$ и $\rho\leqslant 1$, $\rho\geqslant\tau$ — какая-либо константа. Воспользуемся следующей теоремой А. И. Виноградова [7].

Теорема. *Количество чисел $\leqslant x$, все простые делители которых $\leqslant z\leqslant\sqrt{x}$, имеет оценку*

$$Bx\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\ln\frac{1}{\alpha}+\ln\ln\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha}+\frac{\theta}{\alpha\ln(1/\alpha)}\right),\tag{8.18}$$

где $\alpha=\ln z/\ln x$, $|\theta|\leqslant 1$.

В нашем случае

$$z=P=\exp\frac{\ln n\ln\ln\ln n}{K\ln\ln n},\quad x=2n^\rho,$$

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\ln x}{\ln z}\geqslant\frac{\ln n\cdot K\ln\ln n}{\ln n\ln\ln\ln n}=\frac{K\ln\ln n}{\ln\ln\ln n},$$

$$\ln\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{2}\ln\ln\ln n\quad\text{при}\quad n>n_0=n_0(K).$$

Применяя (8.18), находим теперь оценку (8.17), где можно взять $K_{11}=K/5$. Из (8.17) непосредственно получаем:

$$\sum_{n^\tau\leqslant d_1\leqslant n}\frac{1}{d_1}=B(\ln n)^{-K_{12}},\quad K_{12}=\frac{K_{11}}{2}.\tag{8.19}$$

После этого (8.15) оценивается, как

$$Bn(\ln n)^{-K_{13}},\tag{8.20}$$

и, если учесть (8.12)—(8.16), находим наконец:

$$S_2=Bn(\ln n)^{-K_{14}}.\tag{8.21}$$

Сумма S_1 оценивается таким же образом, но еще проще: здесь $n^\tau\leqslant d\leqslant n^{0.98}$ и роль d_1 играет само число d. Имеем окончательно:

$$S_1=Bn(\ln n)^{-K_{14}}.\tag{8.22}$$

Учитывая (8.9) и (8.8), получаем из (8.7) нужную нам оценку (8.6).

§ 9. Итак, в формуле (8.5) для $Q_k(n)$ достаточно изучать лишь

$$q_1\ldots q_k\leqslant n^\tau=n^{0.001}.$$

Мы будем теперь считать $k=4$, т. е. изучать (Y'_4) и $Q_4(n)$, и будем интересоваться суммой

$$Q_4^{(1)}(n) = \sum_{\substack{q_1q_2q_3q_4 \leqslant n^\tau \\ q_i \in \Lambda_P}} \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4) W(n, q_1q_2q_3q_4). \tag{9.1}$$

Пусть

$$\alpha_0 = 10^{-100}, \quad d_0 = \exp(\ln n)^{\alpha_0}.$$

Выделим из (9.1) такие числа, для которых

$$d_0 = \exp(\ln n)^{\alpha_0} < q_1q_2q_3q_4 \leqslant n^\tau. \tag{9.2}$$

Соответствующую им часть суммы (9.1) обозначим через $Q_4^{(2)}(n)$, а часть суммы (9.1), для которой $q_1q_2q_3q_4 \leqslant d_0$, обозначим через $Q_4^{(0)}(n)$. Имеем:

$$Q_4^{(1)}(n) = \sum_{q_1q_2q_3q_4 \leqslant d_0} + \sum_{d_0 < q_1q_2q_3q_4 \leqslant n^\tau} = Q_4^{(0)}(n) + Q_4^{(2)}(n). \tag{9.3}$$

Наиболее трудным является изучение $Q_4^{(0)}(n)$; его мы отложим напоследок; теперь же будем изучать $Q_4^{(2)}(n)$ с помощью «дисперсионного метода». Сумму $Q_4^{(2)}(n)$ разобьем на две суммы: $Q_4^{(2,+)}(n)$, где $\mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4)=+1$, и $Q_4^{(2,-)}(n)$, где $\mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4)=-1$. Мы будем находить асимптотику $Q_4^{(2,+)}(n)$ и $Q_4^{(2,-)}(n)$ порознь. Начнем с количества $Q_4^{(2,+)}(n)$; второе количество будет исследоваться совершенно аналогично.

$Q_4^{(2,+)}(n)$ есть число решений уравнения

$$q_1q_2q_3q_4x_1x_2x_3x_4 + \xi^2 + \eta^2 = n, \tag{9.4}$$

где $d_0 \leqslant q_1q_2q_3q_4 \leqslant n^\tau$, $\mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4)=+1$, $q_i \in \Lambda_P$.

Основной сегмент $[d_0, n^\tau]$ подразделим на части вида I_0: $[n_0/2, n_0]$ (крайние левые части объединяем). Мы знаем, что $q_1q_2q_3q_4 \in \Lambda_P$, и поэтому при n_0 большом (например, близком к n^τ) количество чисел $q_1q_2q_3q_4 \in I_0$ будет малым. Выделим такие сегменты I_0, где количество этих чисел будет больше $n_0/(\ln n)^{K_{15}}$. В остальных «аномальных» сегментах I'_0 количество наших чисел $q_1q_2q_3q_4$ будет $B(n/\ln n)^{K_{15}})$. Оценим число решений уравнения (9.4) при $q_1q_2q_3q_4 \in I'_0$. Для данного I'_0 оно будет иметь оценку

$$B \sum_{\substack{q_1\ldots q_4x \leqslant n \\ q_1\ldots q_4 \in I'_0}} \tau(n - q_1q_2q_3q_4x)\tau_4(x) =$$

$$= B \sum_{q_1\ldots q_4 \in I'_0} \left(\sum_x \tau^2(n - q_1q_2q_3q_4x)\right)^{1/2} \left(\sum_x \tau_4^2(x)\right)^{1/2} =$$

$$= B \sum_{q_1\ldots q_4 \in I'_0} \left(\frac{n(\ln n)^{\alpha_4}}{q_1\cdots q_4}\right)^{1/2} \left(\frac{n(\ln n)^{\alpha_4}}{q_1q_2q_3q_4}\right)^{1/2} =$$

$$= Bn(\ln n)^{\alpha_4} \sum_{q_1\ldots q_4 \in I'_0} \frac{1}{q_1\cdots q_4} = Bn(\ln n)^{-K_{15}+\alpha_4} = Bn(\ln n)^{-K_{16}}, \tag{9.5}$$

где $K_{16} > K_{15}/2$, если K_{15} было выбрано бо́льшим, чем $2a_4$. Собирая (9. 5) по всем плохим сегментам I'_0, найдем погрешность в соответствующем числе решений:

$$Bn\,(\ln n)^{-K_{17}}. \tag{9. 6}$$

§ **10.** Обратимся к сегментам I_0, не являющимся аномальными. Среди чисел $q_1q_2q_3q_4 \in I_0$ выделим такие, которые делятся на простые числа p с условием

$$p \geqslant \exp\left((\ln n)^{\alpha_0/10}\right), \tag{10. 1}$$

и те, которые не имеют ни одного такого множителя. Количество этих последних в сегменте I_0, легко оцениваемое на основании леммы А. И. Виноградова (8. 18), можно оценить, например, как

$$Bn_0 \exp\left(-(\ln\ln n)^2\right). \tag{10. 2}$$

Как и ранее, убеждаемся, что количеством решений, отвечающих таким числам $q_1q_2q_3q_4$, можно пренебречь с погрешностью (9. 6). С такой же погрешностью будем рассматривать среди чисел $q_1q_2q_3q_4$ только такие, которые не делятся на квадраты простых чисел с условием (10. 1).

Оставшиеся числа $q_1q_2q_3q_4 \in I_0$ разбиваем на классы $\mathfrak{U}_k$ по количеству в них простых множителей вида (10. 1); очевидно, $k \leqslant \ln n$. Всякое число $q_1 \ldots q_4 \in \mathfrak{U}_k$ может быть записано в виде

$$q_1q_2q_3q_4 = pq, \tag{10.3}$$

где p удовлетворяет условию (10. 1) и притом ровно $4k\tau_4(pq)$ способами; иначе говоря, в записи $q_1q_2q_3q_4 = pq$ число q надо считать $4k\tau_4(q)$ раз. Таким образом, число решений уравнения

$$q_1q_2q_3q_4x_1x_2x_3x_4 + \xi^2 + \eta^2 = n \tag{10. 4}$$

при условиях $q_1q_2q_3q_4 \in I_0$, $q_1q_2q_3q_4 \in \mathfrak{U}_k$ равно

$$\frac{4}{k}\,\text{Ч}\,(pqx_1x_2x_3x_4 + \xi^2 + \eta^2 = n), \tag{10. 5}$$

где Ч означает здесь (и в дальнейшем) число решений уравнения, стоящего в скобках; q считается $f(q) \leqslant \tau_4(q)$ раз; $pq \in I_0$; $pq \in \Lambda_P$; p удовлетворяет условию (10. 1), и при разбиении $pq = q_1q_2q_3q_4$ должно быть $\mu(q_1)\,\mu(q_2)\,\mu(q_3)\,\mu(q_4) = 1$.

Имея в виду применение «дисперсионного метода» к уравнению (10. 4), переименовываем p в число ν; роль числа D' играет $D' = qx_1x_2x_3x_4$. Сегмент изменения ν

$$\exp\left((\ln n)^{\alpha_0/10}\right) \leqslant \nu \leqslant n_0 \leqslant n^{\tau} \tag{10. 6}$$

разбиваем на зоны (ν_0): $[\nu_0, \nu_0 + \nu_0/(\ln n)^{K_{18}}]$; сегмент изменения D' разбиваем на зоны (D_0): $[D_1, D_1 + D_1(\ln n)^{-K_{18}}]$. Как и ранее, убеждаемся, что можно пренебречь вариациями границ и ввести независимые зоны изменения ν и D'.

После установления независимых границ изменения ν и D' можем считать их вообще независимо изменяющимися. Число $D'=qx_1x_2x_3x_4$; x_i пробегают целые числа подряд, а q пробегает лишь числа $q \in \Lambda_P$, имеющие ровно $k-1$ простых множителей с условием (10. 1) и, кроме того, такие, что при разбиении $\nu q=q_1q_2q_3q_4$ $\mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4)=1$. При изменении $\nu \in (\nu_0)$ могут варьироваться лишь границы изменения чисел q, но не какие-либо иные их свойства. Число ν пробегает все простые числа зоны (ν_0).

К уравнению

$$n=\xi^2+\eta^2+D'\nu, \quad D' \in (D_0), \quad \nu \in (\nu_0), \tag{10. 7}$$

будем применять «дисперсионный метод» (см. [1], § 3—18).

Для данного D' находим выражение $A(n, D')$ (см. [1], § 13, формулы (13. 4)—(13. 7)):

$$A(n, D')=\pi L_1 A_0 \prod_{\substack{p \mid D' \\ p \nmid n}} (1+\xi_p) \prod_{p_i \mid n} (1+\xi_{p_i})(1+\eta(p_i, \Delta_i)), \tag{10. 8}$$

где L_1 — количество простых чисел в зоне (ν_0), а символы ξ_{p_i}, $\eta(p_i, \Delta_i)$ пояснены формулами (13. 6) и (13. 7) работы [1]. Число решений уравнения (10. 7) дается формулой (18. 8) работы [1]: для четного n это число решений равно

$$\sum_{D' \in (D_0)} A(n, D')+B \text{ дл } (D_0) \cdot L_1 (\ln n)^{-K_{19}}, \tag{10. 9}$$

где K_{19} может быть сделано сколь угодно большим.[2]

§ 11. В равенстве (10. 8) развернем написанное выражение соответственно всем простым числам, полагая $A_0=\prod_p (1+\chi_4(p)/p(p-1))$, $\pi=4(\pi/4)=4\prod_p (1-\chi_4(p)/p)^{-1}$. Имеем:

$$A(n, D')=4L_1 \sum_{r=1}^{\infty} \gamma(r, n, D'), \tag{11. 1}$$

где $\gamma(r, n, D')$ получается от перемножения всех количеств, вносимых в формуле (10. 8) степенями простых чисел, делящими r.

Пусть

$$r_0=\exp((\ln\ln n)^4). \tag{11. 2}$$

Рассмотрим выражение

$$\sum_{D' \in (D_0)} \sum_{r>r_0} \gamma(r, n, D'). \tag{11. 3}$$

Повторяя рассуждения, применявшиеся в § 12—14 работы [1] при проведении аналогичных суммирований, видим, что (11. 3) имеет оценку

$$B \text{ дл } (D_0) (\ln n)^{-K_{20}}, \tag{11. 4}$$

---

[2] По поводу нечетных n см. § 13.

ввиду чего число решений (10. 9) может быть записано в виде:

$$\sum_{D' \in (D_0)} L_1 \cdot 4 \sum_{r=1}^{r_0} \gamma(r,\ n,\ D') + B\,\text{дл}\,(D_0)\,\text{дл}\,(\nu_0)\,(\ln n)^{-K_{20}}. \tag{11. 5}$$

Обратим теперь внимание на сказанное в начале § 13 работы [1]. Там поясняется, что при $r \leqslant (\ln n)^{K_{21}}$ выражение $L_1\gamma(r,\ n,\ D')$, получившееся от развертывания входящих в $A(n,\ D')$ произведений по простым числам, есть произведение $\chi_4(r)$ на главный член решения сравнения $n-D'\nu\equiv 0 \pmod r$ при заданном D' и простом числе $\nu \in (\nu_0)$. Заметим, что здесь $\nu_0 > \exp((\ln n)^{\alpha_0/10})$, $\ln \nu_0 > (\ln n)^{\alpha_0/10}$. При всяком значении K_{21} и $r \leqslant (\ln n)^{K_{21}}$ число решений сравнения $n-D\nu\equiv 0 \pmod r$ будет иметь главный член описанного вида и остаточный член вида

$$B\frac{\nu_0}{r}(\ln n)^{-K_{22}}, \tag{11. 6}$$

как следует из известных теорем о распределении простых чисел в отрезках арифметических прогрессий (см., например, книгу Н. Г. Чудакова [8]). Ввиду этого имеем:

$$L_1\gamma(r,\ n,\ D') = \chi_4(r)\ \text{Ч}\,(\nu D' \equiv n \pmod r;\quad \nu \in (\nu_0)) + B\frac{\nu_0}{r}(\ln n)^{-K_{22}}, \tag{11. 7}$$

если $r \leqslant (\ln n)^{K_{21}}$.

§ 12. Для возможности дальнейших вычислений мы хотим получить формулы, подобные (11. 7), при

$$(\ln n)^{K_{21}} < r \leqslant r_0 = \exp((\ln \ln n)^4). \tag{12. 1}$$

В условиях (12. 1) главный член по-прежнему имеет вид $L_1\gamma(r,\ n,\ D')$; остаточный же член будет иметь вид $B(\nu_0/r)(\ln n)^{-K_{22}}$ лишь при отсутствии среди примитивных действительных характеров $X_\rho(m)$ для $\rho \mid r$ «исключительных» характеров, у которых соответствующие ряды Дирихле $L(s,\ X_\rho)$ имеют «исключительные» («зигелевские») действительные нули σ_ρ, для которых выполняется условие

$$\sigma_\rho > 1 - \frac{\eta_1}{\ln \rho} \tag{12. 2}$$

(см. [8]). Итак, при r с условием (12. 1) будем иметь формулу (11. 7), лишь если r не делится на «исключительные» модули ρ. Если же r делится на один из указанных исключительных модулей, то (11. 7) приходится заменить тривиальной формулой:

$$BL_1\gamma(r,\ n,\ D') = \text{Ч}\,(\nu D' \equiv n \pmod r;\quad \nu \in (\nu_0)). \tag{12. 3}$$

Из работы [9] известно, что исключительные модули ρ распределены реже геометрической прогрессии $\omega_0,\ \omega_0^2,\ \omega_0^3,\ \ldots (\omega_0 > 1)$.[3)]

[3)] В работе [9] трактуются лишь мнимые квадратичные поля, но ее методы легко переносятся и на действительные квадратичные поля.

Рассмотрим исключительные модули сегмента $[(\ln n)^{K_{21}}, r_0]$. Пусть это будут $r_1, r_2, \ldots, r_t$; очевидно, $t = B(\ln\ln n)^4$. Для нас опасны числа r того же интервала, делящиеся на какой-либо из r_i. Это будут числа вида $r = r_i r'$. Суммируя оценку (12. 3) по таким r, легко находим общую оценку:

$$B\frac{\text{дл}(\nu_0)}{r_i}(\ln n)^{a_5}. \tag{12.4}$$

Ввиду того что $r_i \geqslant (\ln n)^{K_{21}}$ и r_i распределены реже геометрической прогрессии, суммирование (12. 4) по r_i дает

$$B\,\text{дл}(\nu_0)(\ln n)^{-K_{23}}, \tag{12.5}$$

и суммирование по $D' \in (D_0)$ (считая повторения) —

$$B\,\text{дл}(\nu_0)\,\text{дл}(D_0)(\ln n)^{-K_{24}}. \tag{12.6}$$

Ввиду сказанного выше можем написать число решений уравнения (10. 7):

$$4\sum_{r \leqslant r_0} \chi_4(r)\,\text{Ч}(\nu D' \equiv n \pmod r;\ \ \nu \in (\nu_0);$$

$$D' \in (D_0)) + B\,\text{дл}(\nu_0)\,\text{дл}(D_0)(\ln n)^{-K_{24}}; \tag{12.7}$$

здесь D' повторяется надлежащее число раз.

Соберем теперь уравнения (10. 7) по всем классам $\mathfrak{U}_k$ числа $\nu D'$ $(k \leqslant \ln n)$ и по всем зонам (ν_0), (D_0), затем по всем сегментам I_0 и I_0'. Формула (12. 7) и все предыдущие оценки позволяют нам написать для получившегося таким образом уравнения (9. 4) число решений:

$$Q_4^{(2,+)}(n) = 4\sum_{r \leqslant r_0} \chi_4(r)\,\text{Ч}(q_1q_2q_3q_4x_1x_2x_3x_4 \equiv n \pmod r;$$

$$q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \leqslant n) + Bn(\ln n)^{-K_{25}}. \tag{12.8}$$

При этом

$$d_0 \leqslant q_1 \ldots q_4 \leqslant n^{\tau},\ \ \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4) = 1. \tag{12.9}$$

Совершенно аналогично

$$Q_4^{(2,-)}(n) = -4\sum_{r \leqslant r_0} \chi_4(r)\,\text{Ч}(q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \equiv n \pmod r;$$

$$q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \leqslant n) + Bn(\ln n)^{-K_{25}}. \tag{12.10}$$

При этом

$$d_0 \leqslant q_1 \ldots q_4 \leqslant n^{\tau},\ \ \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4) = -1. \tag{12.11}$$

Таким образом, возвращаясь к (9. 3), найдем:

$$Q_4^{(2)}(n) = 4\sum_{r \leqslant r_0} \chi_4(r) \sum_{d_0 \leqslant q_1 \ldots q_4 \leqslant n^{\tau}} \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4) \times$$

$$\times\,\text{Ч}(q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \equiv n \pmod r;\ \ q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \leqslant n) +$$

$$+ Bn(\ln n)^{-K_{25}}; \tag{12.12}$$

здесь $q_1 \ldots q_4 \in \Lambda_P$.

§ 13. Для удобства дальнейших вычислений нам будет выгодно присоединить к сумме (12.12) такую же сумму, где $q_1q_2q_3q_4$ изменяется от n^τ до n. Мы докажем, что это дает допустимую погрешность.

Лемма 2.

$$4\sum_{r\leqslant r_0}\chi_4(r)\sum_{n^\tau<q_1q_2q_3q_4<n}\mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4)\,\text{Ч}\,(q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4\equiv n\,(\mathrm{mod}\,r);$$
$$q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4\leqslant n)=Bn(\ln n)^{-K_{26}}. \tag{13.1}$$

Здесь считается $q_1q_2q_3q_4\in\Lambda_P$.

При $n^\tau<q_1q_2q_3q_4<n$ имеем:

$$\text{Ч}\,(q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4\equiv n\,(\mathrm{mod}\,r);\ \ q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4\leqslant n)=$$
$$=B\sum_{\substack{qx\equiv n(\mathrm{mod}\,r)\\ qx\leqslant n\\ q\in\Lambda_P}}\tau_4(q)\,\tau_4(x). \tag{13.2}$$

Для всякого $q\in\Lambda_P$, $q>n^\tau$ можно получить разложение $q=q_1q_2$ где $n^{\tau/2}/P\leqslant q_1\leqslant\sqrt{n}\,P$. Далее, $\tau_4(q)=\tau_4(q_1q_2)\leqslant\tau_4(q_1)\,\tau_4(q_2)$. Положим $q_2x=y$; тогда правую часть (13.2) можно записать при данном r в виде

$$B\tau_4(q_1)\sum_{\substack{q_1y\equiv n(\mathrm{mod}\,r)\\ q_1y\leqslant n}}\tau_4^2(y); \tag{13.3}$$

здесь $r\leqslant r_0$. Пусть $(q,\ r)=\delta$; тогда сумма в (13.3) будет иметь оценку (см. [4])

$$B\tau_4(q_1)(\ln n)^{a_6}\frac{n\delta}{q_1r}. \tag{13.4}$$

Пусть $q_1=q_1'\delta$. Так как $\delta\,|\,r$, $r\leqslant r_0$ и $q_1>n^{\tau/2}$, то $q_1'>n^{\tau/4}$. Далее, $\tau_4(q_1)\leqslant\tau_4(q_1')\,\tau_4(\delta)$ и (13.4) запишется при данном δ в виде

$$B(\ln n)^{a_6}\frac{n}{r}\tau_4(\delta)\frac{\tau_4(q_1')}{q_1'}. \tag{13.5}$$

Далее, $q_1'\in\Lambda_P$. Ввиду этого при $\tau/4\leqslant\rho\leqslant 1$ имеем из (8.17):

$$\sum_{n^\rho\leqslant q_1'\leqslant 2n^\rho}1=Bn^\rho(\ln n)^{-K_{27}}, \tag{13.6}$$

где $K_{27}=K_{27}(K)\to\infty$ вместе с K. Отсюда

$$\sum_{n^\rho\leqslant q_1'\leqslant 2n^\rho}\tau_4(q_1')\leqslant\Bigg(\sum_{n^\rho\leqslant q_1'\leqslant n^\rho}1\Bigg)^{1/2}\Bigg(\sum_{m\leqslant 2n^\rho}\tau_4^2(m)\Bigg)^{1/2}=Bn^\rho(\ln n)^{-K_{28}}. \tag{13.7}$$

Это дает возможность суммировать (13.5) по q_1' и получить оценку

$$B(\ln n)^{a_6}\frac{n}{r}\tau_4(\delta)(\ln n)^{-K_{28}}=Bn\frac{\tau_4(\delta)}{r}(\ln n)^{-K_{29}}. \tag{13.8}$$

В (13.8) будем суммировать по $\delta | r$; это дает нам

$$Bn \frac{\tau_5(r)}{r} (\ln n)^{-K_{29}}. \tag{13.9}$$

Суммируя по $r \leqslant r_0$, получим

$$Bn (\ln n)^{-K_{29}+1}, \tag{13.10}$$

что и дает нужную оценку (13.1). Таким образом, можем написать:

$$Q_4^{(2)}(n) = 4 \sum_{r \leqslant r_0} \chi_4(r) \sum_{d_0 < q_1 \ldots q_4 \leqslant n} \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4) \times$$
$$\times \text{Ч}(q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \equiv n \pmod r;\ q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \leqslant n) +$$
$$+ Bn(\ln n)^{-K_{26}};\ q_1 \ldots q_4 \in \Lambda_P. \tag{13.11}$$

Эта формула нами выведена для четных n. Для нечетных чисел n получается та же формула при тех незначительных видоизменениях в выводе (10.9) (замена $A(n, D')$ в (11.1) на $(1/2^\lambda)\, A(n, D')$), которые указаны в § 20 работы [1].

§ 14. Возвратимся к формуле (9.3). Нам удалось получить асимптотическое выражение для $Q_4^{(2)}(n)$; теперь будем изучать

$$Q_4^{(0)}(n) = \sum_{\substack{q_1 q_2 q_3 q_4 \leqslant d_0 \\ q_i \in \Lambda_P}} \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4)\, W(n,\ q_1 q_2 q_3 q_4), \tag{14.1}$$

где $W(n,\ q_1 q_2 q_3 q_4)$ есть число решений уравнения

$$q_1 q_2 q_3 q_4 x_1 x_2 k_3 x_4 + \xi^2 + \eta^2 = n, \tag{14.2}$$

причем $q_1 q_2 q_3 q_4 \leqslant d_0$ (тем самым $q_1 q_2 q_3 q_4 \in \Lambda_P$).

Так как $\sum\limits_{\xi^2+\eta^2=m} 1 = 4 \sum\limits_{\rho | m} \chi_4(\rho)$, то можем написать:

$$Q_4^{(0)}(n) = 4 \sum_{q_1 q_2 q_3 q_4 \leqslant d_0} \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4) \sum_{\rho | n - q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4} \chi_4(\rho). \tag{14.3}$$

Положим

$$n_1 = \exp(\ln n)^{\alpha_1}, \tag{14.4}$$

где $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_0)$ будет указано далее. Разобьем $Q_4^{(0)}(n)$ на три суммы, Σ_A, Σ_B и Σ_C (см. [10]):

$$Q_4^{(0)}(n) = \Sigma_A + \Sigma_B + \Sigma_C, \tag{14.5}$$

где

$$\Sigma_A = 4 \sum_{q_1 \ldots q_4 \leqslant d_0} \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4) \times$$

$$\times \sum_{\rho \leqslant \sqrt{n}\, n_1^{-1}} \chi_4(\rho) \sum_{n - q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \equiv 0 \pmod{\rho}} 1, \tag{14.6}$$

$$\Sigma_B = 4 \sum_{q_1 \ldots q_4 \leqslant d_0} \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4) \sum_{\sqrt{n}\, n_1^{-1} \leqslant \rho \leqslant \sqrt{n}\, n_1} \times$$

$$\times \sum_{n - q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \equiv 0 \pmod{\rho}} 1, \tag{14.7}$$

$$\Sigma_C = 4 \sum_{q_1 \ldots q_4 \leqslant d_0} \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4) \sum_{\sqrt{n}\, n_1 < \rho < n} \chi_4(\rho) \times$$

$$\times \sum_{n - q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \equiv 0 \pmod{\rho}} 1. \tag{14.8}$$

Сумму Σ_C надлежит преобразовать к более удобному виду (см. [10]). Полагая $q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 = n - \rho\lambda$, находим

$$\Sigma_C = 4 \sum_{q_1 \ldots q_4 \leqslant d_0} \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4) \times$$

$$\times \sum_{\lambda \leqslant \sqrt{n}\, n_1^{-1}} \left(\sum_{\substack{q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \leqslant n - \lambda\sqrt{n}\, n_1 \\ q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \equiv n - \lambda \pmod{4\lambda}}} 1 - \sum_{\substack{q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \leqslant n - \lambda\sqrt{n} - n_1 \\ q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4 \equiv n + \lambda \pmod{4\lambda}}} 1 \right). \tag{14.9}$$

Положим $Q = q_1 q_2 q_3 q_4$, $X = x_1 x_2 x_3 x_4$; QX нечетно. Сравнения

$$QX \equiv n - \lambda \pmod{4\lambda} \tag{14.10}$$

и

$$QX \equiv n + \lambda \pmod{4\lambda} \tag{14.11}$$

будем рассматривать параллельно. Покажем, что они одновременно разрешимы или неразрешимы. В самом деле, имеем $(Q, 4\lambda) = (Q, \lambda)$. Если $(Q, \lambda) \mid n - \lambda$, то $(Q, \lambda) \mid n + \lambda$, и обратно. Полагая $Q/(Q, 4\lambda) = Q/(Q, \lambda) = Q_0$, сведем (14.10) и (14.11) к сравнениям

$$Q_0 X \equiv \frac{n - \lambda}{(Q, \lambda)} \left(\operatorname{mod} 4 \frac{\lambda}{(Q, \lambda)} \right), \tag{14.12}$$

$$Q_0 X \equiv \frac{n + \lambda}{(Q, \lambda)} \left(\operatorname{mod} 4 \frac{\lambda}{(Q, \lambda)} \right). \tag{14.13}$$

Здесь $n - \lambda$ и $n + \lambda$ нечетные, ибо таково $Q_0 X$.

Вводя число $Q_0^{-1} \left(\operatorname{mod} 4 \frac{\lambda}{(Q, \lambda)} \right)$, придем к сравнениям

$$X \equiv Q_0^{-1} \frac{n - \lambda}{(Q, \lambda)} \left(\operatorname{mod} 4 \frac{\lambda}{(Q, \lambda)} \right), \tag{14.14}$$

$$X \equiv Q_0^{-1} \frac{n + \lambda}{(Q, \lambda)} \left(\operatorname{mod} 4 \frac{\lambda}{(Q, \lambda)} \right). \tag{14.15}$$

Сделаем еще важное для дальнейшего замечание. Сравнения (14.14) и (14.15) однотипны в том смысле, что

$$\left(\frac{n-\lambda}{(Q,\lambda)},\ 4\frac{\lambda}{(Q,\lambda)}\right)=\left(\frac{n+\lambda}{(Q,\lambda)},\ 4\frac{\lambda}{(Q,\lambda)}\right). \tag{14.16}$$

Ввиду нечетности $(n-\lambda)/(Q,\lambda)$ и $(n+\lambda)/(Q,\lambda)$ это проверяется непосредственно.

Сравнения (14.14) и (14.15) решаются при ограничениях

$$QX=q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4\leqslant n-\lambda\sqrt{n}\,n_1. \tag{14.17}$$

Покажем, что можно отбросить такие значения $\lambda\leqslant\sqrt{n}\,n_1^{-1}$, для которых

$$n-\lambda\sqrt{n}\,n_1\leqslant\frac{n}{(\ln n)^{K_{30}}}. \tag{14.18}$$

Действительно, число решений уравнения $n-q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4=$ $=\lambda\rho$, $q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4\leqslant n(\ln n)^{-K_{30}}$ оценивается как

$$\sum_{n-\lambda\rho\leqslant n(\ln n)^{-K_{30}}}\tau_8(n-\lambda\rho)=$$

$$=B\sum_{n-x\leqslant n(\ln n)^{-K_{30}}}\tau_8(n-x)\,\tau(x)=Bn(\ln n)^{-K_{31}} \tag{14.19}$$

в силу, например, оценок работы [6].

Итак, можем считать

$$n-\lambda\sqrt{n}\,n_1>n(\ln n)^{-K_{30}}. \tag{14.20}$$

§ 15. Оставим пока суммы $\sum_A$ и $\sum_C$ и займемся $\sum_B$. Эту сумму мы будем трактовать сочетаниями «дисперсионного метода» и замечательных соображений К. Хооли [10]. Нам следует доказать следующую лемму.

Лемма 3.

$$\Sigma_B=B\frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_0}}, \tag{15.1}$$

где

$$\tau_0>\frac{1}{4}\left(1-\frac{e}{2}\ln 2\right)>0.014. \tag{15.2}$$

Доказательство этой леммы сложно и требует ряда вспомогательных построений.

Обращаясь к (14.7), разбиваем $\sum_B$ на две суммы,

$$\Sigma_B=\Sigma_B^{(+)}+\Sigma_B^{(-)}, \tag{15.3}$$

где в $\sum_B^{(+)}$ числа $q_1q_2q_3q_4$ пробегают совокупность произведений четырех чисел, таких, что $\mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4)=+1$, $q_1q_2q_3q_4\leqslant d_0$, а в $\sum_B^{(-)}$ числа $q_1q_2q_3q_4$ пробегают совокупность произведений четырех чисел, таких, что $\mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4)=-1$. Остановимся на $\sum_B^{(+)}$; $\sum_B^{(-)}$ будет трактоваться совершенно аналогично.

Имеем

$$\Sigma_B^{(+)}=4\left(T^{(+)}(n)-T^{(-)}(n)\right), \tag{15.4}$$

где $T^{(+)}(n)$ есть число решений уравнения

$$q_1q_2q_3q_4x_1x_2x_3x_4+xy=n \tag{15.5}$$

при условиях

$$\begin{gathered} xy\leqslant n,\ \ \sqrt{n}\,n_1^{-1}\leqslant x\leqslant\sqrt{n}\,n_1,\ \ x\equiv 1 \pmod 4, \\ q_1q_2q_3q_4\in Q^{(+)},\ \ q_1q_2q_3q_4\leqslant d_0 \end{gathered} \tag{15.6}$$

и $T^{(-)}(n)$ есть число решений уравнения

$$q_1q_2q_3q_4x_1x_2x_3x_4+xy=n \tag{15.7}$$

при условиях

$$\begin{gathered} xy\leqslant n,\ \ \sqrt{n}\,n_1^{-1}\leqslant x\leqslant\sqrt{n}\,n_1,\ \ x\equiv -1 \pmod 4, \\ q_1q_2q_3q_4\in Q^{(+)},\ \ q_1q_2q_3q_4\leqslant d_0. \end{gathered} \tag{15.8}$$

Для каждого из уравнений (15.5) и (15.7) числа $x_1x_2x_3x_4=X$ разбиваем на два класса.

I класс $\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$: X имеет хотя бы один простой множитель ν с условием

$$d_1=\exp(\ln n)^{\alpha_2}\leqslant\nu\leqslant n^{1/6-\varepsilon_0}, \tag{15.9}$$

где $\alpha_2<10^{-100}$.

II класс $\mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$: все простые множители X либо меньше d_1, либо больше $n^{1/6-\varepsilon_0}$.

Случай $X\in\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$ будем трактовать несколько видоизмененным «дисперсионным методом». Числа $X\in\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$ подразделим на $k\leqslant\ln n$ систем $\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}^{(k)}$, имеющих ровно k простых множителей вида (15.9). Число $X\in\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$ можно записать ровно k способами в виде

$$X=\nu q, \tag{15.10}$$

где ν удовлетворяет условию (15.9), а q надлежит считать $\tau_4(q)$ раз. При $X\in\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}^{(k)}$ уравнения (15.5) и (15.7) запишутся в виде

$$xy+D'\nu=n, \tag{15.11}$$

где $D'=q_1q_2q_3q_4q$ считается соответствующее число раз, пробегает установленную выше систему чисел (с повторениями) и $D'\leqslant n/\nu$. Далее, x и $q_1q_2q_3q_4$ удовлетворяют условиям (15.5). Совершенно аналогичное уравнение получается для (15.7). Далее, произведя обычные оценки сверху, убеждаемся, что можно пренебречь решениями (15.11), доставляемыми такими числами D', для коих $\tau_4(D')>(\ln n)^{K_{31}}$, и оставить лишь такие D', которые в уравнении (15.11) считаются не более

$$B(\ln n)^{K_{31}} \tag{15.12}$$

раз.

Далее подготавливаем для уравнения (15. 11) и аналогичного ему уравнения применение «дисперсионного метода». Сегмент (15. 9) изменения ν разбиваем на зоны (ν_0): $[\nu_0, \nu_0+\nu_0 (\ln n)^{-K_{32}}]$; в зависимости от этих зон сегмент изменения D' разбиваем на зоны (D_0): $[D_0, D_0+(\ln n)^{-K_{32}}]$. С обычной погрешностью в общем числе решений можем ограничиться этими зонами и считать $\nu \in (\nu_0)$ и $D' \in (D_0)$ независимыми.

§ 16. Сегмент изменения x в (15. 6) и (15. 8) обозначим через (X); зону изменения y, зависящую от x в (15. 6) и (15. 8), обозначим кратко через $(Y)_x$. Введем обозначения:

$$U_1(m) = \sum_{\substack{m=xy \\ x\in(X);\ y\in(Y)_x \\ x\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} 1, \tag{16. 1}$$

$$U_2(m) = \sum_{\substack{m=xy \\ x\in(X);\ y\in(Y)_x \\ x\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} 1. \tag{16. 2}$$

«Дисперсионный метод» нам выгодно применять в несколько видоизмененном виде и сразу к обоим уравнениям, (15. 5) и (15.7).

Составляем дисперсию разности решений

$$V = \sum_{D\in(D_0)} \Big(\sum_{\nu\in(\nu_0)} U_1(n-D\nu) - U_2(n-D\nu)\Big)^2, \tag{16. 3}$$

где D пробегает подряд все нечетные числа зоны (D_0), каждое по одному разу; ν — простые числа зоны (ν_0). Имеем:

$$V = \sum_{D\in(D_0)} \Big(\sum_{\nu\in(\nu_0)} U_1(n-D\nu)\Big)^2 + \sum_{D\in(D_0)} \Big(\sum_{\nu\in(\nu_0)} U_2(n-D\nu)\Big)^2 -$$

$$-2\sum_{D\in(D_0)} \Big(\sum_{\nu\in(\nu_0)} U_1(n-D\nu)\Big)\Big(\sum_{\nu\in(\nu_0)} U_2(n-D\nu)\Big). \tag{16. 4}$$

Три суммы, входящие в (16. 4), обозначим соответственно через V_1, V_2 и $-2V_3$. Количество V_3 естественно назвать, по аналогии с теоретико-вероятностными концепциями, ковариацией количеств решений двух уравнений вида (15. 11).

Как видно из § 3 работы [1], с погрешностью

$$B \sum_{\nu\in(\nu_0)} \sum_{D\in(D_0)} [(U_1(n-D\nu))^2 + (U_2(n-D\nu))^2] =$$

$$= B\ \text{дл}\,(\nu_0)\ \text{дл}\,(D_0)\,(\ln n)^{a_7} \tag{16. 5}$$

можно приравнять V_1 числу решений уравнения

$$\nu_1 xy - \nu_2 zt = n\,(\nu_1 - \nu_2) \tag{16. 6}$$

в условиях

$$x\in(X),\ \ z\in(X),\ \ y\in(Y)_x,\ \ t\in(Y)_z,\ \ x\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4),\ \ z\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4), \tag{16. 7}$$

где пары x, y и z, t изменяются независимо.

Далее, V_2 с той же погрешностью приравнивается числу решений уравнения (16. 6) в условиях

$$x \in (X),\ z \in (X),\ y \in (Y)_x,\ t \in (Y)_z,\ x \equiv -1 \pmod 4,\ z \equiv -1 \pmod 4, \tag{16. 8}$$

и пары x, y и z, t изменяются независимо. V_3 с такой же погрешностью приравнивается числу решений уравнения (16. 6) в условиях

$$x \in (X),\ z \in (X),\ y \in (Y)_x,\ t \in (Y)_z,\ x \equiv 1 \pmod 4,\ z \equiv -1 \pmod 4. \tag{16. 9}$$

Последнее число решений уравнения (16. 6) нужно удвоить и вычесть из суммы предыдущих.

Уравнение (16. 6) в условиях (16. 7)—(16. 9) трактуется совершенно таким же способом, как полностью аналогичное ему уравнение (4. 7) работы [1], — с помощью метода И. М. Виноградова и оценок А. Вейля (см. [1], § 4—9). Ввиду того что здесь $d_1 \leqslant \nu \leqslant n^{1/6-\varepsilon_0}$, все выводы § 4—9 остаются в силе. При этом не нужно вычислять отдельно число решений уравнения в трех указанных случаях, а нужно лишь проверить, что составные части числа решений для этих трех уравнений, описанные в § 4—9 работы [1], сокращаются, если взять сумму их для двух первых уравнений и вычесть удвоенное количество для третьего уравнения. В § 4—9 работы [1] трактуются четные n; для нечетных n применяем обычное видоизменение, указанное в § 20 работы [1] (полагаем $y=y_1 \cdot 2^\lambda$; y_1 нечетно). В результате находим

$$V = B\,\text{дл}\,(D_0)\, L_1^2 (\ln n)^{-K_{32}}, \tag{16. 10}$$

где

$$L_1 = \sum_{\nu \in (\nu_0)} 1.$$

Теперь учитываем (15. 12) и применяем аналог неравенства Чебышева, как делалось в § 18 работы [1]. В результате находим:

$$\sum_{\nu,\, D'} U_1 (n - D'\nu) - \sum_{\nu',\, D'} U_2 (n - D'\nu) = B\,\text{дл}\,(D_0)\, L_1 (\ln n)^{-K_{33}}. \tag{16. 11}$$

Такова оценка разности чисел решений двух уравнений вида (15. 11).

Собирая по $\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}^{(k)}$, $k \leqslant \ln n$, и зонам (ν_0) и (D_0), найдем для разности чисел решений уравнений (15. 5) и (15. 7) в условиях (15. 6) и (15. 8) оценку

$$Bn (\ln n)^{-K_{34}}. \tag{16. 12}$$

Это дает оценку (16. 12) для части $\sum_B^{(+)}$, где $X = x_1 x_2 x_3 x_4 \in \mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$.

§ 17. Перейдем к рассмотрению уравнений (15. 5) и (15. 7) при $X = x_1 x_2 x_3 x_4 \in \mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$. Всякое такое число X можно представить в виде

$$X = up', \tag{17. 1}$$

где u состоит из простых множителей $p < d_1$, а p' имеет все простые множители, превосходящие $n^{1/6-\varepsilon_0}$ (и, стало быть, этих множителей не больше шести).

Подразделим класс $\mathfrak{A}_{II}$ на два класса так:
$\mathfrak{A}_{II}^{(1)}$ — те числа вида (17.2), где

$$u \leqslant \exp(\ln d_1)^4 = \exp(\ln n)^{4\alpha_2} = d_2;$$

$\mathfrak{A}_{II}^{(2)}$ — те числа (17.1), где

$$u > \exp(\ln d_1)^4 = d_2.$$

У чисел $X \in \mathfrak{A}_{II}^{(2)}$ имеются множители $u > \exp(\ln d_1)^4$, состоящие из весьма малых простых делителей $p < d_1$. Ввиду этого, применяя оценку А. И. Виноградова (8.18) (см. [7]), получим нашими обычными методами, что такие числа вносят в уравнения (15.5) и (15.7) число решений, оцениваемое как

$$Bn(\ln n)^{-K_{35}}. \tag{17.2}$$

Теперь можно ограничиться рассмотрением чисел $x_1 \ldots x_4 = X \in \mathfrak{A}_{II}^{(1)}$. Для них разность чисел решений уравнений (15.5) и (15.7) будем оценивать, почти в точности следуя методу К. Хооли [10] при использовании его лемм.

Пусть

$$D(m) = \sum_{\substack{l \mid m \\ \sqrt{n}\, n_1^{-1} \leqslant l \leqslant \sqrt{n}\, n_1}} 1, \tag{17.3}$$

$$F(m) = \sum_{\substack{l \mid m \\ \sqrt{n}\, n_1^{-1} \leqslant l \leqslant \sqrt{n}\, n_1}} \chi_4(l). \tag{17.4}$$

Изучаем оставшуюся часть $\sum_B^{(+)}$:

$$\sum\nolimits_B^{(+)'} = \sum_{\substack{q_1 \ldots q_4 \leqslant d_0 \\ \mu(q_1) \ldots \mu(q_4) = 1}} \; \sum_{x_1 \ldots x_4 \in \mathfrak{A}_{II}^{(1)}} F(n - q_1 \ldots q_4 x_1 \ldots x_4). \tag{17.5}$$

Очевидно,

$$\Big|\sum\nolimits_B^{(+)'}\Big| < a_7 \sum_{\substack{q_1 \ldots q_4 \leqslant d_0 \\ u \leqslant d_2 \\ q_1 \ldots q_4 u p' \leqslant n}} \tau_4(u)\,|F(n - q_1 \ldots q_4 u p')|. \tag{17.6}$$

Здесь u пробегает все нечетные числа, не превосходящие d_2, а не только те, у которых простые делители не превосходят d_1; p' пробегает числа, все простые делители которых больше $n^{1/6-\varepsilon_0}$, каждое по одному разу.

Положим

$$d_3 = d_1 d_2 \leqslant \exp\left((\ln n)^{\alpha_0} + (\ln n)^{4\alpha_2}\right). \tag{17.7}$$

Из (17.6) находим:

$$\sum\nolimits_B^{(+)'} = B \sum_{\substack{u \leqslant d_3 \\ p' \leqslant n/u}} \tau_8(u)\,|F(n - up')| = B \sum_{\substack{u \leqslant d_3,\ p' \leqslant n/u \\ D(n - up') \neq 0}} \tau_8(u)\,|F(n - up')| =$$

$$= B\Bigg(\sum_{\substack{up' \leqslant n;\ u \leqslant d_3 \\ D(n - up') \neq 0}} 1\Bigg)^{1/2} \Bigg(\sum_{\substack{up' \leqslant n \\ u \leqslant d_3}} \tau_8^2(u)\,F^2(n - up')\Bigg)^{1/2}. \tag{17.8}$$

Введем обозначения:

$$\sum\nolimits_D = \sum_{\substack{up' \leqslant n;\ u \leqslant d_3 \\ D(n-up') \neq 0}} 1, \tag{17.9}$$

$$\sum\nolimits_E = \sum_{up' \leqslant n;\ u \leqslant d_3} \tau_8^2(u)\, F^2(n - up'); \tag{17.10}$$

таким образом,

$$\sum\nolimits_B^{(+)'} = B\left(\sum\nolimits_D\right)^{1/2}\left(\sum\nolimits_E\right)^{1/2}. \tag{17.11}$$

§ 18. Займемся сперва оценкой $\sum_E$ по методу К. Хооли [10]. Положим $n_u = n/u$ и для каждого $u \leqslant d_3$ введем следующие параметры. Пусть

$$x_u = (n_u)^{\frac{1}{(\ln\ln n_u)^2}}, \quad P_u = \prod_{p \leqslant x_u} p.$$

Для всякого целого $t = \Pi p^\alpha$ положим $t = t^{(1)}t^{(2)}$, где

$$t^{(1)} = \prod_{\substack{p \mid t \\ p \leqslant x_u}} p^\alpha, \quad t^{(2)} = \prod_{\substack{p \mid t \\ p > x_u}} p^\alpha, \quad P_u = \prod_{p \leqslant x_u} p.$$

Для каждого целого $\nu_n \leqslant n_u$ вводим функцию

$$f_u(\nu_u) = g_u(\nu_u) + h_u(\nu_u), \quad g_u(\nu_u) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu_u \text{ простое, } \nu_u \leqslant x_u, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$h_u(\nu_u) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\nu_u, P_u) = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, $f_u(\nu_u)$ будет наверное равняться 1 при $\nu_u = p'$ (при данном u). Имеет место (см. [10], лемма 4) следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть* $y \leqslant n_u$, $k = O(n_u^\theta)$, $0 < \theta < 1$, θ — *константа. Тогда*

$$\sum_{\substack{\nu_u \leqslant y \\ \nu_u \equiv a \pmod k}} f_u(\nu_u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi(k)} A(n_u)\, y + B\dfrac{n_u}{k \ln^5 n}, & \text{если } (a^{(1)}, k) = 1, \\[2ex] B\dfrac{n_u}{k\ln^5 n}, & \text{если } (a^{(1)}, k) > 1. \end{cases} \tag{18.1}$$

При этом $A(n_u)$ *зависит только от* n_u *и имеет оценку*

$$A(n_u) = B\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}. \tag{18.2}$$

Обращаясь к (17.10), находим:

$$\sum\nolimits_E \leqslant \sum_{u \leqslant d_3} \tau_8^2(u) \sum_{\nu_u \leqslant n/u} F^2(n - u\nu_n)\, f(\nu_n) =$$

$$= \sum_{u \leqslant d_3} \tau_8^2(u) \sum_{\substack{l_1' m_1' = l_2' m_2' = n - \nu_u u \\ \sqrt{n}\, n_1^{-1} < l_2',\ l_2' \leqslant \sqrt{n}\, n_1}} \chi_4(l_1')\,\chi_4(l_2')\, f_u(\nu_u). \tag{18.3}$$

Для заданных l_1', l_2' значения $n - \nu_u u$ при данном u сравнимы с нулем $(\operatorname{mod}[l_1', l_2'])$. Пусть $(l_1', l_2') = d$; тогда

$$l_1' = dl_1, \quad l_2' = dl_2, \quad (l_1, l_2) = 1, \quad [l_1', l_2'] = dl_1 l_2.$$

Вводим условия, обозначаемые большими буквами в скобках:

$$(H): \ \{(l_1, l_2) = 1\}, \quad (L_i): \ \{n^{1/2} n_1^{-1} d^{-1} \leqslant l_i \leqslant n^{1/2} n_1 d^{-1}\}.$$

Имеем:

$$\sum\nolimits_E = \sum_{u \leqslant d_3} \tau_8^2(u) \sum_{\substack{l_1 l_2 d m = n - u\nu_u \\ (L_1);\ (L_2);\ (H)}} \chi_4^2(d)\, \chi_4(l_1)\, \chi_4(l_2)\, f_u(\nu_u). \tag{18.4}$$

При данном $u \leqslant d_3$ внутреннюю сумму разобьем на

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{d \geqslant n^{1/8}} \text{ и } \sum\nolimits_2 = \sum_{d < n^{1/8}}.$$

В $\sum_1$

$$l_1 l_2 d < \frac{n n_1^2}{d} \leqslant n^{7/8} n_1^2. \tag{18.5}$$

В таких условиях можем использовать лемму 4. Рассмотрим прогрессии $u\nu_u \equiv n \ (\operatorname{mod} dl_1 l_2)$. Пусть $(u, dl_1 l_2) = \delta$ при данном $dl_1 l_2$. Имеем:

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{(L_1);\ (L_2);\ (H) \\ d \geqslant n^{1/8}}} \chi_4^2(d)\, \chi_4(l_1)\, \chi_4(l_2) \sum_{\substack{u\nu_u \equiv n \ (\operatorname{mod} dl_1 l_2) \\ u\nu_u \leqslant n}} f_u(\nu_u). \tag{18.6}$$

Если $\delta \nmid n$, то внутренняя сумма пустая. Если $\delta \mid n$ и $(dl_1 l_2/\delta, n^{(1)}) = 1$ — условие, которое мы обозначим через (K_δ), то внутренняя сумма равна

$$A\,(n_u) \frac{n}{u} \frac{1}{\varphi(dl_1 l_2 \delta^{-1})} + B \frac{n}{u \ln^5 n} \frac{\delta}{dl_1 l_2}.$$

Отсюда

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{(\delta)} A\,(n_u) \frac{n}{u} \sum_{(L_1);\ (L_2);\ (H);\ (K_\delta)} \frac{\chi_4^2(d)\, \chi_4(l_1)\, \chi_4(l_2)}{\varphi(dl_1 l_2 \delta^{-1})} +$$

$$+ B \frac{n}{u \ln^5 n} \sum_{\substack{(L_1);\ (L_2);\ (H) \\ d \geqslant n^{1/8}}} \frac{1}{dl_1 l_2}. \tag{18.7}$$

Последняя сумма легко оценивается (при данном δ) как

$$B \frac{n}{u \ln^2 n}. \tag{18.8}$$

Первую сумму (при данном δ) представляем в виде:

$$\sum\nolimits_3 = \sum_{\substack{(L_1);\ (L_2);\ (H);\ (K_\delta) \\ n^{1/8} \leq d < n^{1/2} n_1^{-1}}} \frac{\chi_4^2(d)\, \chi_4(l_1)\, \chi_4(l_2)}{\varphi(d l_1 l_2 \delta^{-1})}, \tag{18.9}$$

$$\sum\nolimits_4 = \sum_{\substack{(L_1);\ (L_2);\ (H);\ (K_\delta) \\ n^{1/2} n_1^{-1} < d < n^{1/2} n_1}} \frac{\chi_4^2(d)\, \chi_4(l_1)\, \chi_4(l_2)}{\varphi(d l_1 l_2 \delta^{-1})}. \tag{18.10}$$

Сумма $\sum_3$ оценивается стандартными методами (см. [10]). Следуя в точности рассуждениям при выводе формулы (53) работы [10], найдем:

$$\sum\nolimits_4 = B \tau_3(\delta) (\ln n_1)^6. \tag{18.11}$$

Сумма $\sum_4$ оценивается тривиально при замене каждого члена его абсолютной величиной (см. [10]). Тогда получим:

$$\sum\nolimits_4 = B \tau_3(\delta) (\ln n_1)^8. \tag{18.12}$$

Итак, при данном δ, учитывая (18.7)—(18.11), находим оценку

$$Bn \frac{\tau_3(\delta)}{u} \frac{\ln \ln n}{\ln n} (\ln n_1)^6. \tag{18.13}$$

Теперь, суммируя по $\delta \mid u$ и затем по u, находим оценку

$$Bn \frac{\ln \ln n}{\ln n} (\ln n_1)^6 (\ln d_3)^{a_8} = Bn \frac{(\ln n)^{\alpha_3}}{\ln n}, \tag{18.14}$$

где

$$a_3 = (2a_8 + 10)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2). \tag{18.15}$$

§ 19. Перейдем к оценке $\sum_2$, целиком следуя [10]. Здесь $d < n^{1/8}$. Употребляем формулу (см. [10])

$$\sum_{\substack{rt = l_1 \\ st = l_2}} \mu(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } (l_1,\ l_2) = 1, \\ 0, & \text{если } (l_1,\ l_2) > 1. \end{cases}$$

Вводим условия:

$$\frac{n^{1/2} n_1^{-1}}{dt} < r < \frac{n^{1/2} n_1}{dt}, \tag{R}$$

$$\frac{n^{1/2} n_1^{-1}}{dt} < s < \frac{n^{1/2} n_1}{dt}, \tag{S}$$

$$d < n^{1/8}, \tag{D}$$

$$d < n^{1/8}, \quad t < n^{1/8}. \tag{DT}$$

Имеем при данном u (см. (18.3)):

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{\substack{rstd^2m=n-u\nu_u \\ (R);\,(S);\,(D)}} \mu(t)\,\chi_4^2(t)\,\chi_4^2(d)\,\chi_4(r)\,\chi_4(s)\,f_u(\nu_u) = \sum_{t<n^{1/8}} + \sum_{t\geqslant n^{1/8}}. \quad (19.1)$$

Введем обозначения:

$$\sum\nolimits_5 = \sum_{t<n^{1/8}}, \quad \sum\nolimits_6 = \sum_{t\geqslant n^{1/8}}.$$

Имеем:

$$\sum\nolimits_5 = \sum_{\substack{(R);\,(S);\,(DT) \\ rsdt^2m=n-u\nu_u}} \mu(t)\,\chi_4^2(t)\,\chi_4^2(d)\,\chi_4(r)\,\chi_4(s)\,f_u(\nu_u), \quad (19.2)$$

$$\sum\nolimits_6 = \sum_{\substack{(R);\,(S);\,(D) \\ t\geqslant n^{1/8},\ rsdt^2m=n-u\nu_u}} \mu(t)\,\chi_4^2(t)\,\chi_4^2(d)\,\chi_4(r)\,\chi_4(s)\,f_u(\nu_u). \quad (19.3)$$

В $\sum_5$

$$rt^2dm < \frac{n}{s} < \frac{n}{n^{1/2}d^{-1}t^{-1}n_1^{-1}} = n^{1/2}dtn_1 < n^{3/4}n_1. \quad (19.4)$$

Отсюда

$$\sum\nolimits_5 = \sum_{\substack{rt^2dm<n^{3/4}n_1 \\ (R);\,(DT)}} \mu(t)\,\chi_4^2(t)\,\chi_4^2(d)\,\chi_4(r) \cdot \sum_{\substack{u\nu_u=n-rst^2dm \\ (S)}} \chi_4(s)\,f_u(\nu_u) =$$

$$= B \sum_{\substack{rt^2dm<n^{3/4}n_1 \\ (R);\,(DT)}} \left| \sum_{\substack{u\nu_u=n-rst^2dm \\ y_1\leqslant\nu_u<y_2}} \chi_4(s)\,f_u(\nu_u) \right|, \quad (19.5)$$

где

$$y_2 = \max\left[\frac{n-n^{1/2}rtmn_1^{-1}}{u},\ 1\right], \quad (19.6)$$

$$y_1 = \max\left[\left[\frac{n-n^{1/2}rtmn_1}{u}+1\right],\ 1\right]. \quad (19.7)$$

Если положим $\lambda = rt^2dm$, то $u\nu_u = n - \lambda s$, в силу чего внутренняя сумма в (19.6) принимает вид

$$\sum_{\substack{u\nu_u\equiv n-\lambda\ (\mathrm{mod}\ 4\lambda) \\ y_1\leqslant\nu_u<y_2}} f_u(\nu_u) - \sum_{\substack{u\nu_u\equiv n+\lambda\ (\mathrm{mod}\ 4\lambda) \\ y_1\leqslant\nu_u<y_2}} f_u(\nu_u). \quad (19.8)$$

В (19.8) участвуют сравнения

$$u\nu_u \equiv n-\lambda\ (\mathrm{mod}\ 4\lambda), \quad (19.9)$$

$$u\nu_u \equiv n+\lambda\ (\mathrm{mod}\ 4\lambda). \quad (19.10)$$

Далее, u нечетно. Поэтому $(u, 4\lambda) = (u, \lambda)$. Если $(u, \lambda) \mid n-\lambda$, то $(u, \lambda) \mid n+\lambda$, и обратно.

Рассмотрим условия

$$\left(\frac{n-\lambda}{(\lambda,\ u)},\ 4\left(\frac{\lambda}{(\lambda,\ u)}\right)^{(1)}\right)=1,\quad \left(\frac{n+\lambda}{(\lambda,\ u)},\ 4\left(\frac{\lambda}{(\lambda,\ u)}\right)^{(1)}\right)=1. \tag{19.11}$$

Каждое из них эквивалентно условию $(n-\lambda/(\lambda,\ u),\ 2\,(\lambda/(\lambda,\ u))^{(1)})=1$, и поэтому они эквивалентны.

По лемме 4, правая часть (19. 8) дает

$$\frac{y_2-y_1}{\varphi\,(4\lambda/(\lambda,\ u))}\,A\,(n_u)-\frac{y_2-y_1}{\varphi\,(4\lambda/(\lambda,\ u))}\,A\,(n_u)+B\frac{n_u\,(\lambda,\ u)}{\lambda\ln^5 n}=$$

$$=B\,\frac{n\,(\lambda,\ u)}{\lambda u\ln^5 n}, \tag{19.12}$$

если

$$\left(\frac{n-\lambda}{(\lambda,\ u)},\ 2\left(\frac{\lambda}{(\lambda,\ u)}\right)^{(1)}\right)=1,$$

и

$$B\,\frac{n\,(\lambda,\ u)}{\lambda u\ln^5 n}, \tag{19.13}$$

если (19. 12) не выполнено. Тогда в силу (19. 5)

$$\sum\nolimits_5=B\sum_{rdmt^2\leqslant n}\frac{\tau_4\,(\lambda,\ u)}{u}\,\frac{n}{rdmt^2\ln^5 n}=B\,\frac{\tau_4\,(\lambda,\ u)}{u}\,\frac{n}{\ln^2 n}. \tag{19.14}$$

Сумма $\sum_6$ оценивается тривиально, как сумма абсолютных величин своих членов:

$$\sum\nolimits_6=Bn^{0.9}. \tag{19.15}$$

Итак, из (19. 14) и (19. 15) получаем:

$$\sum\nolimits_2=B\,\frac{n}{\ln^2 n}\,\frac{\tau_4\,(\lambda,\ u)}{u}. \tag{19.16}$$

Собирая по $(\lambda,\ u)\,|\,u$ и по $u\leqslant d_3$ с коэффициентом $\tau_8\,(u)$, имеем оценку

$$B\,\frac{n}{\ln^2 n}\,(\ln n)^{\alpha_1}=B\,\frac{n}{(\ln n)^{1.9}}. \tag{19.17}$$

Присоединяя (18. 14) и учитывая (18. 4), находим окончательно:

$$\sum\nolimits_E=Bn\,\frac{(\ln n)^{\alpha_2}}{\ln n}. \tag{19.18}$$

§ 20. Перейдем к оценке суммы $\sum_D$, задаваемой формулой (17. 9):

$$\sum\nolimits_D=\sum_{\substack{up'\leqslant n\\ u\leqslant d_3\\ D(n-up')\neq 0}}1. \tag{20.1}$$

Положим $p''=up'$. Имеем:

$$\sum\nolimits_D \leqslant \sum_{\substack{p''<n\\ \Omega(n-p')\leqslant\alpha\ln\ln n}} D(n-p'') + \sum_{\substack{p''<n\\ \Omega(n-p'')>\alpha\ln\ln n}} 1. \tag{20.2}$$

Первую из сумм (20.2) обозначим через $\sum_{D_1}$, вторую — через $\sum_{D_2}$; $\Omega(m)$ — число простых делителей m, $\alpha\in[1, 3/2]$ будет фиксировано далее.

Введем область суммирования:

$$\frac{n^{1/2}}{n_1}<l<n^{1/2}n_1, \tag{L}$$

$$\frac{n^{1/2}}{n_1\ln^2 n}<m<n^{1/2}n_1, \tag{M}$$

$$lm=n-p''. \tag{P}$$

Если имеем область суммирования (P), то в $\sum_{D_1}$ или $\Omega(l)\leqslant\leqslant(\alpha/2)\ln\ln n$, или $\Omega(m)\leqslant(1/2)\ln\ln n$, или и то и другое вместе.

$$\sum\nolimits_{D_1}\leqslant \sum_{\substack{(L);\,(P)\\ \Omega(l)\leqslant(\alpha/2)\ln\ln n}} 1+\sum_{\substack{(L);\,(P)\\ \Omega(m)\leqslant(\alpha/2)\ln\ln n}} 1, \tag{20.3}$$

во второй сумме $lm=n-p''<n$, $l>n^{1/2}/n_1$, $m<n^{1/2}n_1$. Имеем:

$$\sum\nolimits_{D_1}\leqslant \sum_{\substack{(L);\,(P)\\ \Omega(l)\leqslant(\alpha/2)\ln\ln n}} 1+\sum_{\substack{(M);\,(P)\\ \Omega(m)\leqslant(\alpha/2)\ln\ln n}} 1+\sum_{\substack{l<n^{1/2}n_1\\ m\leqslant n^{1/2}n_1^{-1}\ln^{-2}n}} 1. \tag{20.4}$$

Эти три суммы обозначим соответственно через $\sum_1$, $\sum_2$ и $\sum_3$; $\sum_1=O(\sum_2)$. Далее,

$$\Sigma_3=O\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right). \tag{20.5}$$

Займемся $\sum_2$. Имеем:

$$\sum\nolimits_2=\sum_{\substack{(M)\\ \Omega(m)\leqslant(\alpha/2)\ln\ln n}}\ \sum_{\substack{p''\equiv n\ (\mathrm{mod}\ m)\\ p''\leqslant n}} 1=$$

$$=\sum_{\substack{(M)\\ \Omega(m)\leqslant(\alpha/2)\ln\ln n}}\ \sum_{\substack{up'\equiv n\ (\mathrm{mod}\ m)\\ up'\leqslant n}} 1. \tag{20.6}$$

Далее изучаем

$$\sum_{\substack{up'\equiv n\ (\mathrm{mod}\ m)\\ up'\leqslant n}} 1. \tag{20.7}$$

Пусть $(u, m)=\delta$. Если сумма (20.7) не пуста, то $\delta\mid n$ и

$$\frac{u}{\delta}p'\equiv\frac{n}{\delta}\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{\delta}\right),\quad p'\leqslant\frac{n}{u}. \tag{20.8}$$

Число решений сравнения (20.8) можно оценить по известной теореме Бруна—Тичмарша:

$$B\frac{n}{u}\,\frac{1}{\ln n}\,\frac{1}{\varphi(m/\delta)}=B\,\frac{n\ln\ln n}{\ln n}\,\frac{1}{u}\,\frac{\delta}{m}=B\,\frac{n\ln\ln n}{\ln n}\left(\frac{m,\ u}{mu}\right). \tag{20.9}$$

При данном $\delta=(m,\ u)$, $\delta\,|\,u$, $u\leqslant d_3$ будем перебирать m, u. Имеем:

$$\frac{(m,\ u)}{mu}=\frac{\delta}{m_1\delta u_1\delta}=\frac{1}{m_1u_1\delta}. \tag{20.10}$$

Далее,

$$\Omega(m_1)<\frac{\alpha}{2}\ln\ln n,$$

$$\frac{n^{1/2}}{n_1\delta\ln^2 n}\leqslant m_1\leqslant\frac{n^{1/2}n_1}{\delta}.$$

Положим

$$\frac{n^{1/2}}{\delta}=n_0^{1/2},\ n_0=\frac{n}{\delta^2}.$$

Имеем условие (M_0'):

$$\frac{n_0^{1/2}}{n_1\ln^2 n}\leqslant m_1\leqslant n_0^{1/2}n_1. \tag{20.11}$$

На основании тривиального аналога 7 работы К. Хооли [10] получаем:

$$\sum_{\substack{(M_0')\\ \Omega(m_1)\leqslant(\alpha/2)\ln\ln n}}\frac{1}{m}=B\,(\ln n)^{\gamma_{\alpha/2}-1+\alpha_5}, \tag{20.12}$$

где $\alpha_5=\alpha_5(\alpha_0,\ \alpha_2)\to 0$ вместе с α_0 и α_2, $\gamma_\alpha=\alpha-\alpha\ln\alpha$.

Теперь, суммируя по u, δ, находим:

$$\sum\frac{1}{u_1\delta}=B\sum_{u\leqslant d_3}\frac{\tau(u)}{u}=B\,(\ln n)^{\alpha_3}. \tag{20.13}$$

Таким образом, после суммирования (20.9) по $\delta\,|\,u$ получаем:

$$B\,\frac{n}{\ln n}\,(\ln n)^{\gamma_{\alpha/2}-1}\,(\ln n)^{\alpha_6}, \tag{20.14}$$

где $\alpha_6\to 0$ вместе с $\alpha_i\,(i\leqslant 5)$. Далее, $\sum_1=B\sum_2$. Таким образом,

$$\sum\nolimits_{D_1}=B\,\frac{n}{\ln n}\,(\ln n)^{\gamma_{\alpha/2}-1}\,(\ln n)^{\alpha_6}. \tag{20.15}$$

§ 21. Перейдем к оценке $\sum_{D_2}$. Имеем:

$$\sum\nolimits_{D_2}=\sum_{\substack{up'\leqslant n\\ \Omega(n-up')>\alpha\ln\ln n}}1\leqslant\sum\nolimits_4+\sum\nolimits_5, \tag{21.1}$$

где

$$\sum\nolimits_4 = \sum_{\substack{m<n \\ \Omega(m)>10\ln\ln n}} 1, \quad \sum\nolimits_5 = \sum_{\alpha\ln\ln n<\Omega(n-up')\leqslant 10\ln\ln n} 1. \qquad (21.2)$$

Первая сумма будет (см. [10])

$$B\frac{n}{\ln^2 n}(\ln n)^{\alpha_6}. \qquad (21.3)$$

Остается

$$\sum\nolimits_5 = \sum_{\substack{up'\leqslant n \\ \alpha\ln\ln n<\Omega(n-up')\leqslant 10\ln\ln n}} 1. \qquad (21.4)$$

Пусть R_n — множество чисел m, все простые множители которых меньше $n^{1/20\ln\ln n}$. Тогда (полагая $p''=up'$)

$$\sum\nolimits_5 \leqslant \sum_{\substack{m\in R_n \\ \Omega(m)\leqslant 10\ln\ln n}} 1 + \sum_{\substack{n-p''\bar{\in} R_n \\ \Omega(n-p'')>\alpha\ln\ln n}} 1. \qquad (21.5)$$

Первую из этих сумм обозначим через $\sum_6$, вторую — через $\sum_7$. Если $\Omega(m)<10\ln\ln n$ и $m\in R_n$, то $m\leqslant n^{1/2}$ и

$$\sum\nolimits_6 = O(n^{1/2}). \qquad (21.6)$$

Переходим к $\sum_7$. Здесь $n-p''\bar{\in} R_n$, $\Omega(n-p'')>\alpha\ln\ln n$. Имеем:

$$\begin{gathered} n-p''=rp''',\ p'''>n^{1/20\ln\ln n},\ \Omega(r)>\alpha\ln\ln n-1, \\ r<n^{1-1/20\ln\ln n}, \qquad p''' \text{ простое.} \end{gathered} \qquad (21.7)$$

Отсюда

$$\sum\nolimits_7 \leqslant \sum_{\substack{r\leqslant n^{1-1/20\ln\ln n} \\ \Omega(r)<\alpha\ln\ln n-1}} \sum_{\substack{p''<n \\ n-p''=rp'''}} 1. \qquad (21.8)$$

Теперь применим обобщение леммы П. Эрдеша, данное А. И. Виноградовым [11]. Согласно указанному обобщению, при $r<ne^{-\sqrt{\ln n}}$, $u<n^{\gamma_6}$

$$\sum_{n-up'=rp} 1 = B\frac{n(r,u)}{ru}\frac{(\ln\ln n)^3}{\ln^2(n/ru)} = B\frac{n(r,u)}{ru}\frac{(\ln\ln n)^3}{\ln^2 n}. \qquad (21.9)$$

Суммируя по u, найдем оценку

$$B\frac{n}{r}\frac{(\ln n)^{\alpha_7}}{\ln^2 n}. \qquad (21.10)$$

Отсюда находим (см. [10], лемма 7):

$$\sum\nolimits_7 = B\frac{n}{\ln^2 n}(\ln n)^{\alpha_7} \sum_{\substack{r\leqslant n \\ \Omega(r)>\alpha\ln\ln n-1}} \frac{1}{r} =$$

$$= B\frac{n}{\ln^2 n}(\ln n)^{\alpha_7}(\ln n)^{\gamma\alpha} = B\frac{n}{\ln n}(\ln n)^{\gamma\alpha-1}(\ln n)^{\alpha_7}. \qquad (21.11)$$

Таким образом,

$$\sum\nolimits_{D_2} = B\frac{n}{\ln n}(\ln n)^{\gamma_\alpha - 1}(\ln n)^{\alpha_7}. \qquad (21.12)$$

Сопоставляя с (20.15) и выбирая, как в [10], $\alpha = l/2$, так что $\gamma_{\alpha/2} = \gamma_\alpha = (1/2)\,e\ln 2$, находим

$$\sum\nolimits_{D} = B\frac{n}{\ln n}(\ln n)^{-\gamma}(\ln n)^{\alpha_8}, \qquad (21.13)$$

где

$$\gamma = 1 - \frac{e}{2}\ln 2 > 0,\ \alpha_8 = \max(\alpha_6,\ \alpha_7), \qquad (21.14)$$

§ **22.** Учитывая (19.18), получим из (17.11):

$$\sum\nolimits_{B}^{(+)} = B\frac{n}{\ln n}(\ln n)^{-\gamma/2}(\ln n)^{\alpha_9}, \qquad (22.1)$$

где $\alpha_9 = (\alpha_3 + \alpha_8)/2$. Присоединение (17.2) дает

$$\sum\nolimits_{B}^{(+)} = B\frac{n}{\ln n}(\ln n)^{-\gamma/2}(\ln n)^{\alpha_9}. \qquad (22.2)$$

Совершенно аналогично

$$\sum\nolimits_{B}^{(-)} = B\frac{n}{\ln n}(\ln n)^{-\gamma/2}(\ln n)^{\alpha_9}. \qquad (22.3)$$

Отсюда наконец получаем (15.1) и доказываем лемму 3.

§ **23.** Переходим к рассмотрению $\sum_C$, причем используем формулу (14.9). Для изучения $\sum_C$ будем пользоваться леммой, которую мы докажем в конце работы.

Пусть $X > X_0$. Рассмотрим сравнение

$$x_1x_2x_3x_4 \equiv l \pmod D \qquad (23.1)$$

при условиях:

$$(l,\ D) = 1,\ x_1x_2x_3x_4 \leqslant x,\ D \leqslant x^{1/2}\exp(-(\ln\ln x)^{200}). \qquad (23.2)$$

Лемма 5. *Число решений сравнения* (23.1) *при условиях* (23.2) *есть*

$$M_0(x,\ D) = \frac{1}{\varphi(D)}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_\rho}\frac{x^s}{s}(L(s,\ \chi_0))^4\,ds + B\frac{1}{\varphi(D)}\times$$
$$\times\exp(-(\ln\ln x)^{50}), \qquad (23.3)$$

где C_ρ — *кружок любого радиуса* $\rho < 1/2$ *вокруг точки* $s = 1$, *а* χ_0 — *главный характер по модулю* D.

Прежде всего нам нужно будет получить формулу для числа решений сравнения (23.1) при условии

$$(l,\ D) > 1 \qquad (23.4)$$

и при прежних остальных условиях (23. 2). С помощью формулы (23. 3) это делается на основе элементарных соображений.

Пусть

$$x_1x_2x_3x_4 \equiv l \pmod{D}, \; x_1x_2x_3x_4 \leqslant x, \; (l, \; D) = p^{\mu}. \tag{23. 5}$$

Введем обозначения:

$$\frac{l}{(l, \; D)} = l_1, \; \frac{D}{(l, \; D)} = D_1, \; (l_1, \; D_1) = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{x_1x_2x_3x_4}{(l, \; D)} \equiv l_1 \pmod{D_1}. \tag{23. 6}$$

При $(l, \; D) = p^{\mu} \; (\mu > 0)$ разбиваем четверки $(x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4)$ соответственно точной степени $p^{s_i} \| x_i$, так что $x_i = p^{s_i}x''_i$, $p \nmid x''_i$. Имеем из (23. 6):

$$p^{s_1+s_2+s_3+s_4-\mu}x''_1x''_2x''_3x''_4 \equiv l_1 \pmod{D_1}. \tag{23. 7}$$

Если теперь $p \mid D_1$, то непременно $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = \mu$, иначе $p \mid l_1$, $p \mid (l_1, \; D_1)$. Если $p \nmid D_1$, то сравнения (23. 7) возможны и при $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 - \mu = \beta > 0$. Пусть $p \nmid D_1$, рассмотрим сравнение

$$\begin{gathered} p^{\beta}x''_1x''_2x''_3x''_4 \equiv l_1 \pmod{D_1}, \\ \beta > 0, \; p^{\beta}x''_1x''_2x''_3x''_4 \leqslant x; \\ x''_1x''_2x''_4x''_4 \equiv l_1 \, p^{-\beta} \pmod{D_1} \end{gathered} \tag{23. 8}$$

($p^{-\beta}$ берется по $\operatorname{mod} D_1$ символически).

Полагая $l_1p^{-\beta} = l_2$, рассматриваем сравнение

$$x''_1x''_2x''_3x''_4 \equiv l_2 \pmod{D_1}, \; (l_2, \; D_1) = 1, \; (x''_i, \; p) = 1, \; x''_1 \ldots x''_4 \leqslant \frac{x}{p^{\beta}} = X.$$

Число решений этого сравнения

$$\begin{gathered} Ч\,(x''_1x''_2x''_3x''_4 \equiv l_2 \pmod{D_1}) = Ч\,(x_1x_2x_3x_4 \equiv l_2 \pmod{D_1}) - \\ = 4Ч\,(px_1x_2x_3x_4 \equiv l_2 \pmod{D_1}) + C_4^2Ч\,(p^2x_1x_2x_3x_4 \equiv l_2 \pmod{D_1}) - \\ - C_4^3Ч\,(p^3x_1x_2x_3x_4 \equiv l_2 \pmod{D_1}) + Ч\,(p^4x_1x_2x_3x_4 \equiv l_2 \pmod{D_1}). \end{gathered} \tag{23. 9}$$

Здесь область изменения переменных в левой части — сегмент $[1, \; x]$.

Для функций двух переменных $M(\xi, \; \eta)$ введем операторы $L_qM(\xi, \; \eta) = M(\xi q^{-1}, \; \eta q^{-1})$, вполне мультипликативные, т. е. удовлетворяющие условию $L_{q_1}L_{q_2} = {}_{q_1q_2}$, и рассмотрим кольцо таких операторов. Положим

$$\begin{gathered} M(X, \; l_2) = Ч\,(x_1x_2x_3x_4 \equiv l_2 \pmod{D_1}; \; x_1x_2x_3x_4 \leqslant X), \\ L_qM(X, \; l_2) = M(Xq^{-1}, \; l_2q^{-1}), \text{ где } q^{-1} \text{ берется } \operatorname{mod} D_1 \; (q_1, \; D_1) = 1. \end{gathered}$$

Тогда (23. 9) можно переписать так: $(1 - L_p)^4 M(X, \; l_2)$. Для сравнения (23. 8) роль X играет $Xp^{-\beta}$, роль $l_2 - l_1p^{-\beta} \pmod{D_1}$, так что для (23.8) число решений сравнения есть

$$(1-L_p)^4 M(Xp^{-\beta},\ l_1p^{-\beta}) = L_{p\beta}(1-L_p)^4 M(X,\ l_1). \tag{23.10}$$

Здесь $X = xp^{-\mu}$, $l_1 = lp^{-\mu}$ (не символически, а буквально).

Итак, для сравнения (23.7) число решений есть

$$L_{p\beta}(1-L_p)^4 M(X,\ l),\ \text{где}\ X = xp^{-\mu}.$$

При $p \nmid D_1$ (23.7) будет разрешимо для любого $\beta \geqslant 0$, а полное число решений сравнения (23.7) при любых s_1, s_2, s_3, s_4, таких, что $s_1+s_2+s_3+s_4 \geqslant \mu$, будет

$$\sum_{s_1+s_2+s_3+s_4\geqslant\mu} L_{p^{s_1+s_2+s_3+s_4-\mu}}(1-L_p)^4 M(X,\ l_1). \tag{23.11}$$

Это годится при $p \nmid D_1$. Если $p \mid D_1$, то $s_1+s_2+s_3+s_4 = \mu$ и имеем сравнение

$$x_1''x_2''x_3''x_4'' \equiv l_1 \pmod{D_1}.$$

Если $p \mid D_1$, то $p \nmid l_1$, и тогда из того, что $x_1x_2x_3x_4 \equiv l_1 \pmod{D_1}$, автоматически следует $p \nmid x_1x_2x_3x_4$, иначе $p \mid l_1$. Итак, тогда достаточно брать сравнение

$$x_1x_2x_3x_4 \equiv l_1 \pmod{D_1},\ x_1x_2x_3x_4 \leqslant xp^{-\mu} = X \tag{23.12}$$

с числом решений, равным $M(X,\ l_1)$, повторенному столько раз, сколько решений имеет уравнение $s_1+s_2+s_3+s_4 = \mu$.

Если $p \nmid D_1$, то сравнение (23.6)

$$\frac{x_1x_2x_3x_4}{(l,\ D)} \equiv l_1 \pmod{D_1}$$

имеет число решений (23.11), где $X = xp^{-\mu}$. Если $p \mid D_1$, то $s_1+s_2+s_3+s_4 = \mu$ и полным числом решений сравнения (23.7) для всех возможных случаев будет

$$\text{Ч}\,(s_1+s_2+s_3+s_4 = \mu)\cdot M(X,\ l_1).$$

Пусть теперь $(l,\ D) = p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}\ldots p_t^{\mu_t}$, $l_1 = l/(l,\ D)$, $D_1 = D/(l,\ D)$, при этом пусть $p_1 \nmid D_1, \ldots, p_{t_1} \nmid D_1$, $p_{t_1+1} \mid D_1, \ldots, p_t \mid D_1$.

Обозначим через $\mathscr{L}_{p,\mu}$ оператор

$$\mathscr{L}_{p,\mu} = \sum_{s_1+s_2+s_3+s_4-\mu} L_{p^{s_1+s_2+s_3+s_4-\mu}}(1-L_p)^4.$$

Тогда числом решений сравнения

$$\frac{x_1x_2x_3x_4}{(l,\ D)} \equiv l_1 \pmod{D_1},\ x_1x_2x_3x_4 \leqslant x,$$

будет

$$\mathscr{L}_{p_1,\mu_1}\mathscr{L}_{p_2,\mu_2}\ldots\mathscr{L}_{p_{t_1},\mu_{t_1}}\text{Ч}_4(\mu_{t_1})\ldots\text{Ч}_4(\mu_{t+1})\,M\left(\frac{x}{(l,\ D)},\ l_1\right), \tag{23.13}$$

где

$$Ч_4(\mu_i) = Ч(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = \mu_i).$$

§ **24.** Выражение $M(X, l_1)$ означало число решений сравнения

$$x_1x_2x_3x_4 \equiv l_1 \pmod{D_1}, \ (l_1, D_1) = 1, \ x_1x_2x_3x_4 \leqslant X.$$

Пусть нам желательно оценить $\sum\limits_{\substack{d \mid D_1 \\ d > d_0}} M\left(\frac{X}{d}, ld\right)$. Сперва пусть $d_0 > X^{\varepsilon_0}$. Тогда наша сумма равна

$$B(\varepsilon_0)\frac{X^{1+\varepsilon_0}}{D_1}\sum_{d>d_0}\frac{1}{d} = B(\varepsilon_0)\frac{X^{1+\varepsilon_0}}{D_1}\frac{D_1^{\varepsilon_0}}{X^{\varepsilon_0}} = B\frac{X}{D_1}X^{-\varepsilon_0/2}. \qquad (24.1)$$

Теперь пусть $d_0 \leqslant X^{\varepsilon_0}$, $D_1 \leqslant \sqrt{X}$. Согласно оценкам работы [4], числом решений сревнения $x_1x_2x_3x_4 \equiv l_1 \pmod{D_1}$, $x_1x_2x_3x_4 \leqslant X/d$ будет $B(X/D_1d)(\ln X)^8$, а наша сумма будет иметь оценку

$$B\frac{X}{D_1}(\ln X)^8\sum_{\substack{d>d_0 \\ d \mid D_1}}\frac{1}{d}. \qquad (24.2)$$

Будем считать сперва $\mu(D_1) \neq 0$; тогда (24. 2) только увеличится, если заменить $d \mid D_1$ на делители числа $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p_\nu$, где ν — число простых делителей D_1; здесь $\sum\limits_{p \leqslant p_\nu} \ln p \sim \ln D_1$, $p_\nu = B \ln D_1$. Пусть $d_0 = \exp(\ln\ln X)^3$; числа d можно считать имеющими простые множители $B \ln D_1$, т. е. не превосходящими d_0^α, где $\alpha = a_0/(\ln\ln X)^2$. Количество таких чисел между d_0 и $2d_0$ будет равно (см. [7]) $Bd_0 \exp(-(1/\alpha)\ln(1/\alpha)) = Bd_0 \exp\left(-\frac{(\ln\ln X)^2}{a_0}\ln\ln\ln X\right) = Bd_0 \exp(-4(\ln\ln X)^2)$; значит, $\sum\limits_{d_0 \leqslant d \leqslant 2d_0}(1/d)$ для таких чисел будет $B\exp(-2(\ln\ln X)^2)$; для остальных участков вида $[2^u d_0, 2^{u+1}d_0]$ сумма будет не больше $B\exp(-(3/2)(\ln\ln X)^2)$. Таким образом, при $d_0 \geqslant \exp(\ln\ln X)^3$ сумма (24. 2) не превосходит

$$B\frac{X}{D_1}\exp(-(\ln\ln X)^2). \qquad (24.3)$$

Мы разобрали случай $\mu(D_1) \neq 0$. Если есть кратные простые делители, то положим $d = d_1d_2$, где d_2 содержит только кратные простые делители (со степенями $\geqslant 2$). Их разобъем на такие, где $d_2 > d_0^{0.1}$ и $d_2 < d_0^{0.1}$. Для вторых можем действовать, как и ранее, с той же оценкой (24. 3). Для первых получим $B(x/D_1) \times (\ln X)^8 (1/d_0^{0.1})(\ln X) = B(X/D_1)\exp(-(\ln\ln X)^2)$, суммируя непосредственно по d_2. Итак, оценка (24. 3) доказана.

Она позволяет отбрасывать некоторые числа при вычислении (23. 13).

§ **25.** Вернемся к формуле (23.3) Числом решений сравнения

$$x_1x_2x_3x_4 \equiv l \pmod D), \ (l, \ D)=1, \ x_1x_2x_3x_4 \leqslant x,$$

$$D \leqslant x^{1/2} \exp(-(\ln\ln x)^{200}) \tag{25.1}$$

будет

$$M_0(x, \ D) = \frac{1}{2\pi i \varphi(D)} \oint\limits_{C_\rho} \frac{x^s}{s} (L(s, \ \chi_0))^4 \, ds + B\frac{x}{\varphi(D)} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln X)^{50}\right). \tag{25.2}$$

Пусть

$$D \leqslant x^{1/2} \exp(-2(\ln\ln x)^{200}), \tag{25.3}$$

$$q \leqslant \exp(\ln\ln x)^4, \quad (q, \ D)=1. \tag{25.4}$$

Рассмотрим действие оператора L_q на $M(x, l)$ (D опущено). Условие типа (25.3) имеет место, и

$$L_qM(x, \ l) = L_qM_0(x, \ D) = \frac{1}{2\pi i \varphi(D)} \oint\limits_{C_\rho} \left(\frac{x}{q}\right)^s \frac{1}{s} (L(s, \ \chi_0))^4 \, ds +$$

$$+ B\frac{x}{q\varphi(D)} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln x)^{50}\right). \tag{25.5}$$

Например, при $p^4 \leqslant \exp(\ln\ln x)^4$

$$(1-L_p)^4 M_0(x, \ D) = \frac{1}{2\pi i \varphi(D)} \oint\limits_{C_\rho} x^s \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^4 \frac{1}{s} (L(s, \ \chi_0))^4 \, ds +$$

$$+ B\frac{x}{\varphi(D)} \exp(-(\ln\ln x)^{50}). \tag{25.6}$$

§ **26.** Перейдем к оценке $\sum_C$, причем будем опираться на формулу (14.9). Оба участвующие там сравнения,

$$q_1q_2q_3q_4x_1x_2x_3x_4 \equiv n-\lambda \pmod{4\lambda}, \tag{26.1}$$

$$q_1q_2q_3q_4x_1x_2x_3x_4 \equiv n+\lambda \pmod{4\lambda}, \tag{26.2}$$

будем рассматривать параллельно. Обозначим: $q_1 \ldots q_4 = Q$. Как поясняется в § 14, особое значение имеет $(Q, \ 4\lambda) = (Q, \ \lambda)$, ($q_i$, x_i нечетные). Пусть

$$\frac{Q}{(Q, \ 4\lambda)} = \frac{Q}{(Q, \ \lambda)} = Q_0.$$

Сравнения $n-\lambda \equiv 0 \pmod{(Q, \ \lambda)}$ и $n+\lambda \equiv 0 \pmod{(Q, \ \lambda)}$ выполняются или не выполняются одновременно. Пусть они выполняются.

Имеем сравнения

$$Q_0x_1 \ldots x_4 \equiv \frac{n-\lambda}{(Q, \ \lambda)} \pmod{4\lambda_1} \tag{26.3}$$

и

$$Q_0 x_1 \ldots x_4 \equiv \frac{n+\lambda}{(Q,\,\lambda)} \pmod{4\lambda_1}. \tag{26.4}$$

Здесь $n-\lambda$ и $n+\lambda$ нечетные (ибо таково $Q_0 x_1 \ldots x_4$). Далее, $\lambda_1 = \lambda/(Q,\,\lambda)$ и $(Q_0,\,4\lambda_2)=1$. Вводя $Q_0^{-1} \pmod{4\lambda_1}$, приходим к сравнениям:

$$x_1 \ldots x_4 \equiv Q_0^{-1} \frac{n-\lambda}{(Q,\,\lambda)} \pmod{4\lambda_1}, \tag{26.5}$$

$$x_1 \ldots x_4 \equiv Q_0^{-1} \frac{n+\lambda}{(Q,\,\lambda)} \pmod{4\lambda_1}. \tag{26.6}$$

Как мы видели в § 24, при решении сравнения $x_1 \ldots x_4 \equiv l_1 \pmod{D_1}$ важны общий наибольший делитель $(l_1,\,D_1)$ и те его простые множители, которые делят D_1. Докажем, что

$$\left(Q_0^{-1}\frac{n-\lambda}{(Q,\,\lambda)},\ 4\lambda_1\right) = \left(Q_0^{-1}\frac{n+\lambda}{(Q,\,\lambda)},\ 4\lambda_1\right).$$

Прежде всего $(Q_0^{-1},\,4\lambda_1)=1$, так что речь идет о $((n-\lambda)/(Q,\,l),\,4\lambda_1)$ и $((n+\lambda)/(Q,\,\lambda),\,4\lambda_1)$. Далее, $n\pm\lambda$ нечетны, так что вопрос сводится к рассмотрению

$$\left(\frac{n-\lambda}{(Q,\,\lambda)},\ \lambda_1\right) \text{ и } \left(\frac{n+\lambda}{(Q,\,\lambda)},\ \lambda_1\right).$$

Так как $\lambda_1 = \lambda/(Q,\,\lambda)$, то легко можно убедиться, что написанные выражения совпадают. Сравнения (26.5) и (26.6) можно записать в виде

$$x_1 \ldots x_4 \equiv l_1 \pmod{4\lambda_1} \tag{26.7}$$

и

$$x_1 \ldots x_4 \equiv l_1' \pmod{4\lambda_1}, \tag{26.8}$$

где l_1 и l_1' нечетные и $(l_1,\,4\lambda_1)=(l_1',\,4\lambda_1)$. Далее, в обоих сравнениях должно быть

$$x_1 \ldots x_4 \leqslant \frac{n-\lambda\sqrt{n}\,n_1}{(Q,\,\lambda)\,Q_0}. \tag{26.9}$$

Обратимся теперь к § 23 и 24, где рассматривается решение нужных нам сравнений. Мы видим, что существенным является $(l_1,\,D_1)$. Пусть

$$(l_1,\,4\lambda_1) = (l_1',\,4\lambda_1) = p_1^{\mu_1} \ldots p_1^{\mu_t};$$

$$p_{\alpha_1} \nmid \frac{\lambda_1}{(l_1,\,4\lambda_1)},\ \ldots,\ p_{\alpha_{t_1}} \nmid \frac{\lambda_1}{(l_1,\,4\lambda_1)}\ \ ((l_1,\,4\lambda_1) \text{ нечетно}),\ \ p_j \,\Big|\, \frac{\lambda_1}{(l_1,\,4\lambda_1)}\ \ (j \neq \alpha_i).$$

Пусть $x_\lambda = (n-\lambda\sqrt{n}\,n_1)/(Q,\,\lambda)\,Q_0$. Для (26.7) числом решений сравнения будет

$$\mathscr{L}_{p_{\alpha_1},\,\mu_{\alpha_1}} \ldots \mathscr{L}_{p_{\alpha_{t_1}},\,\mu_{\alpha_{t_1}}} \prod_{j\neq\alpha_i} \text{ч}_4(\mu_j)\, M\left(\frac{x_\lambda}{(l_1,4\lambda_1)},\ \frac{l_1}{(l_1,\,4\lambda_1)}\right). \tag{26.10}$$

Для сравнения (26.8) число решений есть

$$\mathscr{L}_{p_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_1}} \ldots \mathscr{L}_{p_{\alpha_{t_1}}, \mu_{\alpha_{t_1}}} \prod_{j \neq \alpha_i} Ч_4(\mu_j) M\left(\frac{x_\lambda}{(l_1', 4\lambda_1)}, \frac{l_1'}{(l_1', 4\lambda_1)}\right). \quad (26.11)$$

Обозначим далее

$$\frac{x_\lambda}{(l_1, 4\lambda_1)} = \frac{x_\lambda}{(l_1', 4\lambda_1)} = x_{\lambda\lambda}. \quad (26.12)$$

Имеем

$$\lambda \leqslant \sqrt{n}\, n_1^{-1} < \sqrt{n} \exp(-(\ln n)^{\alpha_1}),$$

где

$$\alpha_1 > 0, \ \alpha_1 > 10\alpha_0, \ Q < \exp(\ln n)^{\alpha_0}.$$

Далее,

$$x_\lambda = \frac{n - \lambda\sqrt{n}\, n_1}{(Q, \lambda)} > n \exp(-2(\ln n)^{\alpha_0}), \quad \lambda < \sqrt{x_\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln n)^{\alpha_1}\right). \quad (26.13)$$

Наш модуль есть

$$\lambda' = \frac{4\lambda_1}{(l_1, 4\lambda_1)}.$$

При этом если $\lambda_1 < \sqrt{x_\lambda} \exp(-1/2(\ln n)^{\alpha_1})$, то при всяком $\mu \geqslant 1$

$$\frac{\lambda'}{\mu} < \frac{\sqrt{x_\lambda}}{\mu} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln n)^{\alpha_1}\right) < \sqrt{\frac{x_\lambda}{\mu}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln n)^{\alpha_1}\right),$$

т. е. условие для модуля λ' по отношению к длине отрезка прогрессии $x_{\lambda\lambda}$ выполняется «с запасом». (26.10) и (26.11) перепишутся так:

$$\mathscr{L}_{p_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_1}} \ldots \mathscr{L}_{p_{\alpha_{t_1}}, \mu_{\alpha_{t_1}}} Ч_4(\mu_{t_1+1}) \ldots Ч_4(\mu_{t+1}) M(x_{\lambda\lambda}, l_2), \quad (26.14)$$

$$\mathscr{L}_{p_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_1}} \ldots \mathscr{L}_{p_{\alpha_{t_1}}, \mu_{\alpha_{t_1}}} Ч_4(\mu_{t_1+1}) \ldots Ч_4(\mu_{t+1}) M(x_{\lambda\lambda}, l_2'). \quad (26.15)$$

Формулы § 23—25 будут здесь применимы. Далее, так как $\lambda < \sqrt{n}\, n_1$, то

$$x_{\lambda\lambda} > n^{1/2-\eta}, \quad \eta < 0.001.$$

При применении операторов из (26.14) и (26.15), согласно § 23, можем остановиться на произведениях индексов L_{p^μ}, дающих L_q для $q \leqslant \exp(\ln\ln x)^3$, с погрешностью

$$B\frac{x_{\lambda\lambda}}{4\lambda'} \exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^2\right). \quad (26.16)$$

Поясним эту возможность. При операторах L_q будут стоять коэффициенты, наблюдаемые из (26.14) и (26.15); эти коэффициенты нужно учесть в оценках § 24. Рассматривая формулу (23.13), видим, что $\mathscr{L}_{p_{\alpha_i}, \mu_{\alpha_i}}$ отвечает степеням простого числа p^β; таким степеням отвечает коэффициент B_{β^4}. Воспроизводя рассуждения § 24, замечаем, что ряд $\sum\limits_{\beta\geqslant 2}\beta^4 p^{-\beta}=Bp^{-2}$ и что ряд

$$\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_r)\\ p_{i_1},\ldots,p_{i_r}>d_2}}\prod_j\sum_{\beta\geqslant 2}\frac{\beta^4}{p^{\beta}_{ij}}=\sum_{n>d_2}\frac{(\tau(n))^{\alpha_1}}{n^2}=B\frac{\ln^{\alpha_2}d_2}{d_2}.$$

Если же число q — индекс L_q — не имеет квадратных множителей, то при нем будет стоять коэффициент $\prod\limits_{p\,|\,q}4$, мажорируемый $(\tau(q))^5(\tau(\lambda'))^{\alpha_2}$. Дабы получить оценки того же типа, что в § 24, надо иметь соответствующее видоизменение леммы А. И. Виноградова из работы [7]. Заметим, что если надо подсчитать количество некоторых чисел $a\in[d_0,\ 2d_0]$ и при них стоят множители $(\tau(a))^5$, то имеем

$$\sum_{\substack{d_0\leqslant a\leqslant 2d_0\\(a)}}(\tau(a))^5\leqslant\left(\sum_{n=d_0}^{2d_0}(\tau(n))^{10}\right)^{1/2}\left(\sum_{\substack{d_0\leqslant a\leqslant 2d_0\\(a)}}1\right)^{1/2}=$$

$$=Bd^{1/2}(\ln d_0)^{\alpha_2}d_0^{1/2}(\psi(d_0))^{-1/2},$$

где $\psi(d_0)$ — понижение, получающееся при сравнении $\sum\limits_{\substack{d_0\leqslant a\leqslant 2d_0\\(a)}}1$ с d_0.

Так как это понижение много больше $(\ln d_0)^{\alpha_2}$, то наши рассуждения проходят и операторы L_q с $q>\exp(\ln\ln n)^3$ вносят относительную погрешность

$$B\exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^2\right).$$

§ 27. Теперь обратимся к составлению разности асимптотических выражений для числа решений сравнений (26.10) и (26.11). В силу сказанного выше о наших операторах они примут вид $(l_2=l_1/(l_1,\ 4\lambda_1),\ l_2'=l_1'/(l_1',\ 4\lambda_1))$

$$\sum_{q\leqslant\exp(\ln\ln n)^3}a(q)\,L_qM(x_{\lambda\lambda},\ l_2)+B\frac{x_{\lambda\lambda}}{4\lambda'}\exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^2\right),\qquad(27.1)$$

$$\sum_{q\leqslant\exp(\ln\ln n)^3}a(q)\,L_qM(x_{\lambda\lambda},\ l_2')+B\frac{x_{\lambda\lambda}}{4\lambda'}\exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^3\right)\qquad(27.2)$$

при данной комбинации $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{t_1})$ (см. § 26). Здесь $a(q)=B(\tau(q))^{\alpha_2}(\tau(\lambda'))^{\alpha_2}$. Отличие здесь лишь в значениях l_2 и l_2'; оба они взаимно-просты с модулем $4\lambda'$. Соответствующие сравнения

$$x_1x_2x_3x_4\equiv l_2\ (\mathrm{mod}\,4\lambda'),\quad x_1x_2x_3x_4\equiv l_2'\ (\mathrm{mod}\,4\lambda'),\quad (l_2l_2',\ 4\lambda')=1$$

автоматически требуют нечетности $x_1x_2x_3x_4$; стало быть, годны выведенные ранее формулы. Имеем далее (см. (25.5)):

$$L_q M\ (x_{\lambda\lambda},\ l_2) = \frac{1}{2\pi i\varphi\,(4\lambda')}\oint\limits_{C_\rho}\left(\frac{x_{\lambda\lambda}}{q}\right)^s \frac{1}{s}\,(L\,(s,\ \chi_0))^4\,ds +$$

$$+ B\frac{x_{\lambda\lambda}}{q\varphi\,(4\lambda')}\exp\left(-\frac{1}{2}\,(\ln\ln x_{\lambda\lambda})^{50}\right). \qquad (27.3)$$

Такая же формула имеет место для $L_q M\,(x_{\lambda\lambda},\ l_2')$. Разность соответствующих формул дает

$$B\,\frac{x_{\lambda\lambda}}{q\varphi\,(4\lambda')}\exp\left(-\frac{1}{2}\,(\ln\ln x_{\lambda\lambda})^{50}\right). \qquad (27.4)$$

Суммируя по q с коэффициентом $a\,(q)$, найдем:

$$\sum_{q\leqslant\exp\,(\ln\ln n)^3}\frac{a\,(q)}{q} = B\,(\ln\ln n)^{3a_3}\,(\tau\,(\lambda'))^{a_2} = B\,\ln n\,(\tau\,(\lambda'))^{a_2}.$$

Таким образом, если учесть (27.1) и (27.2), разностью чисел решений для сравнений (26.7) и (26.8) будет

$$B\,\frac{x_{\lambda\lambda}}{4\lambda'}\exp\left(-\frac{1}{8}\,(\ln\ln n)^2\right)(\tau\,(\lambda'))^{a_2}. \qquad (27.5)$$

§ 28. Вернемся теперь к формуле (14.9). При заданном λ, $q_1\ldots q_4 = Q$ имеем из (27.5) оценку для внутренних скобок в (14.9):

$$B\exp\left(-\frac{1}{8}\,(\ln\ln n)^2\right)\frac{1}{\lambda'}\,x_{\lambda\lambda}\,(\tau\,(\lambda'))^{a_2}. \qquad (28.1)$$

Здесь

$$x_{\lambda\lambda} = B\,\frac{n}{(Q,\ \lambda)\,Q_0\,((n-\lambda)/(Q,\ \lambda),\ \lambda/(Q,\ \lambda))},\qquad Q_0 = \frac{Q}{(Q,\ \lambda)},$$

$$\lambda' = \frac{\lambda}{(Q,\ \lambda)\,((n-\lambda)/(Q,\ \lambda),\ \lambda/(Q,\ \lambda))} > a_4\,\frac{\lambda}{(n-\lambda,\ \lambda)}, \qquad (28.2)$$

$$x_{\lambda\lambda} = B\,\frac{n}{(n-\lambda,\ \lambda)\,Q_0}. \qquad (28.3)$$

Отсюда

$$\frac{x_{\lambda\lambda}}{\lambda'} = B\,\frac{n}{Q_0\lambda} = Bn\,\frac{(Q,\ \lambda)}{Q\lambda}. \qquad (28.4)$$

Надо теперь просуммировать выражение

$$n\sum_{\substack{\lambda\leqslant\sqrt{n}\\ Q=q_1q_2q_3q_4\leqslant\exp\,(\ln n)^{\alpha_0}}}\frac{(Q,\ \lambda)}{Q\lambda}\,(\tau\,(\lambda))^{a_3} = Bn\sum_{\substack{\lambda\leqslant\sqrt{n}\\ Q\leqslant\exp\,(\ln n)^{\alpha_0}}}\frac{\tau_4\,(Q)\,(Q,\ \lambda)}{Q\lambda}\,(\tau\,(\lambda))^{a_4} =$$

$$= Bn\,(\tau\,(\delta))^{a_5}\,(\tau\,(\lambda_1))^{a_6}\sum_{(Q)}\frac{\tau_4\,(Q)}{Q}\sum_{\substack{\delta\,|\,Q\\ \lambda_1\leqslant\sqrt{n}}}\frac{\delta}{\delta\lambda_1}\,(\tau\,(\delta))^{a_5}\,(\tau\,(\lambda_1))^{a_6} =^{4)}$$

$$= Bn\,(\ln n)^{a_7}\sum_{(Q)}\frac{\tau_4\,(Q)}{Q}\sum_{\delta\,|\,Q}(\tau\,(\delta))^{a_7} = Bn\ln n\sum_{(Q)}\frac{\tau_4\,(Q)\,(\tau\,(Q))^{a_8}}{Q} = Bn\,(\ln n)^{a_5}.$$

---

4) Если учесть суммирование по $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{t_1})$.

Используя (28.1), найдем оценку

$$Bn\exp\left(-\frac{1}{16}(\ln\ln n)^2\right). \tag{28.5}$$

Итак, сумма (14.9) — третья сумма в (14.5), имеет оценку

$$\left|\sum\nolimits_C\right| = Bn\exp\left(-\frac{1}{16}(\ln\ln n)^2\right). \tag{28.6}$$

§ 29. Остается изучить сумму $\sum_A$ (см. (14.6)). Разобьем $\sum_A$ на две части:

$$\sum\nolimits_A = \sum\nolimits_{A_1} + \sum\nolimits_{A_2}, \tag{29.1}$$

где

$$\sum\nolimits_{A_1} = 4\sum_{q_1\ldots q_4\leqslant d_0}\mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4)\times$$
$$\times\sum_{\rho\leqslant r_0}\chi_4(\rho)\sum_{n-q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\rho)}1 \tag{29.2}$$

при

$$r_0 = \exp(\ln\ln n)^4 \tag{29.3}$$

(см. (11.2)) и

$$\sum\nolimits_{A_2} = 4\sum_{q_1\ldots q_4\leqslant d_0}\;\sum_{r_0<\rho<\sqrt{n}\,n_1^{-1}}\chi_4(\rho)\sum_{n-q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\rho)}1. \tag{29.4}$$

В обеих суммах $q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4\leqslant n$.

Дадим оценку суммы $\sum_{A_2}$. При данном $Q=q_1q_2q_3q_4$ (Q берется с соответствующим числом повторений) будем оценивать

$$\sum_{r_0<\rho\leqslant\sqrt{n}/n_1}\chi_4(\rho)\sum_{\substack{n-Qx_1\ldots x_4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\rho)\\ Qx_1\ldots x_4\leqslant n}}1. \tag{29.5}$$

Рассмотрим (Q,ρ) и его роль в сравнении

$$n - Qx_1x_2x_3x_4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\rho). \tag{29.6}$$

Очевидно, $(Q,\rho)\,|\,n$. Введем обозначения:

$$\frac{n}{(Q,\rho)} = n_1,\quad \frac{Q}{(Q,\rho)} = Q_1,\quad \frac{\rho}{(Q,\rho)} = \rho_1. \tag{29.7}$$

Тогда сравнение (29.6) равносильно сравнениям

$$n - Q_1x_1x_2x_3x_4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\rho_1),\quad Q_1x_1\ldots x_4\equiv n_1\,(\mathrm{mod}\,\rho_1), \tag{29.8}$$

где

$$Q_1x_1x_2x_3x_4\leqslant n_1. \tag{29.9}$$

Здесь

$$(Q_1,\rho_1) = 1. \tag{29.10}$$

Имеем:

$$\frac{x_1x_2x_3x_4}{(n_1,\ \rho_1)} \equiv \frac{n_1}{(n_1,\ \rho_1)}\, Q_1^{-1}\left(\mathrm{mod}\, \frac{\rho_1}{(n_1,\ \rho_1)}\right). \tag{29.11}$$

Введем обозначения:

$$\frac{n_1}{(n_1,\ \rho_1)} = n_2, \quad \frac{\rho_1}{(n_1,\ \rho_1)} = \rho_2, \quad (n_2,\ \rho_2) = 1. \tag{29.12}$$

Тогда

$$\frac{x_1x_2x_3x_4}{(n_1,\ \rho_1)} \equiv n_2Q_1^{-1}\ (\mathrm{mod}\ \rho_2), \tag{29.13}$$

$$x_1x_2x_3x_4 \leqslant \frac{n_1}{Q_1\,(n_1,\ \rho_1)} = \frac{n_2}{Q_1}, \tag{29.14}$$

так что

$$\frac{x_1x_2x_3x_4}{(n_1,\ \rho_1)} \equiv n_2Q_1^{-1}\ (\mathrm{mod}\ \rho_2). \tag{29.15}$$

Согласно (23.13), число решений сравнения (29.15) будет вычисляться так. Пусть $(n_1,\ \rho_1) = p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}\ \ldots\ p_t^{\mu_t}$, $p_{\alpha_1} \nmid \rho_2, \ldots, p_{\alpha_{t_1}} \nmid \rho_2$, $p_j \mid \rho_2\ (j \neq \alpha_i)$. Положим $\prod\limits_{j\neq\alpha_i} p_j = \prod_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}}$. Наше число решений есть

$$\mathscr{L}_{p_{\alpha_1},\ \mu_{\alpha_1}} \ldots \mathscr{L}_{p_{\alpha_{t_1}},\ \mu_{\alpha_{t_1}}} \prod_{j\neq\alpha_i} \text{Ч}_4(\mu_j)\, M\left(\frac{n_2}{Q_1},\ \frac{n_2}{Q_1}\right). \tag{29.16}$$

Так как ρ_2 нечетно (иначе $\chi_4(\rho) = 0$), то ввиду нечетности x_i в (29.16) нужно внести оператор $(1 - L_2)^4$. Далее,

$$L_mM\left(\frac{n_2}{Q_1},\ \frac{n_2}{Q_1}\right) = \frac{1}{2\pi i\varphi(\rho_2)} \oint_{C_\rho} \left(\frac{n_2}{mQ_1}\right)^s \frac{1}{s}\,(L\,(s,\ \chi_0))^4\, ds + $$
$$+ B\,\frac{n_2}{mQ_1\varphi(\rho_2)} \exp\left(-\frac{1}{2}\,(\ln\ln n)^{50}\right), \tag{29.17}$$

где χ_0 берется по модулю ρ_2, $\rho_2 \equiv 0\left(\mathrm{mod} \prod_{\alpha_1 \ldots \alpha_{t_1}}\right)$.

Как мы видели ранее, мы можем считать $m \leqslant \exp(\ln\ln n)^3$ с погрешностью

$$B\,\frac{n_2}{Q_1\rho_2} \exp\left(-\frac{1}{4}\,(\ln\ln n)^2\right). \tag{29.18}$$

При заданном Q пусть ρ пробегает нечетные числа сегмента $[\rho_0,\ \sqrt{n}\, n_1^{-1}]$ с заданным значением (Q,ρ). По этому значению определяются

$$\frac{n}{(Q,\ \rho)} = n_1, \quad \frac{Q}{(Q,\ \rho)} = Q_1, \quad \frac{\rho}{(Q,\ \rho)} = \rho_1, \tag{29.19}$$

$(n_1,\ \rho_1) = p_1^{\mu_1}\ \ldots\ p_t^{\mu_t}$ и разбиения на $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{t_1})$.

Таким образом, при заданном (Q, ρ) m состоит только из простых чисел, делящих $(n_1, \rho_1)=(n/(Q, \rho), \rho/(Q, \rho))$. Поэтому целесообразно наряду с (Q, ρ) фиксировать и (n_1, ρ_1), т. е. рассматривать ρ такие, что $(Q, \rho)=Q_\rho$ задано, $(n_1, \rho_1)=n_\rho$ задано.

Пусть это так, тогда m состоит из простых чисел, делящих (n_1, ρ_1); $n_2=n/(Q, \rho)(n_1, \rho_1)$; $Q_1=Q/(Q, \rho)$ постоянно; в первом члене (29.17) меняется только $(\chi_4(\rho)/\varphi(\rho_2))(L(s, \chi_0))^4$ при $|s-1|\leqslant\rho_0$, причем $\rho_2\equiv 0\left(\bmod \prod_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}}\right)$, $p_j \nmid \rho_2$ $(j\neq\alpha_i)$. Далее,

$$L(s, \chi_0)=\zeta(s)\prod_{p\mid\rho_2}(1-p^{-s}), \quad (L(s, \chi_0))^4=(\zeta(s))^4\prod_{p\mid\rho_2}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^4.$$

Итак, мы должны суммировать по ρ; (Q, ρ) задано, $(n/(Q, \rho), \rho/(Q, \rho))$ задано и указаны условия для ρ_2 — выражение

$$\frac{\chi_4(\rho)}{\varphi\left(\frac{\rho}{(Q, \rho)(n/(Q, \rho), \rho/(Q, \rho))}\right)}\prod_{p\mid\frac{\rho}{(Q,\rho)(n/(Q,\rho),\rho(Q,\rho))}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^4. \quad (29.20)$$

Но

$$(Q, \rho)\left(\frac{n}{(Q, \rho)}, \frac{\rho}{(Q, \rho)}\right)=(n, \rho), \quad (29.21)$$

так что (29.20) дает:

$$\frac{\chi_4(\rho)}{\varphi(\rho/(n, \rho))}\prod_{p\mid\rho/(n,\rho)}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^4=\frac{\chi_4(\rho)}{\rho}(n, \rho)\prod_{p\mid\rho/(n,\rho)}\frac{(1-p^{-s})^4}{1-p^{-1}}=$$

$$=\frac{\chi_4(\rho)}{\rho}(n, \rho)\prod_{p\mid\rho/(n,\rho)}\frac{(1-1/p^s)^4}{1-1/p}. \quad (29.22)$$

Если (Q, ρ) задано и $(n/(Q, \rho), \rho/(Q, \rho))$ задано, то и их произведение (n, ρ) задано.

§ 30. Пусть сначала $(Q, \rho)=1$, $(n, \rho)=1$, $(\rho, Qn)=1$, $m=1$. Имеем сумму членов при $s\in C_{\rho_0}$, $\rho_0=1/\ln n$ (дополнительных условий для ρ_2 нет):

$$\sum_{\substack{\rho\geqslant r_0;\ (\rho)\\ (\rho, Qn)=1}}\frac{\chi_4(\rho)}{\rho}\prod_{p\mid\rho}\frac{(1-p^{-s})^4}{1-p^{-1}}. \quad (30.1)$$

Это есть отрезок ряда, производимый рядом

$$\prod_{p\nmid Qn}\left(1+\left(\frac{\chi_4(p)}{p^z}+\frac{\chi_4(p^2)}{p^{2z}}+\ldots\right)\frac{(1-p^{-s})^4}{1-p^{-1}}\right). \quad (30.2)$$

Для расчета суммы (30.1) обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_n$ простые числа, делящие Qn, и будем брать

$$\sum_{r_0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{n}\,n_1^{-1}}\frac{\chi_4(\rho)}{\rho}\prod_{p\mid\rho}\frac{(1-p^{-s})^4}{1-p^{-1}}-\sum_{r_0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{n}\,n_1^{-1}}\frac{\chi_4(\rho p_1)}{\rho p_1}\prod_{p\mid\rho}\frac{(1-p^{-s})^4}{1-p^{-1}}\ldots, \quad (30.3)$$

т. е. будем осуществлять элементарное решето.

Мы докажем далее, что

$$\sum_{M\leqslant\rho\leqslant\sqrt{n}\,n_1^{-1}} \frac{\chi_4(\rho)}{\rho} \prod_{p\mid\rho} \frac{(1-p^{-s})^4}{1-p^{-1}} = BM^{-0.01}. \tag{30.4}$$

Если $p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}\ldots p_{\alpha_s} < r_0^{1/2}$, то соответствующие члены (30.3) дают оценку согласно (30.4): $Br_0^{-0.001}(1/p_{\alpha_1}\ldots p_{\alpha_s})$; если же $p_{\alpha_1}\ldots p_{\alpha_s} > \exp(1/2)(\ln\ln n)^4$, то те же члены оценятся как $B(1/p_{\alpha_1}\ldots p_{\alpha_s})$. Сумма последних членов, делящих Qn и больших $\exp(1/2)(\ln\ln n)^4 = r_0^{1/2}$, дает $B\exp(-(1/2)(\ln\ln n)^2)$, а предыдущие члены дадут в сумме $Br_0^{-0.0005}$; итак, суммой будет $B\exp(-(1/2)(\ln\ln n)^2)$. Оценка (30.4) легко следует из того, что

$$\prod_p \left(1+\left(\frac{\chi_4(p)}{p^z}+\frac{\chi_4(p^2)}{p^{2z}}+\ldots\right)\frac{(1-p^{-s})^4}{1-p^{-1}}\right) = U(z)\,L(z,\chi_4),$$

где $U(z)$ регулярна и ограничена сверху и снизу в полосе $\sigma > 0.9$. Итак, для случая $(\rho, Qn)=1$ сумма (30.1) имеет оценку

$$B\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln n)^2\right). \tag{30.5}$$

Пусть теперь $(Q,\rho)=Q_0$ задано, $(Q,\rho)\mid n$; далее, пусть $(n/(Q,\rho), \rho/(Q,\rho))=\delta_1$ задано. Имеем:

$$\rho=\rho_1(Q,\rho),\quad (\rho_1, Q/(Q,\rho))=1, \tag{30.6}$$

$$\rho_1=\rho_2\delta_1,\quad (\rho_2, n/(Q,\rho)\,\delta_1)=1. \tag{30.7}$$

Итак,

$$\left(\rho_2, \frac{Q}{(Q,\rho)}\,\frac{n}{(Q,\rho)\,\delta_1}\right)=1 \tag{30.8}$$

(для ρ_2 предполагаются выполненными указанные ранее условия).

Обратим внимание на член $(n_2/mQ_1)^s$ в формуле (29.17). Имеем:

$$Q_1=\frac{Q}{(Q,\rho)},\quad n_2=\frac{n_1}{(n_1,\rho_1)}=\frac{n_1}{(n/(Q,\rho),\ \rho/(Q,\rho))}=$$

$$=\frac{n}{(Q,\rho)\,(n/(Q,\rho),\ \rho/(Q,\rho))}=\frac{n}{(n,\rho)},\quad \frac{n_2}{mQ_1}=\frac{n}{(n,\rho)\,mQ_1}. \tag{30.9}$$

Так как на C_ρ $Rs=1+B/\ln n$, то этот член вносит в сумму множитель $B(n/(n,\rho)\,mQ_1)$. Это надо учесть при суммировании (29.22). В этом суммировании будем разбивать члены так: $(n,\rho) > \exp(1/2)(\ln\ln n)^4$ и $(n,\rho)\leqslant\exp(1/2)(\ln\ln n)^4$. В первом случае рассмотрим сумму ряда (29.22) при $r_0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{n}\,n_1^{-1}$. Здесь будет выделяться член

$$\frac{(n,\rho)}{(n,\rho)^s}\sum\frac{\chi_4(\rho)}{\rho}\prod_{p\mid\rho/(n,\rho)}\frac{(1-p^{-s})^4}{1-p^{-1}}; \tag{30.10}$$

в нем $r_0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{n}\, n_1^{-1}$, $\rho > (n, \rho) = (Q, \rho)(n_1, \rho_1)$ (оба числа заданы, что определяет область значений ρ).

Пусть сперва

$$(n_1, \rho_1) > \exp\frac{1}{2}(\ln\ln n)^4 = r_0^{1/2}. \tag{30.11}$$

(30.10) дает всегда оценку $(B\ln n)/(n, \rho)$, и если учесть взнос Bn/mQ_1 от (30.9) числа разбиений $\alpha_1, \ldots, \alpha_{t_1}$, не превосходящего $\tau((n_1, \rho_1))$, и то, что $Q_1 = Q/(Q, \rho)$, получаем оценку

$$Bn\ln n \cdot \frac{\tau((n_1, \rho_1))}{mQ_1(n, \rho)} = B\frac{n\ln n\tau((n_1, \rho_1))}{mQ_1(n_1, \rho_1)}. \tag{30.12}$$

Теперь вводим коэффициент $a(m) = B(\tau(m))^{a_2}\tau((n_1, \rho_1))^{a_2}$ при числе m и суммируем, соответственно (30.12),

$$Bn\frac{\ln n(\tau(m))^{a_2}\tau((n_1, \rho_1))^{a_2+1}}{mQ(n_1, \rho_1)} \tag{30.13}$$

при заданном (Q, ρ), $(n_1, \rho_1) > \exp((\ln\ln n)^4/2)$ и затем по (Q, ρ). Тогда для (30.13) получим оценку

$$Bn\ln n \sum_{m,\, Q\leqslant\sqrt{n}} (\tau(m))^{a_2}\tau(Q) \sum_{\substack{\delta\mid n\\ \delta>\exp((\ln\ln n)^4/2)}} \delta^{-1}(\tau(\delta))^{a_2+1} =$$
$$= Bn\exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln n)^2\right) \tag{30.14}$$

(см. § 24).

Теперь пусть $(n_1, \rho_1) \leqslant \exp(1/2)(\ln\ln n)^4$, так что $\Pi_{\alpha_1\ldots\alpha_{t_1}} \leqslant \leqslant \exp(1/2)(\ln\ln n)^4$. Если еще $(Q, \rho) \leqslant \exp(1/4)(\ln\ln n)^4$, то сумма ряда (30.10) при таких условиях дает при суммировании по ρ_2 после суммирования по разбиениям оценку

$$B\frac{n\tau(n_1, \rho_1))}{mQ(n_1, \rho_1)}r_0^{-(1/4)\cdot 0.0005} \tag{30.15}$$

или

$$B\frac{n\tau((n_1, \rho_1))}{mQ(n_1, \rho_1)}\exp(-a_{13}(\ln\ln n)^2). \tag{30.16}$$

При суммировании по m, $(Q, \rho)\mid Q$, $(n_1, \rho_1)\mid n$ нужно взять член

$$Bn\frac{(\tau(m))^{a_2}(\tau((n_1, \rho_1)))^{a_2+1}(\tau(Q))^{a_2}}{mQ(n_1, \rho_1)}\exp(-a_{13}(\ln\ln n)^2). \tag{30.17}$$

Суммируя по m, Q, (n_1, ρ_1), найдем оценку

$$Bn\exp(-a_4(\ln\ln n)^2). \tag{30.18}$$

Пусть теперь $(n_1, \rho_1) \leqslant \exp((1/2)(\ln\ln n)^4)$, $(Q, \rho) > \exp((1/4) \times$ $\times (\ln\ln n)^4)$. Тогда выделим (Q, ρ) при суммировании (29.20) и заменим (29.20) оценкой

$$\frac{B\ln n}{(n_1, \rho_1)(Q, \rho)}.$$

Вместе с (30.3) это дает член

$$B\frac{n\ln n}{(n_1, \rho_1)\, mQ_1(Q, \rho)}.$$

Суммируя по $(Q, \rho) > \exp((1/4)(\ln\ln n)^4)$ и учитывая, что $(Q, \rho) \mid n$, получим оценку

$$B\frac{n\ln n}{(n_1, \rho_1)\, mQ_1}\exp(-(1/2)(\ln\ln n)^2). \tag{30.19}$$

Суммируя по $(n_1, \rho_1) \mid n$, $Q_1 \mid Q$, m с множителем $(\tau(m))^{a_2} \times$ $\times (\tau((n_1, \rho_1)))^{a_2+1}$, найдем оценку

$$Bn\exp(-a_{13}(\ln\ln n)^2). \tag{30.20}$$

§ 31. Теперь вернемся к остаточному члену (29.17). Здесь $n_2 = n/(Q, \rho)(n_1, \rho_1)$, так что имеем выражение

$$B\frac{n_2}{mQ_1\varphi(\rho_2)} = B\frac{n}{m(Q, \rho)(n_1, \rho_1)\varphi(\rho_2)Q_1}.$$

Суммируя эти выражения по ρ_2 при данных (Q, ρ), (n_1, ρ_1) и собирая по разбиениям $\alpha_1, \ldots, \alpha_{t_1}$, найдем $B\dfrac{n\ln n\tau((n_1, \rho_1))}{m(Q, \rho)(n_1, \rho_1)Q_1}$. Далее, суммирование по (Q, ρ) дает $B\dfrac{n\ln n(\tau(Q))^{a_2}\tau((n_1, \rho_1))}{mQ(n_1, \rho_1)}$. Суммируя по $(n_1, \rho_1) = \delta_1$, мы получим $B\sum\limits_{\delta_1 \mid n}(1/\delta) = B\ln n$. Имеем

$$B\frac{n\ln^3 n(\tau(Q))^{a_2}\tau((n_1, \rho_1))}{mQ(n_1, \rho_1)}. \tag{31.1}$$

Далее, при m стоит коэффициент $B(\tau(m))^{a_2+1}(\tau((n_1, \rho_1)))^{a_2+1}$. Суммируя

$$Bn\ln^3 n(\tau(Q))^{a_2}(\tau(m))^{a_2+1}(\tau((a_1, \rho_1)))^{a_2+1} \tag{31.2}$$

по интервалам изменения m, Q, находим:

$$Bn(\ln n)^{a_{13}}. \tag{31.3}$$

Умножая на $\exp(-(1/2)(\ln\ln n)^{50})$ (см. (29.17)), получим:

$$Bn\exp(-a_{13}(\ln\ln n)^2). \tag{31.4}$$

Итак, находим для $\sum_{A_2}$ оценку (см. (29.7))

$$\sum\nolimits_{A_2} = Bn\exp(-a_{14}(\ln\ln n)^2). \tag{31.5}$$

§ 32. Переходим к выводу окончательного вида выражения для $Q_4(n)$ (см. § 8 и 9). Согласно (8.5), (8.6), (9.1), имеем:

$$Q_4(n) = Q_4^{(1)}(n) + Bn(\ln n)^{-K_{10}}. \tag{32.1}$$

Далее, ввиду (9.3)

$$Q_4^{(1)}(n) = Q_4^{(0)}(n) + Q_4^{(2)}(n), \tag{32.2}$$

причем выражение для $Q_4^{(2)}(n)$ дается формулой (12.12).

Далее, согласно (14.5),

$$Q_4^{(0)}(n) = \sum\nolimits_A + \sum\nolimits_B + \sum\nolimits_C. \tag{32.3}$$

В силу (15.2), (28.6) и (31.5)

$$Q_4^{(0)}(n) = \sum\nolimits_{A_1} + B\frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_0}}, \quad \tau_0 > 0.014. \tag{32.4}$$

Таким образом, из (32.1)—(32.4) получаем

$$Q_4(n) = \sum\nolimits_{A_1} + Q_4^{(2)}(n) + B\frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_0}}. \tag{32.5}$$

Учитывая (12.12) и (13.1) (лемма 2), находим отсюда:

$$Q_4(n) = 4\sum_{r\leqslant r_0}\chi_4(r)\sum_{q_1q_2q_3q_4\leqslant n}{}' \mu(q_1)\mu(q_2)\mu(q_3)\mu(q_4)\times$$

$$\times Ч(q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4 \equiv n \pmod r,\ \ q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4 \leqslant n) +$$

$$+ B\frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_0}}. \tag{32.6}$$

Здесь $q_1\ldots q_4x_1\ldots x_4$ нечетно, $q_i \in \Lambda_P$. Обозначая, как и ранее, $x_i' \in \Omega_P$, находим из (32.6):

$$Q_4(n) = 4\sum_{r\leqslant r_0}\chi_4(r)\,Ч(x_1'x_2'x_3'x_4' \equiv n \pmod r,\ \ x_1'x_2'x_3'x_4' \leqslant n) +$$

$$+ B\frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_0}}. \tag{32.7}$$

Для дальнейшего преобразования выражения (32.7) мы должны применить результаты об исключительных характерах и «зигелевских» нулях, соответствующих рядов Дирихле (см. § 12). При $r \leqslant (\ln n)^{K_{21}}$ получаем стандартными методами (см. [8] и § 11, 12), что если $(r, n) = 1$, то

$$Ч(x_1'x_2'x_3'x_4' \equiv n \pmod r,\ \ x_1'x_2'x_3'x_4' \leqslant n) = \frac{L_4(n)}{\varphi(r)} + R(n, r), \tag{32.8}$$

где

$$R(n, r) = B\frac{n}{r}(\ln n)^{-K_{22}}. \tag{32.9}$$

Если же

$$(\ln n)^{K_{21}} \leqslant r \leqslant r_0 = \exp (\ln \ln n)^4, \tag{32.10}$$

то формула (32.9) будет иметь место, если r не делится ни на один из множителей модулей $r_1, r_2, \ldots, r_t$ (см. § 12); в последнем случае для (32.8) надо взять тривиальную оценку

$$B \frac{n}{r}. \tag{32.11}$$

Суммируя (32.11) по r, делящимся на r_1, r_2, ... или r_t, получаем, как и в § 12, общую оценку

$$Bn (\ln n)^{-K_{35}}. \tag{32.12}$$

Если $(r, n) > 1$, то левая часть (32.8) равна нулю. Ввиду вышесказанного (32.7) можно переписать так:

$$Q_4(n) = 4L_4(n) \sum_{\substack{r \leqslant r_0 \\ (r, n)=1}} \frac{\chi_4(r)}{\varphi(r)} + B \frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_0}}. \tag{32.13}$$

Дополняя написанный ряд от $r_0 + 1$ до ∞, легко находим:

$$Q_4(n) = 4L_4(n) \sum_{\substack{r=1 \\ (r, n)=1}}^{\infty} \frac{\chi_4(r)}{\varphi(r)} + B \frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_0}}. \tag{32.14}$$

Эта сумма непосредственно приводится к виду

$$Q_4(n) = \pi L_4(n) A_0 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} + B \frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_0}}, \tag{32.15}$$

где, как и ранее, $A_0 = \prod\limits_p (1 + \chi_4(p)/p(p-1))$.

§ 33. Таким образом, мы нашли асимптотику вида (8.1) при $k=4$. Но мы использовали лемму 5, которую надлежит доказать отдельно. Перейдем к доказательству леммы 5 (формула (23.3)).

Для изучения распределения чисел вида $x_1x_2x_3x_4$ в коротких отрезках арифметических прогрессий надлежит доказать следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть $D > 1$ — модуль; $L(s, \chi)$ $(\chi = \chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{\varphi(D)-1})$ — $\varphi(D)$ L-рядов по модулю D. Тогда для всех значений t и $\chi \pmod D$*

$$\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, D)} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right|^4 = BD(|t|+2) \ln^9 D(|t|+2). \tag{33.1}$$

Доказательство этой леммы требует ряда вспомогательных рассуждений. Пусть $t \geqslant 1$, $a = (1 - \chi(-1))/2$. Тогда имеем (см. [12])

для примитивного характера χ:

$$\xi(s,\ \chi)=\left(\frac{D}{\pi}\right)^{(s+a)/2}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)L(s,\ \chi)=\left(\frac{D}{\pi}\right)^{(s+a)/2}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)\times$$
$$\times\sum_{2\pi n^2\leqslant tD}\chi(n)\,n^{-s}+\varepsilon(\chi)\left(\frac{D}{\pi}\right)^{(1-s+a)/2}\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)\times$$
$$\times\sum_{2\pi n^2\leqslant tD}\bar{\chi}(n)\,n^{-(1-s)}+P+Q, \tag{33. 2}$$

$$P=-\exp\left(\frac{s+a}{4}\pi i\right)\sum_{2\pi n^2\leqslant tD}\chi(n)\,n^a\int_0^1\exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D}\right)x^{(s+a)/2-1}dx+$$
$$+\exp\frac{s+a}{4}\pi i\sum_{2\pi n^2>tD}\chi(n)\,n^a\int_1^\infty\exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D}\right)x^{(s+a)/2-1}dx \tag{33. 3}$$

и Q получается из P умножением на $\varepsilon(\chi)$ и заменой $s\to 1-s$, $\chi\to\bar{\chi}$. Таким образом, по удалении $\varepsilon(\chi)$ Q становится сопряженным с P и достаточно изучить только оценку для P.

В формуле (33. 3) рассмотрим вторую (бесконечную) сумму. Оценим сперва сумму

$$\sum_{n>D^2t^2}\chi(n)\,n^a\int_1^\infty\exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D}\right)x^{(s+a)/2-1}dx. \tag{33. 4}$$

Пусть $w_1=(s+a)/2$. Имеем ($s=1/2+it$):

$$\int_1^\infty e^{Air}r^{w_1-1}dr=-\frac{e^{Ai}}{Ai}-\frac{1}{Ai}(w_1-1)\int_1^\infty e^{Air}r^{w_1-2}dr=$$
$$=-\frac{e^{Ai}}{Ai}+\frac{1}{(Ai)^2}(w_1-1)\,e^{Ai}+\frac{1}{(Ai)^2}(w_1-1)\,(w_1-2)\int_0^\infty e^{Air}r^{w_1-3}dr=$$
$$=-\frac{e^{Ai}}{Ai}+\frac{(w_1-1)\,e^{Ai}}{(Ai)^2}+B\,\frac{|w_1-1|\,|w_1-2|}{A^3}.$$

Далее, $A=\pi n^2/D$, так что $e^{Ai}/Ai=(1/i)(D/\pi n^2)\exp\left(-\frac{\pi n^2}{D}i\right)$, $1/A^2=D^2/\pi^2n^2$. Итак,

$$\chi(n)\,n^a\int_1^\infty\exp\left(-\frac{\pi n^2xi}{D}\right)x^{(s+a)/2-1}dx=\chi(n)\,n^a\left(-\frac{1}{i}\frac{D}{\pi n^2}\exp\frac{\pi n^2 i}{D}+B\frac{D^2}{\pi^2n^4}\right).$$

Если $\chi(-1)=1$, то $a=0$ и этот член равен BD^2/π^2n^2. Далее,

$$\frac{BD^2}{\pi^2}\sum_{n>D^2t^2}\frac{1}{n^2}=\frac{BD^2}{D^2t^2}=\frac{B}{t^2}.$$

Итак, при $\chi(-1)=+1$ $a=0$ и сумма (33.4) имеет оценку

$$\frac{B}{t^2}. \tag{33.5}$$

Пусть $\chi(-1)=-1$. Тогда $a=1$. Получаются члены

$$\frac{iD}{\pi}\frac{\chi(n)}{n}\exp\left(\frac{\pi n^2 i}{D}\right).$$

Рассмотрим вспомогательную сумму $\sum_{m=1}^{2D}\chi(m)\exp(\pi m^2 i/D)$. Числу $\xi<D$ сопоставим число $2D-\xi$. Тогда

$$\chi(\xi)\exp\frac{\pi\xi^2 i}{D}+\chi(2D-\xi)\frac{\pi(2D-\xi)^2 i}{D}=\chi(\xi)\exp\frac{\pi\xi^2 i}{D}-$$
$$-\chi(\xi)\exp\pi\frac{4D^2-4D\xi+\xi^2}{D}=\chi(\xi)\left(\exp\frac{\pi\xi^2 i}{D}-\exp\frac{\pi\xi^2 i}{D}\right)=0.$$

Ввиду этого ряд

$$\left|D\sum_{n>D^2t^2}\frac{\chi(n)}{n}\exp\frac{\pi n^2 i}{D}\right|<D\cdot 2D\sum_{n>D^2t^2}\frac{1}{n^2}=\frac{BD^2}{D^2t^2}=\frac{B}{t^2}.$$

Итак, находим:

$$\sum_{2\pi n^2>Dt}\chi(n)\,n^a\int_1^\infty\exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D}\right)x^{(s+a)/2-1}dx=$$
$$=\sum_{\sqrt{Dt/2\pi}\leqslant n\leqslant D^2t^2}\chi(n)\,n^a\int_1^\infty\exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D}\right)x^{(s+a)/2-1}dx+\frac{B}{t}. \tag{33.6}$$

§ 34. Теперь изучим интервал $\sqrt{Dt/2\pi}<n\leqslant D^2t^2$. Интеграл

$$\int_1^\infty\exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D}\right)x^{(s+a)/2-1}dx$$

будем трактовать по методу работы [13] Р. О. Кузьмина.[5)] Сперва пусть $a=1$. Положим тогда

$$x=u^{4/3},\quad x^{(s+a)/2-1}\,dx=u^{(2/3)(s+a)-1/3}\,(4/3)\,u^{1/3}\,du,\quad s=(1/2)+it \text{ и}$$
$$(4/3)\,u^{(2/3)(s+a)-1/3+1/3}\,du=(4/3)\,a^{(2/3)(3/2+it)-1}=(4/3)\,u^{(2/3)it}.$$

[5)] Некоторые выводы этой работы неточны. Так, предложенный автором способ приводит не к оценке остаточного члена, данной в конце с. 123, а к худшей оценке.

Имеем:

$$\int\limits_1^\infty \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D}\right) x^{(s+a)/2-1}dx = \frac{4}{3}\int\limits_1^\infty \exp\left(-\frac{\pi n^2 u^{4/3} i}{D} + \frac{2}{3} it \ln u\right) du =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_1^\infty \exp\left(-i\left(\frac{\pi n^2 u^{4/3}}{D} - \frac{2}{3} t \ln u\right)\right) du.$$

Полагаем

$$v = \pi n^2 u^{4/3}/D - \frac{2}{3} t \ln u, \quad \frac{dv}{du} = \frac{4}{3}\frac{\pi n^2}{D} u^{1/3} - \frac{2}{3}\frac{t}{u}.$$

Может ли быть $\frac{dv}{du} = 0$? Имеем: $2\pi n^2 > Dt$; если бы знаменатель равнялся нулю, то $2\pi n^2/D = t/u^{4/3} \leqslant t$, что невозможно. Далее, $\frac{d^2v}{du^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi n^2}{D} u^{-2/3} + \frac{2}{3}\frac{t}{u^2} > 0$, $\frac{dv}{du}$ монотонно возрастает, и ее минимум будет при $u = 1$. Отсюда

$$I(n) = \int\limits_1^\infty \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D}\right) x^{(s+a)/2-1}dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int\limits_{u=1}^{u=\infty} \frac{\exp(-iv)}{(4/3)(\pi n^2/D)\, u^{1/3} - (2/3)\, t/u} dv = 2D\int\limits_{u=1}^{u=\infty} \frac{\exp(-iv)\, dv}{2\pi n^2 u^{1/3} - Dt/u}.$$

Минимум знаменателя достигается при $u = 1$; он равен $2\pi n^2 - Dt$. Отсюда

$$|I(n)| \leqslant \frac{2D}{2\pi n^2 - Dt}. \tag{34.1}$$

Оценка невыгодна, если $2\pi n^2$ близко к Dt. В этом случае применим прием Р. О. Кузьмина со вспомогательным числом β (см. [13]). Пусть $\beta > 1$. Имеем:

$$|I(n)| \leqslant \left|\int\limits_1^\beta\right| + \left|\int\limits_\beta^\infty\right| < \beta - 1 + \frac{2D}{2\pi n^2 \beta^{1/3} - Dt/\beta} =$$

$$= \beta - 1 + \frac{2D\beta}{2\pi n^2 \beta^{4/3} - Dt} \leqslant \beta - 1 + \frac{2D\beta}{Dt\,(\beta^{4/3} - 1)}$$

(ибо $2\pi n^2 > Dt$). Это не превосходит $\beta^{4/3} - 1 + 2D\beta/Dt(\beta^{4/3} - 1)$. Если взять $\beta^{4/3} - 1 = 1/\sqrt{t}$, то это меньше, чем

$$\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{4}{\sqrt{t}} = \frac{5}{\sqrt{t}}. \tag{34.2}$$

Итак,

$$| I(n) | = B \min\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{2D}{2\pi n^2 - Dt}\right). \qquad (34.3)$$

§ 35. Проведем аналогичный вывод при $\chi(-1)=1$, $a=0$. Тогда

$$I(n) = \int_1^\infty \exp\left(-\frac{\pi n^2 x i}{D}\right) x^{1/4+it/2-1} dx.$$

Пусть

$$x = u^\alpha, \quad x^{-3/4+it/2} dx = \alpha u^{-(3/4)\alpha + it\alpha/2+\alpha-1} = \alpha u^{it\alpha/2+\alpha/4-1}$$

и $\alpha=4$, т. е. $x=u^4$. Тогда $x^{-3/4+it/2}dx = 4u^{2it}du$. Далее,

$$I(n) = 4\int_1^\infty \exp\left(-i\left(\frac{\pi n^2 u^4}{D} - 2t \ln u\right)\right) du.$$

Пусть

$$v = \frac{\pi n^2 u^4}{D} - 2t \ln u, \quad \frac{dv}{du} = 4\frac{\pi n^2 u^3}{D} - \frac{2t}{u}.$$

Если бы было $\frac{dv}{du}=0$, то $2\pi n^2 \leqslant Dt$, что невозможно: $2\pi n^2 > Dt$. Очевидно, $\frac{d^2 v}{du^2} > 0$,

$$I(n) = 2\int_{u=1}^{u=\infty} \frac{\exp(-iv)\, dv}{4\pi n^2 u^3/D - 2t/u} = D\int_{u=1}^{u=\infty} \frac{\exp(-iv)\, dv}{2\pi n^2 u^3 - Dt/u},$$

$$| I(n) | \leqslant \frac{D}{2\pi n^2 - Dt}.$$

Если эта оценка невыгодна, то снова применяем прием Р. О. Кузьмина. Имеем:

$$| I(n) | \leqslant \beta - 1 + \frac{D\beta}{2\pi n^2 \beta^4 - Dt} \leqslant \beta^4 - 1 + \frac{D\beta}{Dt(\beta^4 - 1)};$$

полагая $\beta^4 - 1 = 1/\sqrt{t}$, находим снова:

$$| I(n) | = B \min\left(\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{D}{2\pi n^2 - Dt}\right). \qquad (35.1)$$

Для упрощения условимся брать при $n < \sqrt{Dt}$ оценку $B/\sqrt{t}$, а при $n \geqslant \sqrt{Dt}$ — оценку

$$\frac{BD}{2\pi n^2 - Dt} = \frac{B}{t}. \qquad (35.2)$$

Итак,

$$|I(n)| = \frac{B}{\sqrt{t}} \quad (n < \sqrt{Dt}),$$
$$|I(n)| = \frac{BD}{2\pi n^2 - Dt} \quad (n \geqslant \sqrt{Dt}). \tag{35.3}$$

Сегмент $[\sqrt{Dt}, D^2t^2]$ разобьем на $B \ln Dt$ сегментов вида

$$[2^k \sqrt{Dt},\ 2^{k+1}\sqrt{Dt}]. \tag{35.4}$$

При данном k имеем:

$$|I(n)| = \frac{BD}{2\pi n^2 - Dt} = \frac{BD}{2^{2k}Dt} = \frac{B}{2^{2k}t},$$

а всего чисел n там будет не более $2^{k+1}\sqrt{Dt}$.

Рассмотрим теперь сумму по всем χ:

$$\sum_{\chi} \Big| \sum_{2^k\sqrt{Dt} \leqslant n \leqslant 2^{k+1}\sqrt{Dt}} \chi(n)\, nI(n) \Big|^4 =$$
$$= \sum_{\chi} \Big| \sum_{\substack{2^k\sqrt{Dt} \leqslant m_i \leqslant 2^{k+1}\sqrt{Dt} \\ i=1,\,2}} \chi(m_1m_2)\, m_1m_2 I(m_1)\, I(m_2) \Big|^2 =$$
$$= BD \sum_{\substack{2^k\sqrt{Dt} \leqslant m_i \leqslant 2^{k+1}\sqrt{Dt} \\ m_1m_2 \equiv m_3m_4 \pmod D}} m_1m_2m_3m_4 I(m_1)\, I(m_2)\, I(m_3)\, I(m_4) =$$
$$= BD\,(2^k\sqrt{Dt})^4 \frac{1}{(2^{2k}t)^4} \sum_{\substack{2^k\sqrt{Dt} \leqslant m_i \leqslant 2^{k+1}\sqrt{Dt} \\ m_1m_2 \equiv m_3m_4 \pmod D}} 1 =$$
$$= \frac{BD^3}{2^{4k}t^2} \sum_{m \leqslant 2^{k+2}Dt} \tau(m) \sum_{\substack{n \equiv m \pmod D \\ n \leqslant 2^{k+2}Dt}} \tau(n). \tag{35.5}$$

Двойную сумму перепишем так:

$$\sum_{\substack{m \leqslant 2^{k+2}Dt \\ r \leqslant 2^{k+2}t}} \tau(m)\,\tau(|m - Dr|) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{m,\,r} \tau^2(m) + \frac{1}{2}\sum_{m,\,r} \tau^2(|m - Dr|).$$

Имеем:

$$\sum_{\substack{m \leqslant 2^{k+2}Dt \\ r \leqslant 2^{k+2}t}} \tau^2(m) = B \cdot 2^{k+2}t \cdot 2^{k+2}Dt \ln^4(2^{k+2}Dt).$$

Так как $2^kDt \leqslant D^2t^2$, это дает оценку

$$B \cdot 2^{2k+4}t^2D \cdot \ln^4 Dt. \tag{35.6}$$

Далее,

$$\sum_{\substack{m\leqslant 2^{k+2}Dt\\ r\leqslant 2^{k+2}t}} \tau^2(|m-Dr|) = B\cdot 2^{k+2t} \sum_{\mu\leqslant 2^{k+2}Dt} \tau^2(\mu),$$

что приводит к той же оценке (35.6).

Итак, получаем:

$$\frac{BD^3}{2^{4k}t^2}\, 2^{2k+4}Dt^2 \ln^4 Dt = \frac{BD^4}{2^{2k}} \ln^4 Dt. \tag{35.7}$$

§ 36. Рассмотрим теперь сегмент $[1, \sqrt{Dt}]$, где для $|I(n)|$ надо взять оценку $B/\sqrt{t}$. Оцениваем сумму $\sum\limits_{\chi}\Bigl|\sum\limits_{\sqrt{Dt/2\pi}\leqslant n\leqslant\sqrt{Dt}} \chi(n)\, nI(n)\Bigr|^4$. Здесь будет $k=0$, а разница лишь в том, что для $I(n)$ нужно взять оценку $B/\sqrt{t}$. Это дает вместо (35.7) оценку

$$BD^4t^2 \ln^4(Dt). \tag{36.1}$$

Перейдем к оценке

$$\sum_{\chi}\Bigl|\sum_{2^k\sqrt{Dt}\leqslant n\leqslant 2^{k+1}\sqrt{Dt}} \chi(n)\, I(n)\Bigr|^4. \tag{36.2}$$

Здесь отсутствует множитель, происходящий от $m_1m_2m_3m_4$ и оцениваемый как $B(2^k\sqrt{Dt})^4$, так что вместо (35.7) будет оценка

$$\frac{BD^4}{2^{6k}(Dt)^2}\ln^4 Dt = \frac{BD^2\ln^4 Dt}{2^{6k}t^2}. \tag{36.3}$$

Вместо (4.1) будет оценка

$$BD^2\ln^4 Dt. \tag{36.4}$$

§ 37. Возвращаясь к формуле (33.3), рассмотрим при $n\leqslant\sqrt{Dt/2\pi}$

$$I(n) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{\pi n^2 xi}{D}\right) x^{(s+a)/2-1}dx. \tag{37.1}$$

Здесь также применим метод Р. О. Кузьмина. При $a=1$, $\chi(-1)=$ $=-1$ положим $x=u^{4/3}$. Тогда

$$I(n) = \frac{4}{3}\int_0^1 \exp\left(-i\left(\frac{\pi n^2u^{4/3}}{D} - \frac{2}{3}t\ln u\right)\right)du,$$

$$v = \frac{\pi n^2 u^{4/3}}{D} - \frac{2}{3}t\ln u, \quad \frac{dv}{du} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi n^2u^{1/3}}{D} - \frac{2}{3}\,\frac{t}{u}.$$

Если $\frac{dv}{du}=0$, то $\frac{2\pi n^2}{D}-\frac{t}{u^{4/3}}=0$, $2\pi n^2=\frac{Dt}{u^{4/3}}>Dt$, но $2\pi n^2<Dt$ (член с возможным равенством пока исключаем); $\frac{d^2v}{du^2}>0$; $\frac{dv}{du}$ возрастает;

$$I(n)=\frac{4}{3}\int_0^1 \exp(-iv(n))\,du=\frac{4}{3}\int_{v=\infty}^{\pi n^2}\exp(-iv)\frac{dv}{v'(u)}=$$

$$=-2\int_{v=\pi n^2}^{\infty}\frac{\exp(-iv)\,dv}{v'(u)}=-2\int_{v=\pi n^2}^{\infty}\frac{\exp(-iv)\,dv}{2\pi n^2u^{1/3}/D-t/u},$$

$$|I(n)|<\frac{4D}{Dt-2\pi n^2}. \tag{37.2}$$

Если $2\pi n^2$ близко к Dt, берем $\beta\in(0.1)$; тогда

$$|I(n)|\leqslant\frac{4}{3}(1-\beta)+\frac{2\beta^2D}{Dt-2\pi n^2\beta^{4/3}}\leqslant\frac{4}{3}(1-\beta)+\frac{2\beta^2D}{Dt(1-\beta^{4/3})}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\beta^2}{t(1-\beta^{4/3})}+\frac{4}{3}(1-\beta^{4/3});$$

полагая $1-\beta^{4/3}=1/\sqrt{t}$, найдем:

$$|I(n)|=\frac{B}{\sqrt{t}}. \tag{37.3}$$

Для случая $\chi(-1)=+1$ получим так же:

$$|I(n)|=\frac{B}{\sqrt{t}}.$$

§ 38. Из (33.2) находим при $s=1/2+it$, $t\geqslant 1$ (χ — неглавный примитивный характер):

$$L(s,\chi)=\sum_{2\pi n^2\leqslant Dt}\chi(n)\,n^{-s}+\varepsilon(\chi)\left(\frac{D}{\pi}\right)^{1/2-s}\frac{\Gamma((1-s+a)/2)}{\Gamma((s+a)/2)}\times$$

$$\times\sum_{2\pi n^2\leqslant tD}\bar{\chi}(n)\,n^{-(1-s)}-\frac{\exp((s+a)\pi i/4)}{(D/\pi)^{(s+a)/2}\,\Gamma((s+a)/2)}\sum_{2\pi n^2\leqslant Dt}\chi(n)\,n^a\times$$

$$\times\int_0^1\exp\left(-\frac{\pi n^2xi}{D}\right)x^{(s+a)/2-1}\,dx+\frac{\exp((s+a)\pi i/4)}{(D/\pi)^{(s+a)/2}\,\Gamma((s+a)/2)}\times$$

$$\times\sum_{2\pi n^2>Dt}\chi(n)\,n^a\int_1^{\infty}\exp\left(-\frac{\pi n^2xi}{D}\right)x^{(s+a)/2-1}\,dx+$$

$$+\frac{Q}{(D/\pi)^{(s+a)/2}\,\Gamma(s+a)/2)}, \tag{38.1}$$

где $Q = \bar{P}\varepsilon(\chi)$. Заметим далее, что

$$\left|\left(\frac{D}{\pi}\right)^{1/2-s}\right| = 1,$$

$$\left|\frac{\exp((s+a)/4)\,\pi i}{(D/\pi)^{(s+a)/2}\Gamma((s+a)/2)}\right| = \frac{B}{D^{a/2+1/4}t^{a/2-1/4}}. \qquad (38.2)$$

Из (38.1) выводим:

$$|L(s, \chi)| = B\Bigg\{\Big|\sum_{2\pi n^2\leqslant Dt}\chi(n)\,n^{-s}\Big| + \Big|\sum_{2\pi n^2\leqslant tD}\bar{\chi}(n)\,n^{-(1-s)}\Big| +$$

$$+\frac{1}{D^{a/4+1/4}t^{a/2-1/4}}\Big|\sum_{2\pi n^2\leqslant Dt}\chi(n)\,n^a I_1(n)\Big| +$$

$$+\frac{1}{D^{a/2+1/4}t^{a/2-1/4}}\Big|\sum_{\substack{2\pi n^2> Dt\\ n\leqslant t^2D^2}}\chi(n)\,n^a I_2(n)\Big| + \frac{B}{D^{a/2+1/4}t^{a/2-1/4}}\frac{1}{t^2} +$$

$$+\frac{1}{D^{a/2+1/4}t^{a/t^2-1/4}}\Big|\sum_{2\pi n^2\leqslant Dt}\bar{\chi}(n)\,n^a\bar{I}_1(n)\Big| +$$

$$+\frac{1}{D^{a/2+1/4}t^{a/2-1/4}}\Big|\sum_{\substack{2\pi n^2> Dt\\ n\leqslant D^2t^2}}\bar{\chi}(n)\,n^a\bar{I}_2(n)\Big| + \frac{B}{D^{a/2+1/4}t^{a/2-1/4}}\frac{1}{t^2}\Bigg\}. \qquad (38.3)$$

Здесь

$$|I_1(n)| = \frac{B}{\sqrt{t}}, \quad |I_2(n)| = \frac{B}{\sqrt{t}} \quad \text{при} \quad n \leqslant \sqrt{Dt},$$

$$I_2(n) = \frac{B}{2^{2k}t} \quad \text{при} \quad n \in [2^k\sqrt{Dt},\ 2^{kn}\sqrt{Dt}].$$

Далее,

$$|L(s, \chi)|^4 = B\Bigg\{\Big|\sum_{2\pi n^2\leqslant Dt}\chi(n)\,n^{-s}\Big|^4 + \Big|\sum_{2\pi n^2\leqslant Dt}\bar{\chi}(n)\,n^{-(1-s)}\Big|^4 +$$

$$+\frac{1}{D^{2a+1}t^{2a-1}}\Big|\sum_{2\pi n^2\leqslant Dt}\chi(n)\,n^a I_1(n)\Big|^4 + \frac{B\ln^3 Dt}{D^{2a+1}t^{2a-1}}\times$$

$$\times\Bigg(\Big|\sum_{\sqrt{Dt/2\pi}<n<\sqrt{tD}}\chi(n)\,n^a I_2(n)\Big|^4 + \sum_{u\leqslant B\ln Dt}\Big|\sum_{2^u\sqrt{Dt}\leqslant n\leqslant 2^{u+1}\sqrt{Dt}}\chi(n)\,n^a I_2(n)\Big|^4\Bigg) +$$

$$+B + \frac{1}{D^{2a+1}t^{2a-1}}\Big|\sum_{2\pi n^2\leqslant Dt}\bar{\chi}(n)\,n^a\bar{I}_1(n)\Big|^4 +$$

$$+\frac{B\ln^3 Dt}{D^{2a+1}t^{2a-1}}\Bigg(\Big|\sum_{\sqrt{Dt/2\pi}\leqslant n<\sqrt{Dt}}\bar{\chi}(n)\,n^a\bar{I}_2(n)\Big|^4 +$$

$$+\sum_{k\leqslant B\ln Dt}\Big|\sum_{2^k\sqrt{Dt}\leqslant n\leqslant 2^{k+1}\sqrt{Dt}}\bar{\chi}(n)\,n^a\bar{I}_2(n)\Big|^4\Bigg)\Bigg\}. \qquad (38.4)$$

Пусть теперь χ пробегает примитивные характеры $(\bmod D)$ с $\chi(-1)=-1$. Имеем, учитывая оценки § 35 и 36:

$$\sum_{\chi(-1)=-1} |L(s, \chi)|^4 = B \sum_{\substack{\chi \\ (\text{по всем } \chi)}} \left(\left| \sum_{2\pi n^2 \leqslant Dt} \chi(n) n^{-s} \right|^4 + \right.$$

$$+ \left| \sum_{2\pi n^2 \leqslant Dt} \bar{\chi}(n) n^{-(1-s)} \right|^4 + \frac{D^4 t^2 \ln^4 Dt}{D^3 t} +$$

$$+ \frac{\ln^3 Dt}{D^3 t} \left(D^4 t^2 \ln^4 Dt + \sum_{k \leqslant B \ln Dt} \frac{D^4}{2^{2k}} \ln^4 Dt \right) \Bigg) =$$

$$= B \sum_{\substack{\chi \\ (\text{по всем } \chi)}} \left(\left| \sum_{2\pi n^2 \leqslant Dt} \chi(n) n^{-s} \right|^4 + \right.$$

$$\left. + \left| \sum_{2\pi n^2 \leqslant Dt} \bar{\chi}(n) n^{-1(1-s)} \right|^4 + BDt \ln^7 Dt \right). \tag{38.5}$$

Далее,

$$\sum_{\chi} \left| \sum_{2\pi n^2 \leqslant Dt} \chi(n) n^{-s} \right|^4 = BD \sum_{\substack{m_i \leqslant \sqrt{Dt/2\pi} \\ m_1 m_2 \equiv m_3 m_4 \, (\bmod D)}} (m_1 m_2 m_3 m_4)^{-1/2} =$$

$$= BD \sum_{\substack{m,\, n \leqslant Dt/2\pi \\ m \equiv n \, (\bmod D)}} \tau(m) \tau(n) (mn)^{-1/2} =$$

$$= BD \left(\sum_{\substack{m,\, n \leqslant Dt/2\pi \\ m \equiv n \, (\bmod D)}} \frac{\tau^2(m)}{m} + \sum_{\substack{m,\, n \leqslant Dt/2\pi \\ m \equiv n \, (\bmod D)}} \frac{\tau^2(n)}{n} \right).$$

Наши суммы попросту одинаковы. Каждая из них дает:

$$B \sum_{m \leqslant tD/2\pi} \frac{\tau^2(m)}{m} \frac{t}{2\pi} = B \ln^4 (Dt) \cdot t.$$

Итак, наша сумма дает:

$$BDt \ln^4 Dt. \tag{38.6}$$

§ 39. Теперь пусть χ пробегает примитивные характеры с $\chi(-1)=+1$. Первые две суммы в (38. 5) будут такими же (берется сумма по всем характерам). В остальных суммах будет в знаменателе $D^{2a+1}t^{2a-1}=Dt^{-1}$; в них не будет в числителе множителя D^2t^2, происходящего от n^a при $a=1$. Значит, знаменатель надо разделить на D^2t^2 (из D^3t получаем Dt^{-1}) и числитель — на D^2t^2 так, что оценки не изменятся. Отсюда находим при $s=1/2+it$:

$$\sum_{\chi(-1)=+1} |L(s, \chi)|^4 = BDt \ln^7 Dt. \tag{39.1}$$

Объединяя с (6.5), находим при примитивном $\chi\,(\chi\neq\chi_0)$:

$$\sum_{\chi\text{ — примитивный mod }D} |L(s,\chi)|^4 = BDt\ln^7 Dt. \tag{39.2}$$

Мы считали здесь $t\geqslant 1$. Если $t\leqslant -1$, то заметим, что $\overline{L(1/2-it,\chi)}=L(1/2+it,\bar\chi)$, и если χ пробегает все характеры, то $\overline{L(1/2-it,\chi)}$ пробегает $L(1/2+it,\bar\chi)$; то же касается примитивных характеров.

§ 40. Нам нужно еще изучить сегмент значений $t:|t|\leqslant 1$. Это будет сделано на основе иного вида укороченного функционального уравнения.

Мы докажем лемму, имеющую и самостоятельный интерес.

Лемма 7. *Пусть χ — примитивный характер по модулю $D>1$. Тогда*

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}\frac{\psi(s,\,n\sqrt{\pi/D})}{\Gamma((s+a)/2)}+\frac{\bar\varepsilon_1}{\varepsilon}\left(\frac{D}{\pi}\right)^{1/2-s}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\chi(n)}\,n^{s-1}\times$$
$$\times\overline{\frac{\psi(s,\,n\sqrt{\pi/D})}{\Gamma((s+a)/2)}}, \tag{40.1}$$

где при $|s|\leqslant K$ $|\psi(s,y)|<c_0$ для всех y; при $y\geqslant 3$ $|\psi(s,y)|<c_1\exp(-(1/4)\,y\ln y)$ и $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\chi)$, $|\varepsilon_1|=1$. Таким образом, $\psi(s,\,n\sqrt{\pi/D})$ быстро убывает при $n>\sqrt{\pi/D}$, и при $|s|\leqslant K$ важны лишь члены наших сумм, где $n=B\sqrt{D}$.

Перейдем к выводу нашей леммы. Положим

$$\xi(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)L(s,\chi),\ \ \chi\ \text{примитивный},$$
$$a=(1-\chi(-1))/2.$$

При этом при $\varepsilon_1=\pm\sqrt{\varepsilon(\chi)}$, $w=1/2+it$

$$\varepsilon_1\xi(w,\chi)=\varepsilon_1\left(\frac{D}{\pi}\right)^{w/2}\Gamma\left(\frac{w+a}{2}\right)L(w,\chi)\ \text{действительно}. \tag{40.2}$$

Полагая $s=1/2+i\tau$, рассмотрим

$$J(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\varepsilon_1\xi(w,\chi)\frac{dw}{w-s}\ (w=2+iy). \tag{40.3}$$

Перенося контур на (1/2), видим, что там $\dfrac{dw}{w-s}$ действительно $(w\neq s)$; $\varepsilon_1\xi(w,\chi)$ действительно; если умножим на $1/2\pi i$, получим чисто мнимое выражение. Интеграл по полукружку, стремящемуся к s, в пределе дает полувычет $(1/2)\,\varepsilon_1\xi(s,\chi)$, чисто действительный. Значит,

$$RJ(s)=\frac{1}{2}\varepsilon_1\xi(s,\chi). \tag{40.4}$$

Далее, (40.3) на контуре $\sigma = 2$ дает:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} \varepsilon_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^w}\right)\left(\frac{\pi}{D}\right)^{-w/2}\Gamma\left(\frac{w+a}{2}\right)\frac{dw}{w-s}. \qquad (40.5)$$

Мы должны теперь изучить поведение интеграла при $y > 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} y^{-w}\Gamma\left(\frac{w+a}{2}\right)\frac{dw}{w-s}.$$

Полагая $w - s = z$, $w = s + z$, найдем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} y^{-s-z}\Gamma\left(\frac{s+z+a}{2}\right)\frac{dz}{z} = y^{-s}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} y^{-z}\Gamma\left(\frac{s+z+a}{2}\right)\frac{dz}{z}.$$

Будем считать $|s| < K$. Введем обозначение:

$$\psi(s, y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(2)} y^{-z}\Gamma\left(\frac{s+z+a}{2}\right)\frac{dz}{z}.$$

При $y \leqslant 2$, перенося контур на $\sigma = 0$ и беря полувычет $(1/2)\times \times \Gamma((s+a)/2)$, получаем:

$$|\psi(s, y)| < c_0. \qquad (40.6)$$

При $y > 2$ переносим контур вправо на $\sigma = y$; легко видеть, что

$$|\psi(s, y)| < \exp(-y\ln y)\,\Gamma\left(\frac{y+3/2}{2}\right) < c_1\exp\left(-\frac{1}{4}y\ln y\right). \qquad (40.7)$$

Полагая $y = n\sqrt{\pi/D}$, видим, что (40.5) равно

$$\varepsilon_1\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\left(\frac{D}{\pi}\right)^{s/2} n^{-s}\psi\left(s, n\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right),$$

$$RJ(s) = \frac{J(s) + \overline{J(s)}}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{D}{\pi}\right)^{s/2}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}\,\psi\left(s, n\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_1\left(\frac{D}{\pi}\right)^{(1-s)/2}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\chi(n)}\,n^{s-1}\,\overline{\psi\left(s, n\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right)}. \qquad (40.8)$$

Отсюда

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s}\,\frac{\psi(s, n\sqrt{\pi/D})}{\Gamma((s+a)/2)} +$$

$$+\frac{\bar{\varepsilon}_1}{\varepsilon_1}\left(\frac{D}{\pi}\right)^{1/2-s}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\chi(n)}\,n^{s-1}\,\overline{\frac{\psi(s, n\sqrt{\pi/D})}{\Gamma((s+a)/2)}}. \qquad (40.9)$$

Мы условились, что $|t| \leqslant K$, так что $\left|\frac{1}{\Gamma((s+a)/2)}\right| < c_2$. При $n > \sqrt{D}\ln^2 D$

$$\sum_{n>\sqrt{D}\ln^2 D} n^{-1/2}\left|\frac{\psi(s,\ n\sqrt{\pi/D})}{\Gamma((s+a)/2)}\right| <$$

$$< \sum_{n>\sqrt{D}\ln^2 D} n^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{8}\frac{n}{\sqrt{D}}\ln\frac{n}{\sqrt{D}}\right) = \frac{B}{D}. \tag{40. 10}$$

Лемма 7 доказана. Отсюда для примитивных характеров χ имеем:

$$L(s,\ \chi) = \sum_{n\leqslant\sqrt{D}\ln^2 D} \chi(n)\, n^{-s}\gamma\left(s,\ n\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right) +$$

$$+ \sum_{n\leqslant\sqrt{D}\ln^2 D} \overline{\chi(n)}\, n^{s-1}\gamma_1\left(s,\ n\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right) + \frac{B}{D}, \tag{40. 11}$$

$$\left|\gamma_i\left(s,\ n\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right)\right| < c_1. \tag{40. 12}$$

Вид функций γ_i зависит лишь от того, будет ли $\chi(-1) = +1$ или -1.

§ 41. Перейдем к сумме $\sum\limits_{\chi \text{ примитивный}} |L(s,\ \chi)|^4$. Рассмотрим сперва χ с $\chi(-1) = -1$. Будет иметь в силу (40. 11):

$$\sum_{\substack{\chi(-1)=-1\\ \chi \text{ примитивный}}} |L(s,\ \chi)|^4 = B\sum_{\chi}\left|\sum_{n\leqslant\sqrt{D}\ln^2 D} \chi(n)\, n^{-s}\gamma\left(s,\ n\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right)\right|^4 +$$

$$+ B\sum_{\chi}\left|\sum_{n\leqslant\sqrt{D}\ln^2 D} \overline{\chi(n)}\, n^{s-1}\gamma_1\left(s,\ n\sqrt{\frac{\pi}{D}}\right)\right|^4 + B, \tag{41. 1}$$

где сумма берется по всем χ, включая χ_0.

Аналогичная формула получается и для суммы по χ с $\chi(-1) = +1$, только функции $\gamma(s,\ y)$ и $\gamma_1(s,\ y)$ будут иными.

Рассмотрим первую из сумм в правой части (41. 1). Она дает оценку

$$BD \sum_{\substack{m_i\leqslant\sqrt{D}\ln^2 D\\ m_1m_2\equiv m_3m_4 \pmod D}} \frac{1}{(m_1m_2m_3m_4)^{1/2}} = BD \sum_{\substack{m,\ n\leqslant D\ln^4 D\\ m\equiv n \pmod D}} \frac{\tau(m)\,\tau(n)}{m^{1/2}n^{1/2}} =$$

$$= BD\left(\sum_{\substack{m,\ n\leqslant D\ln^4 D\\ m\equiv n \bmod D)}} \frac{\tau^2(m)}{m} + \sum_{\substack{m,\ n\leqslant D\ln^4 D\\ m\equiv n \pmod D)}} \frac{\tau^2(n)}{n}\right) =$$

$$= BD\ln^4 D \sum_{m\leqslant D\ln^4 D} \frac{\tau^2(m)}{m} = BD\ln^8 D.$$

Так же ведет себя и вторая сумма, и такой же подсчет годен для $\chi(-1)=+1$.

Следовательно, при $s=1/2+ti$, $|t|\leqslant K$ имеем:

$$\sum_{\chi \text{ примитивный}} \left|L\left(\frac{1}{2}+ti,\ \chi\right)\right|^4 = BD\ln^8 D. \qquad (41.2)$$

Объединяя с (39.2), получаем для примитивных характеров χ:

$$\sum_{\chi \text{ примитивный}} \left|L\left(\frac{1}{2}+ti,\ \chi\right)\right|^4 = BD(|t|+2)\ln^8 D(|t|+2). \qquad (41.3)$$

§ **42.** Остается изучить непримитивные характеры. Пусть χ — неглавный характер $(\operatorname{mod} D)$, примитивный $\operatorname{mod} D_1$, $D_1 | D$, $D_1>1$. Тогда

$$L(s,\ \chi)=\prod_{p\,|\,(D/D_1)}\left(1+\frac{\xi_p}{p^s}\right)L(s,\ \chi_1),$$

где $|\xi_p|\leqslant 1$, а χ_1 — примитивный характер по модулю D_1. Соберем вместе характеры χ, примитивные $(\operatorname{mod} D_1)$. Имеем в силу предыдущего:

$$\sum_{\chi - \text{примитивный} \operatorname{mod} D_1} \left|L\left(\frac{1}{2}+ti,\ \chi\right)\right|^4 =$$

$$= B\prod_{p\,|\,D/D_1}\left(1+\frac{1}{p^{1/2}}\right)^4 \sum_{\chi - \text{примитивный} \operatorname{mod} D_1} \left|L\left(\frac{1}{2}+ti,\ \chi\right)\right|^4 =$$

$$= B\prod_{p\,|\,D/D_1}\left(1+\frac{1}{p^{1/2}}\right)^4 D_1(|t|+2)\ln^8 D(|t|+2) =$$

$$= B\prod_{p\,|\,d}\left(1+\frac{1}{p^{1/2}}\right)^4 \frac{D}{d}(|t|+2)\ln^8 D(|t|+2). \qquad (42.1)$$

Просуммируем это по $d|D$, $d>1$. Если $D=p_1^{r_1}\ldots p_m^{r_m}$, то

$$\sum_{d\,|\,D}\frac{1}{d}\prod_{p\,|\,d}\left(1+\frac{1}{p^{1/2}}\right)^4 =$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\left(1+\frac{1}{p_i}+\ldots+\frac{1}{p_i^{r_i}}\right)\left(1+\frac{1}{p_i^{1/2}}\right)^4 = B\prod_{p\,|\,D}\left(1+\frac{100}{p}\right).$$

Логарифм этого выражения есть $B+\theta\sum\limits_{p\,|\,D}(200/p)=B+200\theta\times$ $\times\sum\limits_{p<\lg_2 D}(1/p)$, где $|\theta|\leqslant 1$. Последнее дает $B+400\,\theta\ln\ln\ln D$; потенцируя, находим:

$$B\exp 400\ln\ln\ln D = B\ln D.$$

Внося эту оценку в (42. 1) и суммируя, получаем:

$$\sum_{\substack{\chi \bmod D \\ \chi\neq\chi_0}} \left| L\left(\frac{1}{2}+ti,\ \chi\right)\right|^4 = BD\,(|t|+2)\ln^9 D\,(|t|+2). \qquad (42.\ 2)$$

Остается еще учесть $\chi=\chi_0$. Соответствующий член дает

$$B\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{1}{p^{1/2}}\right)^4 \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|^4. \qquad (42.\ 3)$$

Применив сравнительно грубую оценку (см. [14], с. 98)

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)=Bt^{1/4}\ (|t|\geqslant 1),\quad \prod_{p\mid D}(1+p^{-1/2})^4=B(\varepsilon)\,D^{\varepsilon},$$

найдем для (42. 3) оценку

$$BD^{0.1}\,(|t|+2). \qquad (42.\ 4)$$

В сочетании с (42. 3) это и дает оценку (33. 1), т. е. основную лемму 6.

§ **43.** Перейдем к доказательству леммы 5. Мы должны теперь получить асимптотический закон для распределения чисел вида $x_1x_2x_3x_4$ в коротких отрезках арифметических прогрессий. Пусть $D\leqslant\sqrt{x}$ — разность прогрессии. Нас интересует

$$M_0(x,\ D,\ l)=\sum_{\substack{x_1x_2x_3x_4\equiv l \pmod D \\ x_1x_2x_3x_4\leqslant x}} 1=\sum_{\substack{m\leqslant x \\ m\equiv l \pmod D}} \tau_4(m). \qquad (43.\ 1)$$

Здесь считаем $(l,\ D)=1$. Так как

$$(L(s,\ \chi))^4=\sum\frac{\chi(x_1x_2x_3x_4)}{(x_1x_2x_3x_4)^s}=\sum\frac{\chi(m)\,\tau_4(m)}{m^s},$$

то имеем:

$$M_0(x,\ D,\ l)=\mathrm{V.\ p.}\frac{1}{2\pi i\varphi(D)}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^s}{s}\left(\sum_{\chi}\bar{\chi}(l)\,(L(s,\ \chi))^4\right)ds+\theta, \qquad (43.\ 2)$$

где $|\theta|\leqslant 1$. В дальнейшем, опуская l, будем писать $M_0(x,\ D)$. Введем теперь

$$M_1(x,\ D)=\int\limits_0^x M_0(\xi,\ D)\,d\xi, \qquad (43.\ 3)$$

$$M_2(x,\ D)=\int\limits_0^x M_1(\xi,\ D)\,d\xi. \qquad (43.\ 4)$$

Имеем из (43. 2):

$$M_2(x,\ D)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{x^{s+2}}{s(s+1)(s+2)}\left(\sum_{\chi}\bar{\chi}(l)(L(s,\ \chi))^4\right)ds+\theta x^2. \tag{43.5}$$

Здесь, перенося контур на $\sigma=1/2$, получаем

$$M_2(x,\ D)=\frac{1}{\varphi(D)}\operatorname*{rés}_{s=1}\left\{\frac{x^{s+2}}{s(s+1)(s+2)}(L(s,\ \chi_0))^4\right\}+R_2(x,\ D), \tag{43.6}$$

где, согласно лемме 6 (формула (33. 1)),

$$R_2(x,\ D)=\frac{B}{\varphi(D)}D(\ln D)^9\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{5/2}\frac{(|t|+2)\ln^9(|t|+2)}{(|t|+2)^3}dt+$$

$$+Bx^2=Bx^{5/2}\ln^{10}D. \tag{43.7}$$

Иначе можно написать:

$$M_2(x,\ D)=\frac{1}{\varphi(D)}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_\rho}\frac{x^{s+2}}{s(s+1)(s+2)}(L(s,\ \chi_0))^4\,ds+Bx^{5/2}\ln^{10}D. \tag{43.8}$$

Здесь C_ρ — окружность $|s-1|=\rho$, где $\rho>0$ — любое малое число. Беря $\rho=1/\ln D$, рассматриваем кружок $|s-1|=1/\ln D$.

Весьма важно заметить, что $M_0(x,\ D)$, $M_1(x,\ D)$, $M_2(x,\ D)$ — неотрицательные неубывающие функции x; $M_i(x,\ D)\geqslant 0$ $(i=0,\ 1,\ 2)$.

§ 44. Мы должны теперь вывести асимптотический закон для $M_0(x,\ D)$, основываясь на формуле (43. 8) и пользуясь неотрицательностью функций $M_i(x,\ D)$. Имеем:

$$M_2(x,\ D)=\int\limits_0^x M_1(\xi,\ D)\,d\xi.$$

Пусть $\beta=1+\Delta$, где $\Delta=\Delta(x,\ D)$ — малое число, которое мы укажем далее. Так как $M_1(\xi,\ D)$ не убывает, то

$$M_1(x,\ D)\leqslant\frac{1}{\beta x-x}\int\limits_x^{\beta x}M_1(\xi,\ D)\,d\xi=\frac{M_2(\beta x,\ D)-M_2(x,\ D)}{(\beta-1)x}=$$

$$=\frac{M_2((1+\Delta)x,\ D)-M_2(x,\ D)}{x\Delta}=\frac{1}{\varphi(D)}\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\oint\limits_{C_\rho}\frac{(x(1+\Delta))^{s+2}-x^{s+2}}{s(s+1)(s+2)x\Delta}(L(s,\ \chi_0))^4\,ds+B\frac{x^{3/2}\ln^{10}D}{\Delta}. \tag{44.1}$$

Теперь будем считать

$$D\leqslant x^{1/2}\exp(-(\ln\ln x)^{200}), \tag{44.2}$$

$$\Delta=\exp(-(\ln\ln x)^{100}). \tag{44.3}$$

Имеем на окружности C_ρ:

$$(x(1+\Delta))^{s+2} = x^{s+2}(1+(s+2)\Delta + B\Delta^2),$$

$$\frac{(x(1+\Delta))^{s+2} - x^{s+2}}{x\Delta} = \frac{(s+2)\Delta x^{s+2}}{x\Delta} + B\frac{x^{s+2}\Delta^2}{\Delta} = (s+2)x^{s+1} + B\Delta\,|x^{s+1}|.$$

Внося это выражение под интеграл, получаем:

$$B\oint_{C_\rho} \Delta\,|x^{s+1}|\,\frac{|L(s,\chi_0)|^4}{|s(s+1)(s+2)|}\,|ds| = B(\ln^2 D)^4\,\Delta x^2 =$$

$$= Bx^2\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln x)^{100}\right). \qquad (44.4)$$

Отсюда и из (44.1) выводим:

$$M_1(x, D) \leqslant \frac{1}{\varphi(D)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}(L(s,\chi_0))^4\,ds +$$

$$+ B\frac{x^2}{\varphi(D)}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln x)^{100}\right) + Bx^{3/2}\exp 2(\ln\ln x)^{100}. \qquad (44.5)$$

Аналогично, беря $\alpha = 1 - \Delta$ и используя неравенство

$$M_1(x, D) \geqslant \frac{1}{x-\alpha x}\int_{\alpha x}^{x} M_1(\xi, D)\,d\xi = \frac{M_2(x, D) - M_2(\alpha x, D)}{(1-\alpha)x},$$

найдем, что при $D \leqslant x^{1/2}\exp(-(\ln\ln n)^{200})$

$$M_1(x, D) \geqslant \frac{1}{\varphi(D)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}(L(s,\chi_0))^4\,ds +$$

$$+ B\frac{x^2}{\varphi(D)}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln x)^{100}\right) + Bx^{3/2}\exp 2(\ln\ln x)^{100}. \qquad (44.6)$$

Отсюда и из (44.5) имеем:

$$M_1(x, D) = \frac{1}{\varphi(D)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}(L(s,\chi_0))^4\,ds +$$

$$+ B\frac{x^2}{\varphi(D)}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln x)^{100}\right) + Bx^{3/2}\exp 2(\ln\ln x)^{100}. \qquad (44.7)$$

У нас было $D \leqslant x^{1/2}\exp(-(\ln\ln x)^{200})$ (см. (44.2)). При таком условии

$$\frac{x^2}{\varphi(D)}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln x)^{100}\right) \geqslant x^{3/2}\exp 2(\ln\ln x)^{100} > x^{3/2}\exp\frac{1}{2}(\ln\ln x)^{100},$$

так что второй член в правой части (44.7) больше третьего, и мы можем написать:

$$M_1(x, D) = \frac{1}{2\pi i\varphi(D)}\oint_{C_\rho}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}(L(s,\chi_0))^4\,ds +$$

$$+ B\frac{x^2}{\varphi(D)}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln x)^{100}\right). \qquad (44.8)$$

§ **45.** Теперь берем $\Delta = \exp(-(\ln\ln x)^{50})$, $\beta = 1+\Delta$, $\alpha = 1-\Delta$ и записываем:

$$M_0(x, D) \leqslant \frac{1}{\beta x - x}\int_x^{\beta x} M_0(\xi, D)\,d\xi = \frac{M_1(\beta x) - M_1(x)}{x\Delta}, \qquad (45.1)$$

$$M_0(x, D) \geqslant \frac{1}{x - \alpha x}\int_{\alpha x}^{x} M_0(\xi, D)\,d\xi = \frac{M_1(x, D) - M_1(\alpha x, D)}{x\Delta}. \qquad (45.2)$$

Проводя рассуждения, подобные предыдущим, придем к остаточному члену

$$B\frac{x}{\varphi(D)}\exp\left(-\frac{1}{4}(\ln\ln x)^{100}\right) + \frac{Bx\Delta}{\varphi(D)} \qquad (45.3)$$

или

$$B\frac{x}{\varphi(D)}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln x)^{50}\right), \qquad (45.4)$$

и при $D \leqslant x^{1/2}\exp(-(\ln\ln x)^{200})$ имеем:

$$M_0(x, D) = \frac{1}{2\pi i\varphi(D)}\oint_{C_\rho}\frac{x^s}{s}(L(s, \chi_0))^4\,ds +$$
$$+ B\frac{x}{\varphi(D)}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln x)^{50}\right). \qquad (45.5)$$

Это и доказывает лемму 5 (формулу (23.3)). Разумеется, формулу (23.3) можно переписать в виде

$$M_0(x, D) = \frac{1}{\varphi(D)}\operatorname*{rés}_{s=1}\left\{\frac{x^s}{s}(L(s, \chi_0))^4\right\} +$$
$$+ B\frac{x}{\varphi(D)}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln\ln x)^{50}\right), \qquad (45.6)$$

что дает нужный нам асимптотический закон для прогрессий $Dx+l$, где $(l, D) = 1$.

§ **46.** Теперь формула (32.15) вполне обоснована, и уравнение (Y_4') решено.

Рассмотрим уравнения (Y_1'), (Y_2'), (Y_3'), т. е.

$$x_1'x_2'\ldots x_k' + \xi^2 + \eta^2 = n, \quad x_i' \in \Omega_P \quad (k = 1, 2, 3). \qquad (46.1)$$

Обратимся к § 8. Как и в случае $k=4$, уравнения (46. 1) сведены там к уравнениям вида

$$q_1\ldots q_k x_1\ldots x_k + \xi^2 + \eta^2 = n, \qquad (46.2)$$

где q_i, x_i нечетные, $q_1\ldots q_k \leqslant n^\tau$, $q_i \in \Lambda_P$.

Заметим, что при $k=1$ (46. 2) сводится к сравнению $\xi^2+\eta^2 \equiv n \pmod{q_1}$, $q_1 \leqslant n^\tau$, для которого легко дать асимптотическую формулу с хорошим остаточным членом, и можно решить уравнение (46. 1) с погрешностью $B(C)(\ln n)^{-C}$ при любом $C > 1$. При $k=2$ и заданных $q_1, q_2 \leqslant n^{\tau}$ (46. 2) дает кватернарную квадратичную форму, что также приводит к решению уравнения (46. 1) с погрешностью $B(C)(\ln n)^{-C}$.

При $k=3$ можно использовать частично «дисперсионный метод», частично оценки Андрэ Вейля, дающие возможность решить сравнения

$$\xi^2 + \eta^2 \equiv n \pmod{x}, \quad \xi^2 + \eta^2 \leqslant n \tag{46. 3}$$

при $x \leqslant n^{2/3} \exp(-(\ln n)^{1-\alpha_1})$, где $\alpha_1 > 0$ — малая константа. Отсюда можно найти число решений (46. 1) с погрешностью

$$B\frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_0}}, \quad \tau_0 > 0. \tag{46. 4}$$

Однако все это требует дополнительных вычислений, которых можно избежать, если для всех трех случаев $k=1, 2, 3$ довольствоваться лишь остаточным членом (46. 4) (чего вполне достаточно). Именно, мы начали исследование уравнения (Y_4') с вывода основной формулы

$$\sum_{\chi \bmod D} \left| L\left(\frac{1}{2} + i, t, \chi\right) \right|^4 = BD(|t| + 2)\ln^9 D(|t| + 2). \tag{46. 5}$$

Заметим теперь, что при $k=1, 2, 3$ имеем, очевидно,

$$\left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^k \leqslant 1 + \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^4, \tag{46. 6}$$

так что из формулы (46. 5) выводим:

$$\sum_{\chi \pmod D} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^k = BD(|t| + 2)\ln^9 D(|t| + 2). \tag{46. 7}$$

Это дает возможность при выводе чисел решений $Q_k(n)$ ($k=1$, 2, 3) полностью повторить те же рассуждения, что и при выводе числа решений $Q_4(n)$. Таким образом, находим для $k=1, 2, 3$ формулу типа (32. 15):

$$Q_k(n) = \pi L_k(n) \prod_p \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} + R_k(n), \tag{46. 8}$$

где

$$L_k(n) = \sum_{\substack{x_2' \ldots x_k' \leqslant n \\ x_i' \in \Omega_P}} 1, \quad R_k(n) = B\frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_0}}, \quad \tau_0 > 0. \tag{46. 9}$$

§ 47. Мы можем доказать теперь теорему 1 (формулу (0. 1)). Обращаясь к (1. 4), применяем формулу (3. 10) при $k \geqslant 7$, (5. 2) при $k=6$, неравенство (7. 3) при $k=5$ и доказанные нами асимптотические формулы (8. 1) при $k=4$, $k=3$, $k=2$ и $k=1$. В результате при $n > n_0$ получаем:

$$Q(n) > \pi A_0 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)} \left[\sum_{k=1}^{r_1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} L_k(n) - 0.02099 \frac{n}{\ln n} \right] + \\ + B \frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_1}}, \quad \tau_1 > 0. \tag{47. 1}$$

Далее, имеем, очевидно, соотношение (см. § 1)

$$\sum_{k=1}^{r_1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} L_k(n) = \sum_{p \leqslant n} 1 + B n^{3/4} \sim \frac{n}{\ln n}. \tag{47. 2}$$

Отсюда и из (47. 1) при $n > n_1$ находим:

$$Q(n) > 0.979 \pi \frac{n}{\ln n} \prod_p \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)}, \tag{47. 3}$$

что совпадает с (0. 2) и доказывает теорему 1.

Перейдем к выводу теоремы 2 — парной «асимптотической формулы», содержащей $Q(n)$ — число решений уравнения $n = p + \xi^2 + \eta^2$ и $S(n)$ — число решений уравнения $n = p_1 p_2 + \xi^2 + \eta^2$, $p_i > P = \exp(\ln n \ln \ln \ln n / K \ln \ln n)$.

Положим $\zeta_P(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$. Тогда

$$\ln \zeta_P(s) = T(s) - \frac{(T(s))^2}{2} + \frac{(T(s))^3}{3} - \frac{(T(s))^4}{4} + \frac{(T(s))^5}{5} - \frac{(T(s))^6}{6} + \ldots,$$

$$(\ln \zeta_P(s))^2 = \left(T(s) - \frac{(T(s))^2}{2} + \frac{(T(s))^3}{3} - \frac{(T(s))^4}{4} + \frac{(T(s))^5}{5} - \frac{(T(s))^6}{6} + \ldots\right)^2.$$

Возьмем такую линейную комбинацию $\ln \zeta_P(s)$ и $(\ln \zeta_P(s))^2$, которая уничтожает плохо изученное нами количество, отвечающее $(T(s))^5$. Коэффициентом при $(T(s))^5$ у выражения $(\ln \zeta_P(s))^2$ будет $2(-1/4 - 1/6) = -5/6$.

Итак, выражение

$$\ln \zeta_P(s) + \frac{6}{5} (\ln \zeta_P(s))^2 \tag{47. 4}$$

не будет содержать $(T(s))^5$, и тогда можно дать асимптотику для соответствующих выражений. Так же можно трактовать, очевидно,

$$5 \ln \zeta_P(s) + 6 (\ln \zeta_P(s))^2, \tag{47. 5}$$

так что получим:

$$5Q(n) + 6S(n) = \pi \prod_p \left(1 + \frac{\chi_4(n)}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)} \times \\ \times \left(5 \frac{n}{\ln n} + 6 \sum_{\substack{p_1 p_2 \leqslant n \\ p_i > P}} 1\right) + B \frac{n}{(\ln n)^{1+\tau_1}}, \quad \tau_1 > 0. \tag{47. 6}$$

Это и доказывает теорему 2.

Заметим, что в работе [1] автором получена асимптотика для $S(n)$, но с недостаточно хорошим остаточным членом.

Литература

1. Линник Ю. В. О некоторых аддитивных задачах. — Мат. сб., 1960, т. 51, вып. 2, с. 129—154.
2. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of partitio numerorum. III. — Acta Math., 1923, vol. 44, p. 1—70.
3. Линник Ю. В. Проблема Харди—Литтлвуда о сложении простых чисел и двух квадратов. — ДАН СССР, 1959, т. 124, № 1, с. 29—30.
4. Виноградов А. И., Линник Ю. В. Оценка суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии. — Успехи мат. наук, 1957, т. 12, вып. 4, с. 277—280.
5. Малышев А. В. Обобщение сумм Клостермана и их оценки. — Вестник ЛГУ, 1960, № 13. Сер. мат., мех., астрон., вып. 3, с. 59—75.
6. Кузьмин Р. О. О распределении значений некоторых арифметических функций. — ДАН СССР, 1937, т. 15, № 3, с. 117—119.
7. Виноградов А. И. О числах с малыми простыми делителями. — ДАН СССР, 1956, т. 109, № 4, с. 683—686.
8. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. М.—Л., 1947. 203 с.
9. Landau E. Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper. — Göttinger Nachrichten, 1918, S. 285—295.
10. Hooley C. On the representation of a number as the sum of two squares and a prime. — Acta Math., 1957, vol. 97, № 3—4, p. 189—210.
11. Виноградов А. И. Обобщение леммы П. Эрдеша. — Вестник ЛГУ, 1960, № 19. Сер. мат., мех., астрон., вып. 4, с. 124—126.
12. Кузьмин Р. О. О корнях рядов Дирихле. — Изв. АН СССР. Отд-ние мат., ест. наук, 1934, № 10, с. 1471—1491.
13. Кузьмин Р. О. К теории одного класса рядов Дирихле. — Изв. АН СССР. Отд-ние физ.-мат. наук, 1930, № 2, с. 115—124.
14. Титчмарш Е. К. Дзета-функция Римана. М., 1947. 155 с.

ШЕСТОЙ МОМЕНТ ДЛЯ L-РЯДОВ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА В ПРОБЛЕМЕ ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА

ДАН СССР, 1960, т. 133, № 5, с. 1015—1016

Уравнение Харди—Литтлвуда [1, 2]

$$n = p + \xi^2 + \eta^2 \tag{1}$$

(p — простое число, ξ, η — целые числа) имеет решение при всех достаточно больших n. Для числа решений уравнения (1) $Q(n)$ имеет место асимптотическая формула. [1]

Теорема 1.

$$Q(n) = \pi \frac{n}{\ln n} \prod_p \left(1 + \frac{\chi_4(p)}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} + R(n), \tag{2}$$

[1] В моей заметке [2] допущен пробел в рассуждениях, вследствие чего остаточный член (3) выходит хуже, чем указано в [2].

где

$$R(n) = O\left(\frac{n}{(\ln n)^{1.028}}\right). \qquad (3)$$

Уравнение (1), как было указано в [2], сводится к уравнениям вида

$$x_1 x_2 \ldots x_k + \xi^2 + \eta^2 = n, \qquad (4)$$

где x $(i=1, 2, \ldots, k)$ пробегают числа с достаточно большими простыми множителями. При $k > 6$ решения таких уравнений получены «дисперсионным методом» [3]; при $k \leqslant 6$ они сводятся к уравнениям вида (4), где x_i пробегают подряд все нечетные числа. Решение всех таких уравнений (при $k \leqslant 6$) с должной асимптотикой числа решений может быть выполнено с помощью следующей теоремы о «шестом моменте для L-рядов».

Пусть D пробегает все целые числа при условии

$$D_1 \leqslant D \leqslant D_1 + D_2, \qquad (5)$$

где $D_2 \geqslant D_1 (\ln D_1)^{-k}$; $k > 0$ — какая-либо константа. По каждому модулю D рассмотрим все характеры Дирихле χ_D и L-ряды $L(s, \chi_D)$; пусть $s=1/2+it$ (t реально). Составим шестой (ненормированный) момент для L-рядов:

$$\sum_{D_1 \leqslant D \leqslant D_1+D_2} \sum_{\chi_D} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi_D\right) \right|^6. \qquad (6)$$

Решение уравнений вида (4) при $k \leqslant 6$ удается при помощи оценки шестого (ненормированного) момента (6). Имеет место теорема, для которой можно указать и иные применения.

Теорема 2.

$$\sum_{D_1 \leqslant D \leqslant D_1+D_2} \sum_{\chi_D} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi_D\right)^6 \right| = B D_2 D_1 (|t|+1)^{l_0} \exp(\ln D_1)^{\varepsilon_0}, \qquad (7)$$

где B — ограниченная величина, $l_0 > 0$ — константа; $\varepsilon_0 > 0$ — сколь угодно малая константа.

Оценка (7) шестого момента для L-рядов позволяет вывести некоторые новые результаты в аддитивной проблеме делителей, а также получить достаточно хорошие сведения о числе решений уравнения

$$n = p + \varphi(x, y), \qquad (8)$$

где $\varphi(x, y)$ — любая целочисленная бинарная квадратичная форма.

Литература

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. — Acta Math., 1923, vol. 44, p. 1—70.
2. Линник Ю. В. — ДАН СССР, 1959, т. 124, № 1, с. 29—30.
3. Линник Ю. В. — ДАН СССР, 1958, т. 120, № 5, с. 960—962.

НОВЫЕ ВАРИАНТЫ И ПРИМЕНЕНИЯ ДИСПЕРСИОННОГО МЕТОДА В БИНАРНЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧАХ

ДАН СССР, 1961, т. 137, № 6, с. 1299—1302

«Дисперсионный метод» в бинарных аддитивных задачах, построенный и разработанный автором в работах [1—6], имел целью получение асимптотических формул для решения бинарных аддитивных уравнений вида

$$n = \varphi + D'\nu \quad (n > 0) \tag{1}$$

или

$$a = \varphi - D'\nu, \quad a > 0 \text{ или } a < 0, \tag{2}$$

где $\{\varphi\}$ образует (с возможными повторениями) некоторую последовательность натуральных чисел; D' пробегает некоторую «достаточно густую» систему натуральных чисел; ν — последовательность чисел, которая может быть весьма редкой, но достаточно хорошо распределенной в отрезках арифметических прогрессий с медленно возрастающими разностями. Задачи вида (1) можно назвать определенными, они возникают иногда при отсутствии условий на слагаемые, которые автоматически должны быть ограниченными, а задачи вида (2) будем называть неопределенными, они требуют ограничений на слагаемые.

Типичные примеры уравнений (1) и (2): $n = Q(x, y) + p_1 p_2^b$, $n = Q(x, y) + p_1 \cdot 2^b$, где $Q(x, y)$ — квадратичная форма; p_1, p_2 простые; b — константа.

При помощи того или иного варианта решета Эратосфена мы можем свести к (1) или (2) решения уравнений

$$n = \varphi + p, \quad a = \varphi - p, \tag{3}$$

где p — простые числа.

Типичными примерами будут:

$$n = x^2 + y^2 + p$$

(уравнение Харди—Литтлвуда);

$$-1 = xy - p \tag{4}$$

(проблема Е. К. Титчмарша об асимптотике числа делителей сдвинутых простых чисел);

$$1 = xy - x_1 x_2 \ldots x_k, \tag{5}$$

где $x_i \geqslant 1$ (аддитивная проблема делителей).

Основной схемой дисперсионного метода мы будем называть схему, изложенную в работе [4]. Остановимся на уравнении (1). Прежде всего из системы чисел D' выделяем числа, имеющие слишком много повторений. Число решений (1), отвечающее таким D', должно быть относительно небольшим, и мы должны иметь возможность отбросить его. Оставшиеся D' пусть имеют не более M повторений. Разбиваем отрезки изменения чисел D' и ν на пары узких зон (D), (ν) так, чтобы с допустимой погрешностью в числе решений (1) числа D' и ν можно было считать независимо изменяющимися в этих зонах.

Пусть $U(m) = \sum_{\varphi=m} 1$. Число решений (1) при D' и ν, изменяющихся в своих зонах, будет выражаться формулой

$$\sum_{D' \in (D)} \sum_{\nu \in (\nu)} U(n - D'\nu). \tag{6}$$

Пусть D — какое-либо целое число, не обязательно из системы чисел D'. При заданном D рассмотрим уравнение

$$n = \varphi + D\nu. \tag{7}$$

Дальнейшим шагом является нахождение тем или иным эвристическим путем ожидаемого числа решений (7)

$$A(n,\ D). \tag{8}$$

После этого составляется зональная дисперсия числа решений (1) при предполагаемой асимптотике $A(n, D)$. Она имеет вид

$$V' = \sum_{D' \in (D)} \Big(\sum_{\nu \in (\nu)} U(n - D'\nu) - A(n,\ D') \Big)^2. \tag{9}$$

Основной задачей далее является оценка дисперсии (9) сверху, поскольку далее имеется в виду применение очевидного аналога неравенства Чебышева для решения уравнения (1). Так как D' имеет не более M повторений, то имеем

$$V' \leqslant M \sum_{D'' \in (D)} \Big(\sum_{\nu \in (\nu)} U(n - D''\nu) - A(n,\ D'') \Big)^2, \tag{10}$$

где D'' пробегает те же значения, что и D', но без повторений. Следуя основной идее метода И. М. Виноградова в приложении к оценке двойных сумм, имеем

$$V' \leqslant MV, \text{ где } V = \sum_{D \in (D)} \Big(\sum_{\nu \in (\nu)} U(n - D\nu) - A(n,\ D) \Big)^2,$$

D пробегает все числа зоны (D) подряд (иногда выгоднее заставить D пробегать арифметическую прогрессию, заключающую значение D''). Число V будем называть полной зональной дисперсией. Оценка V сводится (см. [4]) к асимптотическому расчету числа решений «основного уравнения»

$$\nu_1 (n - \varphi_1) = \nu_2 (n - \varphi_2), \ \nu_1 \neq \nu_2, \ \varphi_i \in \{\varphi\} \tag{11}$$

при условиях

$$n - \varphi_1 \equiv 0 \pmod{\nu_2}, \ \frac{n - \varphi_2}{\nu_2} \in (D). \tag{12}$$

Мы изложим некоторые варианты основной схемы и их применение. Можно обобщить основное уравнение, рассматривая уравнение

$$n = \varphi + D'\nu + \beta(\nu), \tag{13}$$

где $\beta(\nu)$ — заданная целочисленная функция ν. Пример:

$$n = \varphi(x, y) + p_1 p_2^a + p_2^b,$$

где $\varphi(x, y)$ — квадратичная форма, p_i — простые, a, b — константы. Здесь в качестве полной зональной дисперсии надлежит взять

$$V = \sum_{D \in (D)} (U(n - D\nu - \beta(\nu)) - A(n, D))^2. \tag{14}$$

Тогда основное уравнение примет вид

$$\nu_1\varphi_1 - \nu_2\varphi_2 = n(\nu_1 - \nu_2) + \beta(\nu_1)\nu_2 - \beta(\nu_2)\nu_1, \ \nu_1 \neq \nu_2 \tag{15}$$

при дополнительных условиях

$$n - \varphi_1 - \beta(\nu_2) \equiv 0 \pmod{\nu_2}, \frac{n - \varphi_1 - \beta(\nu_2)}{\nu_2} \in (D). \tag{16}$$

Уравнение (15) целесообразно решать при закрепленных ν_1, ν_2, собирая затем решения по парам ν_1, ν_2, $(\nu_1 \neq \nu_2)$.

При расчете полной зональной дисперсии наибольшую трудность представляет вывод асимптотики решений основного уравнения (11) (или (15)), но довольно трудоемкими и громоздкими являются расчеты, связанные с нахождением $A(n, D)$ и обработкой содержащих его членов. Ввиду этого весьма полезным оказывается понятие дисперсии разности и ковариации решений. Пусть даны два уравнения,

$$n_1 = \varphi + D'\nu', \tag{17}$$

и независимое от него уравнение

$$n_2 = \psi + D''\nu'', \tag{18}$$

где D', D'' независимо пробегают одну и ту же систему чисел; то же касается ν', ν''; $\{\varphi\}$, $\{\psi\}$ независимо пробегают одни и те же последовательности натуральных чисел. Пусть для простоты D', D'' не имеют повторений. Зональной дисперсией разности решений (17) и (18) назовем

$$V' = \sum_{D' \in (D)} \Big(\sum_{\nu \in (\nu)} U_1(n_1 - D'\nu) - \sum_{\nu \in (\nu)} U_2(n_2 - D'\nu) \Big)^2, \tag{19}$$

где $U_1(m) = \sum_{\varphi = m} 1$; $U_2(m) = \sum_{\psi = m} 1$. Имеем $V' \leqslant V$, где V — п о л н а я   з о н а л ь н а я   д и с п е р с и я   р а з н о с т и

$$V = \sum_{D \in (D)} \Big(\sum_{\nu \in (\nu)} U_1(n_1 - D\nu) - \sum_{\nu \in (\nu)} U_2(n_2 - D\nu) \Big)^2. \tag{20}$$

Обратим внимание, что здесь отсутствует величина $A(n, D)$, отыскание и обработка которой требуют громоздких вычислений. Основную роль в расчете (20) играет ковариация числа решений

$$\operatorname{cov}(n_1, n_2) = \sum_{D \in (D)} \sum_{\nu \in (\nu)} U_1(n_1 - D\nu) \sum_{\nu \in (\nu)} U_2(n_2 - D\nu). \qquad (21)$$

Для расчета ковариации основную роль играет уравнение

$$\nu_1\varphi_1 - \nu_2\varphi_2 = \nu_1 n_1 - \nu_2 n_2 \qquad (22)$$

при условиях

$$n - \varphi_1 \equiv 0 \pmod{\nu_2}, \quad (n - \varphi_1)/\nu_2 \in D.$$

Часто удается выделить по данному числу n_1 такие просто описываемые числа n_2, для которых дисперсия разности чисел решений относительно мала. Аналог неравенства Чебышева показывает тогда, что уравнения (17) и (18) с допустимой относительной погрешностью имеют одинаковое число решений. В этом случае число n_2 назовем когерентным с числом n_1. Если n' пробегает когерентные с n_1 числа, то вместо бинарной задачи (17) достаточно решить тернарную аддитивную задачу

$$n' - \varphi - D'\nu = 0. \qquad (23)$$

Выгода такого подхода в том, что не нужно рассчитывать $A(n, D)$ и обрабатывать содержащие его члены.

Приведем некоторые применения нового варианта дисперсионного метода. Для аддитивной проблемы делителей, трактовавшейся в [3], получаем формулу

$$\sum_{m \leqslant n} \tau(m+1)\tau_k(m) = k!\, A_n S_k n (\ln n)^k + Bn (\ln n)^{k-1} (\ln \ln n)^{k'}, \qquad (24)$$

где A_n, S_k — константы, поясненные в [3].

Для проблемы делителей сдвинутых простых чисел Е. К. Титчмарша получаем формулу

$$\sum_{p \leqslant n} \tau(p-1) = \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4} n + R(n), \qquad (25)$$

где $R(n) = O(n/(\ln n)^\alpha)$ и $\alpha > 0$ — любая константа, меньшая 1.

Литература

1. Линник Ю. В. — ДАН СССР, 1958, т. 120, № 5, с. 960—962.
2. Линник Ю. В. — ДАН СССР, 1958, т. 123, № 6, с. 975—977.
3. Linnik Yu. V. — Proceedings Intern. Congr. Math. (Edinburgh, 1958). Cambridge, 1960, p. 313—321.
4. Линник Ю. В. — Мат. сб., 1960, т. 51, вып. 2, с. 129—154.
5. Linnik Yu. V. — Maguar tud. akad. mat. kutató int. kozl., 1959, vol. 4, № 3—4, p. 225—258.
6. Линник Ю. В. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, т. 24, № 5, с. 629—706.

БИНАРНЫЕ АДДИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ С ЭРГОДИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ РЕШЕНИЙ

Совместно с Б. М. Бредихиным

ДАН СССР, 1966, т. 166, № 6, с. 1267—1269

1. В работах [1, 2] была найдена асимптотика для числа решений $Q(n)$ уравнения Харди—Литтлвуда

$$p + \xi^2 + \eta^2 = n \tag{1}$$

(p — простое число; ξ, η — целые числа). Для достаточно больших n получилась формула

$$Q(n) = A_0 \prod_{p \mid n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2 - p + \chi_4(p)} \frac{1}{\ln n} S_K(n) + R(n), \tag{2}$$

где $A_0 = \prod\limits_{p>2} (1 + \chi_4(p)/p(p-1))$, $S_K(n)$ — площадь круга K радиуса $\sqrt{n}$, $R(n) = O(n(\ln n)^{-1.042})$.

В этой заметке мы обобщим уравнение (1) в плане, который удобно трактовать с геометрической и эргодической точки зрения.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$p + N(\xi + i\eta) = n, \tag{3}$$

где $\xi + i\eta$ — гауссовы числа (целые точки на комплексной плоскости). Следовательно, каждому решению уранения (1) мы можем сопоставить на основании (3) целую точку (ξ, η) плоскости, причем эта точка будет лежать в круге K радиуса $\sqrt{n}$.

Естественно поставить следующий вопрос. Пусть в круге K выделена некоторая область Ω, увеличивающаяся вместе с кругом K. Спрашивается, какова асимптотика для числа $Q_\Omega(n)$ тех решений уравнения (1), каждому из которых ставится в соответствие точка (ξ, η), лежащая в Ω? Имея в виду ввести при исследовании этой задачи элементарные эргодические понятия, будем рассматривать точки (ξ, η) решений уравнения (3) как траекторию точки, движущейся в круге K с постоянной скоростью. Спрашивается, сколько времени эта движущаяся точка будет пребывать в заданной области Ω? Естественно ожидать, что $Q_\Omega(n)$ (или время пребывания точки в Ω) должно быть асимптотически пропорционально площади S_Ω области Ω. Введем метод, позволяющий ответить на этот вопрос в случае, когда площадь области Ω не слишком мала по сравнению с площадью круга K.

2. Пусть сначала область Ω совпадает с Δ, где Δ — круговой сектор радиуса $\sqrt{n}$ с заданным углом раствора $\psi = \psi_2 - \psi_1$, $c_1 (\ln\ln n)^{-(1/2-\eta_1)} \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, $c_1 > 0$ — константа, η_1 — малое положительное число.

Теорема 1. *При* $n \to \infty$.

$$Q_\Delta(n) = A_0 \prod_{p|n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)} \frac{1}{\ln n} S_\Delta(n)(1+\varepsilon(n)), \tag{4}$$

где $\varepsilon(n) = O((1/(\psi_2-\psi_1))(\ln\ln n)^{-1/2+\eta})$, $0<\eta<\min\{1/2, \eta_1\}$.

Оценка снизу для $Q_\Delta(n)$ получена другим методом А. А. Полянским [3].

Теорему 1 можно применять для изучения поведения решений уравнения (1) в других областях Ω. В частности, представляет интерес случай, когда звездообразная область Ω ограничена замкнутым гладким контуром $C: r = r(\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\sqrt{n}/(\ln n)^\gamma \leqslant r \leqslant \sqrt{n}$, $\gamma = 0.04$. $|dr/d\varphi| \leqslant c_2\sqrt{n}$. При этих условиях имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *При* $n \to \infty$

$$Q_\Omega(n) = A_0 \prod_{p|n} \frac{(p-1)(p-\chi_4(p))}{p^2-p+\chi_4(p)} \frac{1}{\ln n} S_\Omega(n)(1+\varepsilon(n)), \tag{5}$$

где $\varepsilon(n) = O((\ln\ln n)^{-\eta_2})$, $\eta_2 = \eta_1 - \eta$.

Теорема 2 выводится из теоремы 1 с помощью известного приема [4].

Следствие теоремы 2.

$$Q_\Omega(n)/Q(n) \sim S_\Omega(n)/S_K(n) \quad (n \to \infty). \tag{6}$$

Асимптотическое равенство (6) получается из (2) и (5) и довольно ясно обнаруживает эргодический характер теоремы 2.

3. Изложим схему доказательства теоремы 1.

Воспользуемся тем фактом, что каждое гауссово число $\alpha = \xi + i\eta$ можно представить в виде $\alpha = i^s \mathfrak{p}_1^{\alpha_1}\mathfrak{p}_2^{\alpha_2}\ldots\mathfrak{p}_l^{\alpha_l}$, где $s = 0, 1, 2, 3$; $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_l$ — простые числа гауссова поля, лежащие в первом квадранте.

Круг K разобьем на $K_0 = 2K_1K_2$ равных секторов δ_i $(i = 1, 2, \ldots, K_0)$ с углом раствора $\varepsilon = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}$, где $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon, \ldots, \varepsilon_{K_0} = K_0\varepsilon$; $\varepsilon = 2\pi/K_0$. Можно взять $K_1 = K_2 = 2^{R-1}$, $K_0 = [(\ln\ln n)^{1-\eta}]$, $0 < \eta < 1/2$. Займемся преобразованием

$$Q(n) = \sum_{p+m=n} r(m), \tag{7}$$

где

$$r(m) = \sum_{\xi^2+\eta^2=m} 1 = 4\sum_{x|m} \chi_4(x).$$

Множество чисел m, удовлетворяющих (7), разобьем на два класса. В класс A включаем те m, в разложение которых входит по крайней мере одно простое число $p_i \equiv 1 \pmod 4$ точно в первой степени, такое, что $p_i = \mathfrak{p}_i\bar{\mathfrak{p}}_i$, $\mathfrak{p}_i \in \delta_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, K_0/4$

(рассматриваемые δ_i покрывают первый квадрант). В класс B включим остальные m.

Таким образом,

$$Q(n) = \sum_{m \in A} {}_A + \sum_{m \in B} {}_B. \tag{8}$$

Для оценки суммы $\sum_B$ сверху привлекаются результаты из работ [3—5], связанные с методами решета. Получаем

$$\sum\nolimits_B = O\left(K_0 \frac{n (\ln \ln n)^3}{(\ln n)(\ln n)^{1/K_0}}\right). \tag{9}$$

Для $m \in A$ уже имеет место эргодичность распределения целых точек на окружности $\xi^2 + \eta^2 = m$.

В самом деле, рассмотрим K_1 равных секторов раствора $2\varphi = 2K_2\varepsilon$, каждый из которых составляется из $2K_2$ последовательных секторов δ_i, начиная с сектора δ_{K_0} (против часовой стрелки). Взяв фиксированное число $m \in A$, мы можем его представить в виде

$$m = \xi^2 + \eta^2 = (\xi + i\eta)(\xi - i\eta) = \mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{R-2}\mathfrak{q}_j\bar{\mathfrak{p}}_0\bar{\mathfrak{p}}_1 \ldots \bar{\mathfrak{p}}_{R-2}\bar{\mathfrak{q}}_j, \tag{10}$$

где $N(\mathfrak{p}_i) \equiv 1 \pmod 4$, среди $\mathfrak{p}_i$ нет равных, $(N(\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{R-2}), N(\mathfrak{q}_j)) = 1$ и, наконец,

$$2^i\varphi - \varepsilon \leqslant \operatorname{arc} \delta_i \leqslant 2^i\varphi,$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, R-2$.

Из (7) и (10) следует, что

$$r(m) = 2^{R-1} r(q), \quad \text{где} \quad q = N(\mathfrak{q}_j).$$

Поэтому все $r(m)$ решений $\xi + i\eta$ уравнения (10) получатся, если взять какое-нибудь одно решение

$$\xi + i\eta = \mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{R-2}\mathfrak{p}_j$$

и выполнить «повороты»

$$\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{p}_i \to \bar{\mathfrak{p}}_i, \quad \mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_k \to \bar{\mathfrak{p}}_i\bar{\mathfrak{p}}_k, \ldots, \mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{R-2} \to \bar{\mathfrak{p}}_0\bar{\mathfrak{p}}_1 \ldots \bar{\mathfrak{p}}_{R-2}$$

при фиксированном $\mathfrak{q}_j$, а затем изменять и $\mathfrak{q}_j$, полагая $j = 1, 2, \ldots, r(q)$. При этом получается множество чисел β вида

$$\beta = \tilde{\mathfrak{p}}_0\tilde{\mathfrak{p}}_1 \ldots \tilde{\mathfrak{p}}_{R-2}, \quad \text{где} \quad \tilde{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{p}_i \quad \text{или} \quad \bar{\mathfrak{p}}_i.$$

Числа $\alpha = \beta\mathfrak{q}_j$ можно рассматривать как точки «хорошей траектории» соответствующего решения. «Хороших траекторий» будет подавляющее большинство, ибо число «плохих траекторий» для решений оценивается формулой (9). Имеем

$$\operatorname{arc} \beta = (\pm 1 \pm 2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm 2^{R-2})\varphi + O(R\varepsilon). \tag{11}$$

Остаточный член в (11) будет малой величиной по сравнению с φ. Числа вида $\pm 1 \pm 2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm 2^{R-2}$ представляют все нечетные числа от $-(2^{R-1}-1)$ до $2^{R-1}-1$ точно по одному разу. Принимая во внимание, что $(2^{R-1}-1)\varphi < \pi$, мы можем занумеровать числа β в порядке возрастания $\arg\beta$. В результате получим последовательность чисел

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2^{R-1}-1},$$

распределенную равномерно на окружности $\xi^2+\eta^2=m/q$ (с точностью до малых величин). Отсюда мы в состоянии вывести оценку для числа $T_\Delta(m)$ решений уравнения (10), попадающих в заданный сектор Δ. Получим

$$T_\Delta(m) = \frac{\psi}{2\pi} r(m)\left(1 + O\left(\frac{1}{\psi(\ln\ln n)^{1/2-\eta}}\right)\right), \tag{12}$$

где $m \in A$. Так как

$$Q_\Delta(n) = \sum_{p+m=n} T_\Delta(m) = \sum_{p+m=n,\ m\in A} T_\Delta(m) + O\Big(\sum_{m\in B} B\Big),$$

то с помощью (1), (8), (9) и (12) мы завершаем доказательство теоремы.

4. Аналогичным путем можно получить асимптотику для обобщенного уравнения Харди—Литтлвуда

$$p + \varphi(\xi, \eta) = n, \tag{13}$$

где $\varphi(\xi, \eta)$ — положительная квадратичная форма.

Сходные с изложенными эргодические свойства имеют решения уравнений вида $a_m+\varphi(\xi, \eta)=n$, где $\{a_m\}$ — последовательность, достаточно хорошо распределенная в прогрессиях; $\varphi(\xi, \eta)$ — положительная квадратичная форма.

Выражаем благодарность А. Г. Постникову и Г. Г. Бабаеву за ценные советы.

Литература

1. Линник Ю. В. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, т. 24, № 5, с. 629—706.
2. Бредихин Б. М. — Вестник ЛГУ, 1962, № 19. Сер. мат., мех., астрон., вып. 4, с. 133—137.
3. Полянский А. А. — ДАН СССР, 1966, т. 168, № 1, с. 25—27.
4. Кубилюс И. П. — Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук, 1950, вып. 19, с. 40—52.
5. Виноградов А. И. — ДАН СССР, 1956, т. 109, № 4, с. 683—686.
6. Hooley C. — Acta Math., 1957, vol. 97, № 3—4, p. 189—210.
7. Бредихин Б. М. — Изв. высш. учеб. завед. Математика, 1960, № 6, с. 40—49.

АСИМПТОТИКА И ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА

Совместно с Б. М. Бредихиным

Мат. сб., 1966, т. 71, вып. 2, с. 145—161

Введение

В работах [1, 2] мы наметили путь изучения асимптотики числа решений некоторых диофантовых уравнений на основе эргодических соображений, связанных с «траекторией» этих решений. Объектом такого подхода могут быть уравнения вида

$$a_k + \varphi_\rho(\xi, \eta) = n. \tag{0. 1}$$

Здесь $\{a_k\}$ — числовая последовательность, достаточно хорошо распределенная в арифметических прогрессиях (допускающая применение к ней решета Эратосфена); φ (ξ, η) пробегает последовательность чисел, представимых заданным родом положительных бинарных квадратичных форм.

В случае, когда формы примитивны, можно воспользоваться соответствием между квадратичными формами и идеалами. В результате уравнение (0. 1) сводится к уравнению, которое записывается на языке теории квадратичных полей в следующей удобной для дальнейших рассуждений форме:

$$a_k + N_\rho(\mathfrak{a}) = n. \tag{0. 2}$$

В уравнении (0. 2) $N_\rho(\mathfrak{a})$ пробегает последовательность чисел, являющихся нормами целых идеалов $\mathfrak{a}$ заданного рода R. Следовательно, каждому решению уравнения (0. 2) мы можем сопоставить целый идеал $\mathfrak{a} \in R$, удовлетворяющий этому уравнению при соответствующем значении a_k. Выделим в каноническом разложении идеала $\mathfrak{a}$ некоторое количество простых идеалов $\mathfrak{p}_i$ первой степени (если только они имеются). Тогда этот идеал будет представлен в виде

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_l\mathfrak{q}. \tag{0. 3}$$

Для подавляющего большинства идеалов рода R в их каноническом разложении содержится достаточно много простых идеалов первой степени, точнее, в разложении (0. 3) для таких идеалов среди $\mathfrak{p}_i$ имеются представители из каждого класса в достаточном количестве.

С данным идеалом $\mathfrak{a}$ свяжем его «траекторию». Произведем отображение, сохраняющее норму идеала $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{p}_i \to \tilde{\mathfrak{p}}_i$, где $\tilde{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{p}_i$ или $\tilde{\mathfrak{p}}_i = \mathfrak{p}'_i$ $(i=1, 2, \ldots, l)$ ($\mathfrak{p}'_i$ — сопряженный к $\mathfrak{p}_i$ идеал). Перемножение полученных образов дает нам 2^l идеалов вида $\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{p}}_1\tilde{\mathfrak{p}}_2 \ldots \tilde{\mathfrak{p}}_l\mathfrak{q}$, которые удовлетворяют уравнению (0. 2) и принадлежат определенным классам рода R. Идеалы $\tilde{\mathfrak{a}}$ будем называть точками траектории. Мы можем представить себе, что движение точки траектории происходит с постоянной скоростью. Следуя элементарным понятиям эргодической теории, будем считать траекторию «хорошей», если время пребывания ее точек в каждом классе идеалов обратно пропорционально количеству классов идеалов в заданном роде R. Иные траектории, например, такие, где вообще мало простых множителей $\mathfrak{p}_i$, будем считать «плохими».

Такое разбиение траекторий на два класса позволяет поставить и решить следующую задачу: из полного числа решений уравнения (0. 2) выделить те, которым соответствуют целые идеалы $\mathfrak{a}$, удовлетворяющие этому уравнению и принадлежащие заданному классу идеалов заданного рода, и найти асимптотику для числа таких решений. Для этой цели сначала при помощи решета Эратосфена отсеиваем те решения уравнения (0. 2), которым заведомо отвечают плохие траектории соответствующего идеала $\mathfrak{a}$. Будем называть их решениями с плохими траекториями. Оставшиеся решения, составляющие подавляющее большинство, будут иметь хорошие траектории (что и соответствует представлениям об эргодичности). Это свойство мы существенно используем для нахождения нужной асимптотики. Разумеется, при этом мы должны знать асимптотику для числа решений основного уравнения (0. 2).

К сожалению, в настоящее время мы умеем находить такую асимптотику лишь для немногих случаев. Отметим некоторые из них.

I. $a_k=ck^2$ (задача о тернарных квадратичных формах).

II. $a_k=\psi(\xi', \eta')$, где $\psi(\xi', \eta')$ — какая-либо бинарная квадратичная форма (задача о кватернарных квадратичных формах).

III. $a_k=p$, где p — простое число (обобщенная проблема Харди—Литтлвуда).

В этой статье мы будем рассматривать только последнюю проблему. Мы изложим метод для нахождения асимптотики числа решений уравнения

$$p+\varphi(\xi, \eta)=n, \tag{0. 4}$$

где p пробегает простые числа, $\varphi(\xi, \eta)=a\xi^2+b\xi\eta+c\eta^2$ — заданная положительная квадратичная форма с дискриминантом, отличным от полного квадрата. Уравнение (0. 4) является естественным обобщением уравнения Харди—Литтлвуда, получающегося из уравнения (0. 4) при $\varphi(\xi, \eta)=\xi^2+\eta^2$ и исследованного в работах [3] и [4].

В работе [5] была доказана разрешимость уравнения (0. 4) для достаточно больших n и получена оценка снизу для числа решений уравнения (0. 4). Однако оставался открытым вопрос о существовании асимптотической формулы для числа решений уравнения (0. 4). Основная трудность заключалась в том, что общая форма $\varphi(\xi, \eta)$, вообще говоря, «многоклассна», в связи с чем уравнение $\varphi(\xi, \eta)=m$ мы умеем решать только для случая, когда значения $\varphi(\xi, \eta)$ пробегают целый род квадратичных форм. Переход к индивидуальной форме осуществляется поэтому с потерей некоторого процента асимптотики.

В заметке [2] дана краткая схема вывода асимптотической формулы для числа решений уравнения (0. 4). Эта схема является специализацией применительно к уравнению (0. 4) вышеизложенных соображений об эргодических свойствах решений уравнений вида (0. 1). Асимптотика в заметке [2] получена для четных n ($n \to \infty$) и с понижающим множителем в остаточном члене (по сравнению с главным) порядка $O((\ln n)^{-\eta})$, где η — некоторая константа, $0 < \eta < 1$.

В настоящей работе выводится асимптотическая формула для числа решений уравнения (0. 4) при любых целых n ($n \to \infty$) и с понижающим множителем в остаточном члене порядка $O((\ln n)^{-\eta})$, где η — константа, зависящая от числа классов квадратичных форм заданного дискриминанта. При этом с целью более ясной демонстрации метода мы ограничиваемся рассмотрением примитивных форм с отрицательным дискриминантом, являющимся дискриминантом квадратичного поля.

Примем следующие обозначения и терминологию. Символ O имеет обычное значение. Буквы $c_1, c_2, \ldots$ и постоянные в символе O будут обозначать положительные константы, зависящие только от заданной квадратичной формы; C_0 — достаточно большое положительное число; n — сколь угодно большое положительное целое число (основной параметр работы); p — простое число; $\varphi(m)$ — функция Эйлера; $\mu(m)$ — функция Мёбиуса; $\tau(m)$ — количество делителей числа m; (m_1, m_2) — наибольший общий делитель чисел m_1 и m_2; $K(\sqrt{d})$ — квадратичное поле, где K — поле рациональных чисел, d — отрицательное целое рациональное число, свободное от квадратов; D — дискриминант поля $K(\sqrt{d})$; $P = p_1 p_2 \ldots p_t$ — произведение всех различных простых делителей дискриминанта D; $\chi(x)$ — квадратичный характер $(\mathrm{mod}\ |D|)$ поля $K(\sqrt{d})$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{q}$ — целые идеалы поля $K(\sqrt{d})$; $\mathfrak{p}$, π — простые идеалы этого поля; $N(\mathfrak{a})$ — норма идеала $\mathfrak{a}$; $\sim$ — знак эквивалентности идеалов; $\mathfrak{a}'$ — символ сопряженного идеала; A, B, C — классы идеалов, G — группа классов идеалов квадратичного поля $K(\sqrt{d})$; $R = R(A)$ — род идеалов, определяемый классом $A \in R$; R_σ — род идеалов, зависящий от σ; G_0 — главный род идеалов; h — число классов в G, t_0 — число классов в G_0, g — число родов; $\left(\frac{a,\ b}{p}\right)$ — символ Гильберта, где a и b — рациональные числа.

В нашей работе существенно используются некоторые сведения из арифметической теории квадратичных форм, которые содержатся в монографиях [6—8].

§ 1. Формулировка основных результатов

Будем рассматривать уравнение (0. 4) в случае, когда $\varphi(\xi, \eta)$ — заданная положительная примитивная форма с дискриминантом $D = b^2 - 4ac$, совпадающим с дискриминантом квадратичного поля $K(\sqrt{d})$; ξ и η независимо пробегают целые числа при условии $0 < \varphi(\xi, \eta) < n$, которое в силу положительности формы $\varphi(\xi, \eta)$ выполняется автоматически. Введем обозначение: $\varphi(\xi, \eta) = \varphi_K(\xi, \eta)$.

Пусть $Q(n) = \sum\limits_{p+\varphi(\xi, \eta)=n} 1$ — число решений уравнения (0. 4) при указанных условиях, и пусть ε_0 является наименьшим положительным корнем уравнения

$$\frac{1}{h} - 2\varepsilon \ln 2 - \varepsilon + \varepsilon \ln \varepsilon = 0. \tag{1. 1}$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема А. *Если $n \to \infty$, то*

$$Q(n) = C_\varphi(n)\, A_D(n) \frac{n}{\ln n} + O(n(\ln n)^{-1-\gamma}), \tag{1. 2}$$

где $C_\varphi(n) \geqslant c_0 > 0$, константа c_0 зависит только от дискриминанта формы $\varphi(\xi, \eta)$,

$$A_D(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{|D|}} \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid Dn} \frac{(p-1)(p-\chi(p))}{p^2 - p + \chi(p)}$$

и $\gamma = \min\{\varepsilon_1;\ 0.042\}$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 \ln 2$.

Здесь $C_\varphi(n)$ является суммой особого ряда, а именно:

$$C_\varphi(n) = \frac{2g}{\varphi(|D|)} \sum_{\substack{\sigma \mid P \\ (\sigma, n)=1}} \frac{1}{\sigma} \sum_{L \in (L)_\sigma} \sum_{\substack{r=1,\ (r, n)=1 \\ (n-r^2\sigma L,\ D)=1}}^{\infty} \frac{1}{r^2}, \tag{1. 3}$$

где $(L)_\sigma$ — набор чисел L в количестве $\varphi(|D|)/2g$, причем $0 < L < |D|$, $(L, D) = 1$, $\chi(L) = 1$. Набор $(L)_\sigma$ зависит от формы $\varphi(\xi, \eta)$ и числа σ. Мы избегаем явной формы выражения этой зависимости из-за ее громоздкости (в неявном виде она содержится в рассуждениях § 2). $r = \prod\limits_{p \mid P} p^{\alpha_p}$, $\alpha_p \geqslant 0$. Можно принять $c_0 = 1/P^2$ и $\varepsilon_1 = \ln 2/4h \ln(h+1)$. Выполняются также неравенства

$$c_1 (\ln \ln n)^{-1} < A_D(n) < c_2 \ln \ln n. \tag{1. 4}$$

Из соотношений (1. 2) и (1. 4) следует, что теорема А дает асимптотику для числа решений обобщенного уравнения Харди-Литтлвуда (0. 4) в рассматриваемом случае. Отметим интересное следствие этой теоремы.

Следствие теоремы А. *Всякое достаточно большое натуральное число n представимо в виде $n = p + \varphi(\xi, \eta)$, где $\varphi(\xi, \eta) = \varphi_K(\xi, \eta)$.*

Этот результат является усилением следствия теоремы 5.1.1 из работы [5] применительно к формам $\varphi_K(\xi, \eta)$, поскольку теперь не требуется, чтобы число n было взаимно-простым с фиксированным числом r, определяемым формой $\varphi(\xi, \eta)$.

В ряде случаев особый ряд (1. 3) вычисляется без труда. Пусть, например, $n \to \infty$ по последовательности значений $n = |D| m$, где m пробегает натуральные числа. Для таких значений n условие $(|D| m - r^2 \sigma L, D) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $r = 1$ и $\sigma = 1$. Отсюда

$$C_{\varphi}(n) = \frac{2g}{\varphi(|D|)} \sum_{L \in (L_1)} 1 = 1.$$

Таким образом, если $n = |D| m \to \infty$, то

$$Q(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{|D|}} \prod_{p} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid Dn} \frac{(p-1)(p-\chi(p))}{p^2 - p + \chi(p)} \frac{n}{\ln n} + \\ + O(n (\ln n)^{-1-\gamma}).$$

Задачу нахождения асимптотики для $Q(n)$ удобно сформулировать в терминах теории квадратичных полей. Устанавливая соответствие между формами вида $\varphi_K(\xi, \eta)$ и идеалами поля $K(\sqrt{d})$, мы заданной форме $\varphi(\xi, \eta)$ поставим в соответствие класс идеалов A_{φ}. Тогда вопрос о представлении числа m формулой $\varphi(\xi, \eta)$ сводится к вопросу о существовании целых идеалов $\mathfrak{a}$ поля $K(\sqrt{d})$ с нормой m, принадлежащих классу $A = A_{\varphi}^{-1}$, точнее говоря,

$$\sum_{\varphi(\xi, \eta) = m} 1 = w \sum_{N(\mathfrak{a}) = m,\ \mathfrak{a} \in A} 1, \tag{1.5}$$

где

$$w = \begin{cases} 6 \text{ при } D = -3, \\ 4 \text{ при } D = -4, \\ 2 \text{ при } D < -4. \end{cases}$$

Таким образом,

$$Q(n) = w \sum_{p + N(\mathfrak{a}) = n,\ \mathfrak{a} \in A} 1. \tag{1.6}$$

Рассмотрим род $R = R(A)$. Положим

$$\tilde{Q}(n) = w \sum_{p + N(\mathfrak{a}) = n,\ \mathfrak{a} \in R} 1, \tag{1.7}$$

где $\mathfrak{a}$ пробегает целые идеалы по всем классам рода R.

Теорема В. *Если $n \to \infty$, то*

$$\tilde{Q}(n) = t_0 C_{\varphi}(n) A_D(n) \frac{n}{\ln n} + O(n (\ln n)^{-1.042}), \tag{1.8}$$

где $C_{\varphi}(n)$ и $A_D(n)$ определены в (1.2) и (1.3), t_0 — число классов идеалов в роде.

Доказательство теоремы B основано на дисперсионном методе, разработанном в статьях [9] и [5]. Оно может быть также получено с помощью новейших результатов Э. Бомбьери [10], существенно усилившего и упростившего метод «большого решета». В случае, когда $t_0=1$, т. е. в случае одноклассных родов форм, теорема В уже дает асимптотику в обобщенной проблеме Харди—Литтлвуда. В общем случае переход от решения уравнения (0. 4) в роде к решению этого уравнения для индивидуальной формы $\varphi(\xi, \eta)$ осуществляется с помощью следующей теоремы.

Теорема С. *Если* $n \to \infty$, *то*

$$Q(n)=\frac{1}{t_0}\tilde{Q}(n)+O(n(\ln n)^{-1-\gamma}), \tag{1.9}$$

где $\gamma=\min\{\varepsilon_1;\ 0.042\}$, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_0 \ln 2$ *и* ε_0 *определено в* (1. 1).

Теорема А немедленно следует из соотношений (1. 8) и (1. 9). Поэтому справедливость теоремы А будет установлена, как только будут доказаны теоремы В и С.

§ 2. Доказательство теоремы В

Всякий целый идеал $\mathfrak{a} \in R(A)$ однозначно представим в виде

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}_1^2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c} \tag{2.1}$$

с $N(\mathfrak{b}_1^2\mathfrak{b}_2)$, состоящей из простых делителей дискриминанта D, и $(N(\mathfrak{c}), D)=1$; $\mathfrak{b}_2$ — бесквадратный идеал.

Пусть A, B и C — классы, которым принадлежат соответственно идеалы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_2$ и $\mathfrak{c}$. Так как $\mathfrak{b}_1^2\mathfrak{b}_2 \sim \mathfrak{b}_2$, то $A=BC$, откуда

$$R(A)=R(B)R(C) \tag{2.2}$$

(здесь употреблена групповая запись для операций умножения классов и родов).

Так как все идеалы с данной нормой принадлежат одному и тому же роду, то при фиксированной норме $\sigma=N(\mathfrak{b}_2)$ и заданном роде $G(A)$ род $R_\sigma=R(C)$ будет однозначно определяться равенством (2. 2). Известно [6], что

$$f(m)=\sum_{N(\mathfrak{a}),\ \mathfrak{a}\in R} 1=\sum_{x\mid m}\chi(x), \tag{2.3}$$

где x пробегает все делители натурального числа m. Поэтому для m, содержащего только простые делители дискриминанта D, имеет место равенство

$$\sum_{N(\mathfrak{b})=m,\ \mathfrak{b}\in R(B)} 1=1. \tag{2.4}$$

Из (1. 7), (2. 1), (2. 2) и (2. 4) находим, что

$$\tilde{Q}(n)=w\sum_{\sigma\mid P}\tilde{Q}_\sigma(n), \tag{2.5}$$

где

$$\tilde{Q}_\sigma(n) = \sum_{\substack{p+r^2\sigma N(\mathfrak{c})=n \\ \mathfrak{c}\in R_\sigma,\ (N(\mathfrak{c}),\ D)=1}} 1. \tag{2.6}$$

В соотношении (2. 6) r пробегает натуральные числа, содержащие в каноническом разложении только степени простых делителей из P; σ — фиксированный делитель P.

Для выражения условий принадлежности идеалов заданному роду воспользуемся символом Гильберта. Тогда из соотношений (2. 3) и (2. 6) получим

$$\tilde{Q}_\sigma(n) = \sum_{p+r^2\sigma m=n} \sum_{x \mid m} \chi(x), \tag{2.7}$$

где m пробегает натуральные числа, удовлетворяющие условиям

$$(m,\ D)=1,\ \chi(m)=1, \left(\frac{m,\ D}{p}\right) = e_p(R_\sigma) \text{ для } p \mid D. \tag{2.8}$$

В (2. 8) числа $e_p(R_\sigma)$ являются инвариантами рода R_σ.

С помощью свойств символа Гильберта условиям (2. 8) можно придать следующий вид: $m \equiv L \pmod{|D|}$, где L пробегает некоторый набор $(L)_\sigma$ в количестве $\varphi(|D|)/2g$ значений, причем $0 < L < |D|$, $(L,\ D)=1$, $\chi(L)=1$.

В результате из (2. 7) следует, что

$$\tilde{Q}_\sigma(n) = \sum_{L\in(L)_\sigma} \tilde{Q}_L(n), \tag{2.9}$$

где

$$\tilde{Q}_L(n) = \sum_{\substack{p+r^2\sigma xy=n \\ xy\equiv L \pmod{|D|}}} \chi(x) \tag{2.10}$$

с фиксированными σ и L.

Суммы вида (2. 10) изучены в работе [5] с помощью дисперсионного метода и метода К. Хооли [11], дополненного оценками П. Эрдеша [12].

Лемма 1 (см. [5], (5. 4. 23)). *Пусть $\chi(x)$ — действительный неглавный характер с заданным положительным периодом $\tilde{d}$;*

$$0 < L < \tilde{d},\ (L,\ \tilde{d})=1,\ \chi(L)=1.$$

K — целое число, подчиненное условиям

$$1 \leqslant K \leqslant (\ln n)^{C_0},\ (n-KL,\ \tilde{d}K)=1.$$

Пусть

$$Q_L(n) = \sum_{\substack{p+Kxy=n \\ xy\equiv L \pmod{\tilde{d}}}} \chi(n).$$

Тогда

$$Q_L(n) = \frac{2}{\varphi(\bar{d})\,K} L(1, \chi) \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid \bar{d}n} \frac{(p-1)(p-\chi(p))}{p^2 - p + \chi(p)} \times$$
$$\times \prod_{p \mid K,\, p \nmid \bar{d}n} \frac{p^2}{p^2 - p + \chi(p)} \frac{n}{\ln n} + O(n(\ln n)^{-1.0425}). \qquad (2.11)$$

Вычислим сумму (2. 10) с помощью леммы 1. Для этого рассмотрим сумму (2. 10) с дополнительными условиями

$$(r, n) = 1, \ (\sigma, n) = 1, \ r^2\sigma \leqslant (\ln n)^{C_0},$$

вносящими в (2. 10) погрешность

$$O\left(n (\ln n)^{-C_0/2}\right). \qquad (2.12)$$

Для разрешимости уравнения (2. 10) необходимо добавить еще одно условие:

$$(n - r^2\sigma L,\ r^2\sigma D) = (n - r^2\sigma L,\ D) = 1.$$

Условия леммы 1 будут выполнены, если в этой лемме положить $K = r^2\sigma$, $\bar{d} = |D|$. Суммируя полученный результат по r при условии $r^2\sigma \leqslant (\ln n)^{C_0}$, примем во внимание, что в остаточный член формулы (2. 11) будет при этом внесена дополнительная погрешность

$$\sum_{r^2\sigma \leqslant (\ln n)^{C_0}} 1 \leqslant \sum_{r \leqslant (\ln n)^{C_0}} 1 = O((\ln \ln n)^t).$$

Суммирование по r в главном члене можно распространить с погрешностью (2. 12) на интервал $[1, +\infty)$. В результате лемма 1 доставляет для $\widetilde{Q}_L(n)$ следующую асимптотическую формулу:

$$\widetilde{Q}_L(n) = \frac{2}{\varphi(|D|)\,\sigma} L(1, \chi) \prod_p \left(1 + \frac{\chi(p)}{p(p-1)}\right) \prod_{p \mid Dn} \frac{(p-1)(p-\chi(p))}{p^2 - p + \chi(p)} \times$$
$$\times \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}\right) \frac{n}{\ln n} + O(n(\ln n)^{-1.042}), \qquad (2.13)$$

где $(\sigma, n) = 1$, $(r, n) = 1$, $(n - r^2\sigma L, D) = 1$; $r = \prod_{p \mid P} p^{\alpha_p}$, $\alpha_p \geqslant 0$.

Известно [13], что

$$h = \frac{w\sqrt{|D|}}{2\pi} L(1, \chi). \qquad (2.14)$$

Кроме того,

$$h = g t_0. \qquad (2.15)$$

Теперь формула (1. 8) легко выводится из соотношений (2. 5), (2. 9), (2. 13)—(2. 15). Для завершения доказательства теоремы В нужно только показать, что $C_\varphi(n) \geqslant c_0 > 0$, где константа c_0 зависит только от дискриминанта D. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять $\sigma=1$, $L\in(L)_1$, $r=r_0=\prod_{i=1}^{t} p_i^{s_i}$, где $p_1p_2\ldots p_t=P$, причем

$$s_i=\begin{cases}1, \text{ если } p_i\nmid n;\\ 0, \text{ если } p_i\mid n.\end{cases}$$

При указанных значениях σ и r условие $(n-r^2\sigma L,\ D)=1$ будет выполнено. Следовательно,

$$C_\varphi(n)\geqslant\frac{2g}{\varphi(|D|)}\frac{1}{r_0^2}\sum_{L\in(L)_1}1=\frac{1}{r_0^2}\geqslant\frac{1}{P^2}.$$

Итак, можно взять $c_0=1/P^2$. Тем самым теорема В доказана полностью.

§ 3. Доказательство теоремы С

Положим

$$\tilde{S}(n)=\frac{1}{w}(\tilde{Q})\,n=\sum_{p+N(\mathfrak{a})=n,\ \mathfrak{a}\in R}1, \tag{3.1}$$

где R — фиксированный род, определяемый заданной формой $\varphi(\xi,\eta)$. Из (2.3) и (3.1) следует, что

$$\tilde{S}(n)=\sum_{p+m=n}f(m), \tag{3.2}$$

где $f(m)$ — число решений уравнения

$$N(\mathfrak{a})=m \tag{3.3}$$

при условии, что целые идеалы $\mathfrak{a}$ пробегают заданный род R; для m выполняются родовые условия

$$\left(\frac{m,\ D}{p}\right)=e_p(R) \text{ для всех } p, \text{ включая } p=\infty.$$

Множество чисел m, удовлетворяющих соотношению (3.2), разобьем на два класса. В класс E включим те m, в разложение которых входит по крайней мере K_0 простых чисел p_{ij} ($j=1, 2, \ldots, K_0$) точно в первой степени, для которых $\chi(p_{ij})=1$. Следовательно, $p_{ij}=\mathfrak{p}_{ij}\mathfrak{p}'_{ij}$, $\mathfrak{p}_{ij}\neq\mathfrak{p}'_{ij}$, $N(\mathfrak{p}_{ij})=N(\mathfrak{p}'_{ij})=p_{ij}$. При этом $\mathfrak{p}_{ij}$ (или $\mathfrak{p}'_{ij})\in C_i$ для каждого $i=1, 2, \ldots, h$. $K_0=[\varepsilon_0\ln\ln n]$, где ε_0 определено в (1.3). Другими словами, числа m из класса E содержат в своем разложении в поле $K(\sqrt{d})$ достаточно много простых идеалов первой степени из каждого класса этого поля. В класс F отнесем остальные m. Таким образом,

$$\tilde{S}(n)=\sum_{p+m=n,\ m\in E}f(m)+\sum_{p+m=n,\ m\in F}f(m)=\sum\nolimits_E+\sum\nolimits_F. \tag{3.4}$$

Сумму $\sum_F$ оценим сверху методами решета, основанными на следующих леммах.

Лемма 2 (см. [11]). *Пусть $S_r(n)$ — число решений уравнения $p+p'r=n$, где p и p' пробегают простые числа, r — фиксированное натуральное число; $r<n/2$. Тогда при $n\to\infty$*

$$S_r(n)=O\left(\frac{n\ln\ln n}{r\ln^2(n/r)}\right). \qquad (3.5)$$

Оценка (3.5) *равномерна по r.*

Лемма 3 (см. [14]). *Пусть $F(x,z)$ — количество натуральных чисел $m\leqslant x$, содержащих в каноническом разложении только простые числа*

$$p\leqslant z,\ \ln x\leqslant z\leqslant x^{0.01},\ a=\frac{\ln z}{\ln x}.$$

Тогда

$$F(x,z)=O\left(x\exp\left(-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)\right). \qquad (3.6)$$

Лемма 4 (см. [15]). *Пусть K_n — конечное расширение поля рациональных чисел степени $n\geqslant 2$; h — число классов идеалов этого поля. Тогда множество P всех простых идеалов поля K_n, принадлежащих хотя бы одному из r заданных классов идеалов поля K_n, порождает полугруппу g_r целых идеалов $\mathfrak{a}$, для которой*

$$\nu_{g_r}(x)=\sum_{N(\mathfrak{a})\leqslant x,\ \mathfrak{a}\in g_r}1=G_{g_r}x\ln^{r/h-1}x+O\left(\frac{x\ln^{r/h-1}x}{\ln\ln x}\right). \qquad (3.7)$$

Пусть F_i означает множество тех m, в разложение которых входит меньше, чем K_0, простых чисел p_{ij} точно в первой степени, для которых $\chi(p_{ij})=1$, $p_{ij}=\mathfrak{p}_{ij}\mathfrak{p}'_{ij}$, $\mathfrak{p}_{ij}$ или $\mathfrak{p}'_{ij}\in C_i$. Очевидно, что

$$\sum\nolimits_F\leqslant h\max_i\sum\nolimits_{F_i}, \qquad (3.8)$$

где

$$\sum\nolimits_{F_i}=\sum_{p+m=n,\ m\in F_i}f(m)\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ h).$$

Родовые условия для m из соотношений (3.3) в (3.8) отброшены. Положим

$$\sum\nolimits_{F_i}=\sum\nolimits_{F'_i}+\sum\nolimits_{F''_i}, \qquad (3.9)$$

где F'_i содержит числа m, имеющие только простые делители $p\leqslant n^{1/\ln\ln n}$, F''_i содержит числа m, каждое из которых имеет хотя бы один простой делитель $p>n^{1/\ln\ln n}$; $F_i=F'_i\cup F''_i$.

Имеем

$$\sum\nolimits_{F'_i}\leqslant\sum_{m\leqslant n,\ m\in F'_i}\tau(m).$$

Отсюда

$$\sum\nolimits_{F_i'} \leqslant \Big(\sum_{m\leqslant n,\ m\in F_i'} 1\Big)^{1/2} \Big(\sum_{m\leqslant n} \tau^2(m)\Big)^{1/2}. \tag{3.10}$$

В лемме 3 возьмем $x=n$, $z=n^{1/\ln\ln n}$. Тогда из оценки (3.6) следует, что

$$\sum_{m\leqslant n,\ m\in F_i'} 1 = O\left(n(\ln n)^{-C_0}\right). \tag{3.11}$$

В то же время

$$\sum_{m\leqslant n} \tau^2(m) = O(n \ln^3 n). \tag{3.12}$$

Поскольку C_0 — достаточно большое положительное число, из (3.10)—(3.12) выводим оценку

$$\sum\nolimits_{F_i'} = O\left(n(\ln n)^{-C_0/2}\right). \tag{3.13}$$

Будем теперь оценивать сумму $\sum_{F_i''}$. Принимая во внимание соотношение (2.3), находим, что

$$\sum\nolimits_{F_i''} \leqslant \sum_{p+p'^{\alpha}m=n}\ \sum_{x\mid p'^{\alpha}m} \chi(x) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2, \tag{3.14}$$

где

$$p' > n^{1/\ln\ln n},\ (p',\ m)=1,\ m\in F_i;\ \alpha=1 \text{ в } \sum\nolimits_1 \text{ и } \alpha\geqslant 2 \text{ в } \sum\nolimits_2.$$

Для $\sum_2$ достаточно грубой оценки

$$\sum\nolimits_2 \leqslant 2 \sum_{p'^{\alpha}m\leqslant n,\ \alpha\geqslant 2} \alpha\tau(m) = O\left(n(\ln n)^{-C_0}\right). \tag{3.15}$$

Сумму $\sum_1$ оценим с помощью леммы 2, в которой заложено решето Бруна. Прежде всего

$$\sum\nolimits_1 \leqslant 2 \sum_{\substack{p+p'N(\mathfrak{a})=n \\ N(\mathfrak{a})\in F_i,\ p'>n^{1/\ln\ln n}}} 1. \tag{3.16}$$

Полагая в лемме 2 $r=N(\mathfrak{a})$ и замечая, что

$$r < n^{1-1/\ln\ln n} < \frac{1}{2} n$$

при достаточно большом n, из (3.5) выводим неравенство

$$\sum\nolimits_1 \leqslant c_3 \frac{n(\ln\ln n)^3}{\ln^2 n} \sum_{N(\mathfrak{a})\leqslant n,\ N(\mathfrak{a})\in F_i} \frac{1}{N(\mathfrak{a})}. \tag{3.17}$$

Отметим, что в (3.16) и (3.17) суммирование ведется по всем целым идеалам поля $K(\sqrt{d})$, нормы которых принадлежат множеству F_i.

Из определения F_i следует, что каждый идеал $\mathfrak{a}$ из (3.17) можно представить в виде

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2, \tag{3.18}$$

где в каноническом разложении $\mathfrak{b}$ содержатся только простые идеалы $\mathfrak{p}$ с $N(\mathfrak{p}) \mid D$; $\mathfrak{c}_1$ имеет каноническое разложение вида

$$\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_s\mathfrak{p}_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \ldots \mathfrak{p}_{s+k}^{\alpha_{s+k}}\mathfrak{q}_1^{\beta_1} \ldots \mathfrak{q}_l^{\beta_l},\ \mathfrak{p}_j \in C_i,\ \chi(N(\mathfrak{p}_j)) = 1,$$
$$s < K_0,\ \alpha_{s+2} \geqslant 2,\ \mathfrak{q}_m \in C_i,\ \chi(N(\mathfrak{q}_m)) = -1,\ \beta_m \geqslant 1;$$

$\mathfrak{c}_2$ не содержит в своем каноническом разложении простых идеалов $\mathfrak{p} \in C_i$; $(N(\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2), D) = 1$. Из (3.17) и (3.18) получаем

$$\sum\nolimits_1 < c_3 \frac{n (\ln \ln n)^3}{\ln^2 n} \sum_{N(\mathfrak{b}) \leqslant n} \frac{1}{N(\mathfrak{b})} \sum_{N(\mathfrak{c}_1) \leqslant n} \frac{1}{N(\mathfrak{c}_1)} \sum_{N(\mathfrak{c}_2)} \frac{1}{N(\mathfrak{c}_2)} \tag{3.19}$$

с указанными выше условиями для $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}_1$ и $\mathfrak{c}_2$. Выведем оценки для трех сумм из (3.19).

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{N(\mathfrak{b}) \leqslant n} \frac{1}{N(\mathfrak{b})} < c_4. \tag{3.20}$$

Далее,

$$\sum_{N(\mathfrak{c}_1) \leqslant n} \frac{1}{N(\mathfrak{c}_1)} \leqslant \sum_{\substack{N(\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_s) \leqslant n \\ s < K_0}} \frac{1}{N(\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_s)} \times$$
$$\times \sum_{\substack{N(\mathfrak{a}) \leqslant n \\ \mathfrak{a} = \Pi \mathfrak{p}^{\alpha}\mathfrak{p} \\ \alpha_{\mathfrak{p}} \geqslant 2}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})} \sum_{\substack{N(\mathfrak{a}) \leqslant n \\ \mathfrak{a} = \Pi \mathfrak{p}^{\beta}\mathfrak{p} \\ \chi(N(\mathfrak{p})) = -1}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})}, \tag{3.21}$$

где условие принадлежности простых идеалов к классу C_i отброшено.

Обозначим суммы, входящие в (3.21), соответственно через S_1, S_2 и S_3.

$$S_1 \leqslant \sum_{s=1}^{K_0} \sum_{p_1 p_2 \ldots p_s \leqslant n} \frac{2^s}{p_1 p_2 \ldots p_s} < \sum_{s=1}^{K_0} \frac{1}{s!} \left(\sum_{p \leqslant n} \frac{2}{p} \right)^s. \tag{3.22}$$

Воспользуемся оценкой

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \ln \ln n + O(1). \tag{3.23}$$

Из (3.22) и (3.23) выводим неравенство

$$S_1 < c_5 \sum_{s=1}^{K_0} \frac{1}{s!} (2 \ln \ln n)^s.$$

Отсюда с помощью формулы Стирлинга получаем:

$$S_1 < c_6 \sum_{s=1}^{K_0} \exp\left(s \ln 2e + s \ln \frac{\ln \ln n}{s}\right). \tag{3.24}$$

Функция $y = s \ln 2e + s \ln (\ln \ln n/s)$ монотонно возрастает на сегменте $[0, 2 \ln \ln n]$. Так как $K_0 \leqslant \varepsilon_0 \ln \ln n$, где $\varepsilon_0 < 1$, то из (3.24) находим, что

$$S_1 < c_6 (\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2e - \varepsilon_0 \ln \varepsilon_0} \ln \ln n. \tag{3.25}$$

Имеем также

$$S_2 < \sum_{m \leqslant n} \frac{\tau^2(m)}{m^2} < c_7; \tag{3.26}$$

$$S_3 \leqslant \sum_{m^2 \leqslant n} \frac{1}{m^2} < c_8. \tag{3.27}$$

Таким образом, из (3.21), (3.25)—(3.27) выводим неравенство

$$\sum_{N(\mathfrak{c}_1) \leqslant n} \frac{1}{N(\mathfrak{c}_1)} < c_9 (\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2e - \varepsilon_0 \ln \varepsilon_0} \ln \ln n. \tag{3.28}$$

Для оценки последней суммы из (3.19) воспользуемся тем, что идеалы $\mathfrak{c}_2$ не содержат простых идеалов из фиксированного класса C_i. Следовательно, идеалы $\mathfrak{c}_2$ могут порождаться простыми идеалами, принадлежащими самое большее $h-1$ классам идеалов поля $K(\sqrt{d})$. Полагая в лемме $4\,n = 2$, $K_n = K(\sqrt{d})$ и $r = h - 1$, выводим из (3.7) оценку $\sum_{N(\mathfrak{c}_2) \leqslant x} 1 < c_{10} x (\ln x)^{-1/h}$. Поэтому

$$\sum_{N(\mathfrak{c}_2) \leqslant n} \frac{1}{N(\mathfrak{c}_2)} < c_{11} (\ln n)^{1-1/h}, \tag{3.29}$$

как это легко получается с помощью формулы суммирования Абеля.

Оценку суммы $\sum_F$ выводим из (3.8) и (3.9), собирая оценки (3.19), (3.20), (3.28) и (3.29), которые дают оценку для $\sum_1$, и затем оценки (3.13)—(3.15). В результате получим:

$$\sum_F = O\left(\frac{n (\ln \ln n)^4 (\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2e - \varepsilon_0 \ln \varepsilon_0}}{(\ln n)^{1+1/h}}\right). \tag{3.30}$$

Перейдем к оценке суммы Σ_E. Для $m \in E$ уже имеет место асимптотическая равномерность распределения целых идеалов $\mathfrak{a}$, удовлетворяющих уравнению (3.3), по всем классам идеалов заданного рода. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Л е м м а 5. *Пусть $f_A(m)$ — число решений уравнения* (3.3) *при условии, что целые идеалы* $\mathfrak{a}$ *пробегают заданный класс* A *из* *рода R. Тогда если $m \in E$, то выполняется асимптотическое равенство*

$$f_A(m) = \frac{f(m)}{t_0}\left(1 + O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2}}\right)\right). \tag{3.31}$$

Лемма 5 представляет самостоятельный интерес. В частности, она дает асимптотику для числа представлений $m \in E$ индивидуальной квадратичной формой $\varphi(\xi, \eta) = \varphi_K(\xi, \eta)$. Для такой формы справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{\varphi(\xi, \eta) = m} 1 = \frac{1}{t_0}\left(w \sum_{x \mid m} \chi(x)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2}}\right)\right), \tag{3.32}$$

где $m \in E$ ($m \to \infty$ при $n \to \infty$).

Формула (3. 32) является очевидным следствием равенств (1. 5) и (3. 31).

Докажем лемму 5, реализуя общую схему о «хороших» траекториях, разработанную во введении. Будем рассматривать уравнение (3. 3) в роде R. Поскольку $m \in E$, найдется решение уравнения (3. 3), имеющее вид

$$\mathfrak{a} = \left(\prod_{\substack{i=1, 2, \ldots, h \\ j=1, 2, \ldots, K_0}} \mathfrak{p}_{ij}\right) \mathfrak{q}, \tag{3.33}$$

где $\mathfrak{p}_{ij} \in C_i$ для $i = 1, 2, \ldots, h$, среди $\mathfrak{p}_{ij}$ нет равных, $N(\mathfrak{p}_{ij}) = N(\mathfrak{p}'_{ij}) = p_{ij}$, $p_{ij} = \mathfrak{p}_{ij}\mathfrak{p}'_{ij}$, $\mathfrak{p}_{ij} \neq \mathfrak{p}'_{ij}$, наконец, $\left(N\left(\prod_{i, j} \mathfrak{p}_{ij}\right), N(\mathfrak{q})\right) = 1$.

Используем тот факт, что группа G_0 классов идеалов главного рода абелева и состоит из классов, каждый из которых является квадратом некоторого класса идеалов поля $K(\sqrt{d})$. Группа G_0 может быть разложена в прямое произведение циклических подгрупп, а именно:

$$G_0 = \prod_{s=1}^{s_0} g_s, \tag{3.34}$$

где g_s имеет порядок $h_s = p_s^{\alpha_s}$, причем каждый класс D_s, порождающий группу g_s ($s=1, 2, \ldots, s_0$), представляется в виде

$$D_s = C_t^2, \quad t = t(s), \tag{3.35}$$

где C_t — некоторый класс поля $K(\sqrt{d})$. Из (3. 33) следует, что в каноническом разложении идеала $\mathfrak{a}$ имеются простые идеалы первой степени, удовлетворяющие условиям

$$\pi_{s1} \in C_{t(s)}, \ \pi_{s2} \in C_{t(s)}, \ \pi_{s3} \in D_s, \ \pi_{s4} \in D_s^2, \ldots, \pi_{sK_0} \in D_s^{2^{K_0-3}}, \tag{3.36}$$

где $s = 1, 2, \ldots, s_0$.

В результате получим следующее представление идеала $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = \left(\prod_{\substack{s=1, 2, \ldots, s_0 \\ j=1, 2, \ldots, K_0}} \pi_{sj} \right) \mathfrak{q}_k, \tag{3.37}$$

где все π_{sj} различны, $N(\pi_{sj}) = p_{sj}$, $N(\mathfrak{q}_k) = q_k$, $\chi(p_{sj}) = 1$, $\left(\prod_{s, j} p_{sj}, q_k\right) = 1$.

Из (2.3), (3.3) и (3.37) находим, что

$$f(m) = 2^{K_0 s_0} f(q). \tag{3.38}$$

Нетрудно видеть, что все $f(m)$ решений уравнения (3.3) получатся, если в исходном решении (3.37) выполнить отображения

$$\pi_{sj} \to \pi'_{sj}, \quad \pi_{sj_1} \to \pi'_{sj_1}, \quad \pi_{sj_1}\pi_{sj_2} \to \pi'_{sj_1}\pi'_{sj_2}, \ldots,$$
$$\pi_{s1}\pi_{s2} \ldots \pi_{sK_0} \to \pi'_{s1}\pi'_{s2} \ldots \pi'_{sK_0}$$

для каждого значения $s = 1, 2, \ldots, s_0$ при фиксированном $\mathfrak{q}_k$, а затем изменять и $\mathfrak{q}_k$, полагая $k = 1, 2, \ldots, f(q)$. При этом получится множество идеалов $\tilde{\mathfrak{a}}$, представимых в виде

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \left(\prod_{s, j} \tilde{\pi}_{sj} \right) \mathfrak{q}_k, \tag{3.39}$$

где $\tilde{\pi}_{sj} = \pi_{sj}$ или $\tilde{\pi}_{sj} = \pi'_{sj}$. При этом $\pi'_{sj} \sim \pi_{sj}^{-1}$.

Поэтому из (3.35), (3.36) и (3.39) находим, что

$$\mathfrak{a} \in A_i = \left(\prod_{s=1}^{s_0} C_{t(s)}^{\pm 1 \pm 1 \pm 2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm 2^{K_0 - 2}} \right) C(\mathfrak{q}_k), \tag{3.40}$$

где $A_i \in R$. Поскольку числа вида $\tilde{\alpha}_s = \pm 1 \pm 1 \pm 2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm 2^{K_0-2}$ четные, класс $\prod_{s=1}^{s_0} C_{t(s)}^{\tilde{\alpha}_s}$ будет принадлежать главному роду. Следовательно, класс $C(\mathfrak{q}_k) \in R$ и будет фиксированным при фиксированном $\mathfrak{q}_k$.

Покажем, что набор множителей при $C(\mathfrak{q}_k)$ распределяется асимптотически равномерно по всем классам главного рода, откуда вследствие (3.40) получим, что классы A_i распределяются асимптотически равномерно по всем классам рода R.

Рассмотрим множество чисел $\tilde{\alpha}_s$. Положим $\tilde{\alpha}_s = \pm 1 + \tilde{\beta}_s$, где $\tilde{\beta}_s = \pm 1 \pm 2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm 2^{K_0-2}$. Среди чисел $\tilde{\beta}_s$ нет совпадающих. В самом деле, пусть у двух чисел, β_1 и β_2, вида $\tilde{\beta}_s$ наивысшая степень числа 2, входящая слагаемым в эти числа с различными знаками, будет 2^k. Тогда

$$|\beta_1 - \beta_2| \geqslant 2 \cdot 2^k - 2(1 + 2 + \ldots + 2^{k-1}),$$

т. е. $|\beta_1 - \beta_2| \geqslant 2$, $\beta_1 \neq \beta_2$.

Отсюда легко следует, что числа $\tilde{\beta}_s$ представляют все нечетные числа от $-(2^{K_0-1}-1)$ до $2^{K_0-1}-1$ точно по одному разу. Соответственно этому множество чисел $\tilde{\alpha}_s$ разбивается на четыре группы последовательных четных чисел:

$$\begin{gathered}
-(2^{K_0-1}-2), \ldots, -2, 0; \\
2, 4, \ldots, 2^{K_0-1}; \\
-2^{K_0-1}, \ldots, -4, -2; \\
0, 2, \ldots, 2^{K_0-1}-2.
\end{gathered} \tag{3.41}$$

В каждой из этих групп имеется одно и то же количество 2^{K_0-2} чисел. Мы можем упорядочить множители $C_{t(s)}^{\tilde{\alpha}_s}$ с фиксированной группой значений $\tilde{\alpha}_s$ в порядке возрастания $\tilde{\alpha}_s$. Разобьем каждую из групп чисел (3. 41) слева направо на подгруппы по h_s чисел (последняя подгруппа может быть неполной). В итоге будем иметь $4\left[2^{K_0-2}/h_s\right]$ полных комплектов множителей $C_{t(s)}^{\tilde{\alpha}_s}$ вида

$$C_{t(s)}^{a_s}, \; C_{t(s)}^{a_s+2}, \ldots, C_{t(s)}^{a_s+2l_s}, \ldots, C_{t(s)}^{a_s+2(h_s-1)}, \tag{3.42}$$

где a_s четное, $l_s=0, 1, 2, \ldots, h_s-1$ ($s=1, 2, \ldots, s_0$). Кроме того, могут получиться неполные комплекты, содержащие в совокупности M_s классов. Очевидно, $M_s < 4h_s$. Множители (3. 42) представляют все классы полугруппы g_s.

Из (3. 34) и (3. 35) следует, что все классы главного рода G_0 можно получить точно по одному, если взять какой-либо фиксированный набор комплектов (3. 42) для $s=1, 2, \ldots, s_0$ и составить всевозможные произведения $\prod\limits_{s=1}^{s_0} C_{t(s)}^{a_s+2l_s}$ с фиксированными числами a_s, определяющими взятые комплекты. Рассматривая все наборы такого типа и учитывая наличие неполных комплектов, найдем, что каждый класс A_i данного рода R будет сосчитан при фиксированном $\mathfrak{q}_k$

$$N_k = \prod_{s=1}^{s_0}\left[\frac{2^{K_0-2}}{h_s}\right] + O\left(\prod_{s=1}^{s_0-1} 4\left[\frac{2^{K_0-2}}{h_s}\right]\right) \tag{3.43}$$

раз.

Отсюда, принимая во внимание, что $\prod\limits_{s=1}^{s_0} h_s = t_0$ и что оценка (3. 43) равномерна по $\mathfrak{q}_k$, выводим оценку для $f_A(m)$. Для этого достаточно положить $A_i = A$ и просуммировать (3. 43) по $k = 1, 2, \ldots, f(q)$. Получим

$$f_A(m) = \frac{2^{K_0 s_0}}{t_0} f(q)\left(1 + O\left(\frac{1}{2^{K_0}}\right)\right). \tag{3.44}$$

Из (3.38) и (3.44) при $K_0 = [\varepsilon_0 \ln\ln n]$ выводим (3.31), что доказывает лемму 5.

С помощью леммы 5 сумма $\sum_E$ представляется в следующем виде:

$$\sum\nolimits_E = t_0 \sum_{p+m=n,\ m\in E} f_A(m)\left(1 + O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2}}\right)\right). \tag{3.45}$$

Остается завершить доказательство теоремы С. Имеем

$$Q(n) = w \sum_{p+m=n} f_A(m),$$

откуда

$$Q(n) = w \sum_{p+m=n,\ m\in E} f_A(m) + O\left(\sum\nolimits_F\right). \tag{3.46}$$

Из (3.45) и (3.46) находим, что

$$Q(n) = \frac{w}{t_0} \sum\nolimits_E \left(1 + O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2}}\right)\right) + O\left(\sum\nolimits_F\right).$$

Из (3.1) и (3.4) получаем: $\sum_E + \sum_F = (1/w)\tilde{Q}(n)$. Таким образом,

$$Q(n) = \frac{1}{t_0} \tilde{Q}(n)\left(1 + O\left(\frac{1}{(\ln n)^{\varepsilon_0 \ln 2}}\right)\right) + O\left(\sum\nolimits_F\right). \tag{3.47}$$

Пусть фиксированное число ε_1 удовлетворяет условию

$$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0 \ln 2, \tag{3.48}$$

где ε_0 — наименьший положительный корень уравнения (1.1). Тогда из (1.8), (3.30) и (3.47) следует, что

$$Q(n) = \frac{1}{t_0} \tilde{Q}(n) + O\left(n (\ln n)^{-1-\gamma}\right),$$

где $\gamma = \min\{\varepsilon_1; 0.042\}$.

Нетрудно проверить, что число $\varepsilon_1 = \ln 2/4h \ln(h+1)$ удовлетворяет неравенству (3.48).

Теорема С доказана.

Литература

1. Бредихин Б. М., Линник Ю. В. Бинарные аддитивные задачи с эргодическими свойствами решений. — ДАН СССР, 1966, т. 166, № 6, с. 1267—1269.
2. Бредихин Б. М., Линник Ю. В. Асимптотика в общей проблеме Харди—Литтлвуда. — ДАН СССР, 1966, т. 168, № 5, с. 975—977.
3. Линник Ю. В. Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Харди—Литтлвуда. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, т. 24, № 5, с. 629—706.

4. Бредихин Б. М. Улучшение оценки остаточного члена в проблемах типа Харди—Литтлвуда. — Вестник ЛГУ, 1962, № 19. Сер. мат., мех., астрон., вып. 4, с. 133—137.
5. Бредихин Б. М. Дисперсионный метод и бинарные аддитивные проблемы определенного типа. — Успехи мат. наук, 1965, т. 20, вып. 2, с. 89—130.
6. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М., 1964. 568 с.
7. Венков Б. А. Элементарная теория чисел. М.—Л., 1937. 219 с.
8. Jones B. The arithmetic theory of quadratic forms. Baltimore, 1950. 212 p. (The Carus Math. Monographs).
9. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л., 1961. 208 с.
10. Bombieri E. On the large sieve. — Mathematika, 1965, vol. 12, № 2, p. 201—225.
11. Hooley C. On the representation of a number as the sum of two squares and a prime. — Acta Math., 1957, vol. 97, № 3—4, p. 189—210.
12. Эрдеш П. Об одном асимптотическом неравенстве в теории чисел. — Вестник ЛГУ, 1960, № 13. Сер. мат., мех., астрон., вып. 3, с. 41—49.
13. Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie. Aus elementaren Zahlentheorie. New York, 1950. 184 S.
14. Виноградов А. И. О числах с малыми простыми делителями. — ДАН СССР, 1956, т. 109, № 4, с. 683—686.
15. Бредихин Б. М. Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$. — Изв. высш. учеб. завед. Математика, 1960, № 6, с. 40—49.

НОВЫЙ МЕТОД В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Совместно с Б. М. Бредихиным

В кн.: Актуальные проблемы аналитической теории чисел. Минск, 1974, с. 5—22

Введение

В современной аналитической теории чисел существуют мощные методы для решения аддитивных уравнений — задач о представлении натурального числа суммой слагаемых заданного вида. Значительная часть аддитивных задач решается с помощью кругового метода Харди—Литтлвуда—Виноградова в форме метода тригонометрических сумм, созданного И. М. Виноградовым [1]. Этим методом И. М. Виноградов решил, в частности, знаменитую проблему Гольдбаха о представлении нечетного числа суммой трех простых чисел. Основой метода тригонометрических сумм является фундаментальная идея И. М. Виноградова по оценке двойных сумм посредством неравенства Коши—Буняковского с целью последующего их «сглаживания».

В основе дисперсионного метода (см. [2, 3]), позволившего решить ряд классических аддитивных задач, недоступных круговому методу, также лежит идея «сглаживания». Эта же идея используется в методе большого решета [4], область применений которого пересекается с областью применения дисперсионного метода (в задачах, решение которых возможно с помощью расширенной гипотезы Римана).

В 1953 г. И. М. Виноградов [5] применил идею «сглаживания» для оценки элементарных двойных сумм. В работе [6] нами рассмотрены простейшие применения идеи И. М. Виноградова к диофантовым уравнениям особого типа:

$$n=\frac{\nu_1\varphi_1-\nu_2\varphi_2}{\nu_1-\nu_2} \quad (\nu_1\neq\nu_2), \tag{1}$$

в частности к уравнению

$$n=\frac{p_1p-p_2p'}{p_1-p_2} \tag{2}$$

в простых числах p_1, p_2, p и p'.

Доказывается существование решений и выводится оценка снизу для числа решений уравнения (1) при некоторых ограничениях на плотность чисел ν и на распределенность чисел φ в арифметических прогрессиях. Элементарная форма идеи «сглаживания» комбинируется при переходе к уравнению (2) с теоремами о распределении простых чисел в натуральном ряду и в арифметических прогрессиях.

Целью этой работы является рассмотрение тернарного уравнения

$$\alpha+\beta+\gamma=n, \tag{3}$$

где α, β и γ пробегают какие-либо последовательности натуральных чисел, n — достаточно большое натуральное число.

В § 1 намечается в общих чертах схема исследования уравнения (3) с помощью нового метода, основанного на применении идеи «сглаживания» к оценкам двойных элементарных арифметических сумм. В § 2—4 показывается, что тернарная проблема Гольдбаха (для чисел n без малых простых делителей) вкладывается в схему нового метода с привлечением некоторых теорем о простых числах. В § 5 формулируются нерешенные задачи.

Считаем приятным долгом выразить глубокую благодарность И. М. Виноградову и А. А. Карацубе за ценные замечания и пожелания, высказанные ими при обсуждении программы по максимальной элементаризации задач аддитивной теории чисел. Надеемся, что наш первый шаг в этом направлении сможет привести в дальнейшем к возвращению некоторых классических задач аддитивной теории чисел в их «отчий дом» — элементарную теорию сравнений и по возможности элементарную теорию распределения простых чисел.

§ 1. Общая схема решения тернарных аддитивных задач

Рассмотрим схему решения тернарного уравнения (3) с использованием конструкции ожидаемого числа решений некоторых уравнений. Предположим, что уравнение (3) можно свести к серии уравнений вида

$$\alpha + \nu_1 D_1' + \mu_1 D_2' = n, \tag{4}$$

где ν_1 и D_1', μ_1 и D_2' пробегают некоторые прямоугольные области значений

$$\nu_1 \in (\nu), \quad D_1' \in (D_1); \quad \mu_1 \in (\mu), \quad D_2' \in (D_2).$$

Числа ν_1 и μ_1 простые. На D_1' и D_2' могут быть наложены разнообразные дополнительные условия; $f_1(D_1')$ и $f_2(D_2')$ — количества повторений чисел D_1' и D_2' (они не должны быть слишком большими).

Переменная α пробегает заданную последовательность $\{\alpha\}$ натуральных чисел.

Пусть S — число решений уравнения (4). Рассмотрим уравнение

$$\alpha + \nu_1 D_1 + \mu_1 D_2 = n \tag{5}$$

при произвольных D_1 и D_2 из их интервалов изменения (D_1) и (D_2). Пусть при фиксированных D_1 и D_2 число решений уравнения (5), найденное из каких-либо эвристических соображений, будет выражаться величиной $A(n, D_1, D_2)$. Тогда можно ожидать, что число решений уравнения (4) будет с какой-то степенью точности представлено суммой

$$T = \sum_{D_1' \in (D_1)} \sum_{D_2' \in (D_2)} f_1(D_1') f_2(D_2') A(n, D_1', D_2'),$$

где D_1' и D_2' пробегают свои значения уже без повторений.

Оставляя с этого момента область гипотетических рассуждений, оценим разность

$$V = S - T = \sum_{D_1' \in (D_1)} \sum_{D_2' \in (D_2)} f_1(D_1') f_2(D_2') \times$$
$$\times \left(\sum_{\alpha + \nu_1 D_1' + \mu_1 D_2' = n} 1 - A(n, D_1', D_2') \right). \tag{6}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, находим

$$V^2 \leqslant \sum_{D_1' \in (D_1)} \sum_{D_2' \in (D_2)} f_1^2(D_1') f_2^2(D_2') V', \tag{7}$$

где

$$V' = \sum_{D_1' \in (D_1)} \sum_{D_1' \in (D_2)} \left(\sum_{\alpha + \nu_1 D_1' + \mu_1 D_2' = n} 1 - A(n, D_1', D_2') \right)^2. \tag{8}$$

Двойную сумму V' будем называть дисперсией числа решений уравнения (4). Именно здесь мы применим идею И. М. Виноградова по оценке двойных сумм путем их «сглаживания». Распространяя суммирование в (8) на все D_1 из (D_1) и все D_2 из (D_2), освободимся от всех обременительных условий, наложенных на D'_1 и D'_2 в (4). Величина дисперсии от этого может только увеличиться. Поэтому

$$V' \leqslant V'' = \sum_{D_1 \in (D_1)} \sum_{D_2 \in (D_2)} \left(\sum_{\alpha + \nu_1 D_1 + \mu_1 D_2 = n} 1 - A(n, D_1, D_2)^2 \right), \tag{9}$$

где D_1 и D_2 пробегают без повторений все натуральные значения соответственно из (D_1) и (D_2).

Имеем

$$V'' = V_1 - 2V_2 + V_3, \tag{10}$$

где

$$V_1 = \sum_{D_1 \in (D_1)} \sum_{D_2 \in (D_2)} \left(\sum_{\alpha + \nu_1 D_1 + \mu_1 D_2 = n} 1 \right)^2,$$

$$V_2 = \sum_{D_1 \in (D_1)} \sum_{D_2 \in (D_2)} A(n, D_1, D_2) \sum_{\alpha + \nu_1 D_1 + \mu_1 D_2 = 1} 1,$$

$$V_3 = \sum_{D_1 \in (D_1)} \sum_{D_2 \in (D_2)} (A(n, D_1, D_2))^2.$$

Основную трудность при решении конкретных тернарных проблем представляет вычисление суммы V_1. Эта сумма совпадает с количеством решений системы линейных (относительно D_1 и D_2) уравнений

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \nu_1 D_1 + \mu_1 D_2 &= n, \\ \alpha_1 + \nu'_1 D_1 + \mu'_1 D_2 &= n. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В (11) $D_1 \in (D_1)$, $D_2 \in (D_2)$; простые числа ν_1 и $\nu'_1 \in (\nu)$, μ_1 и $\mu'_1 \in (\mu)$; α и $\alpha_1 \in \{\alpha\}$.

Пусть мы можем с допустимой погрешностью пренебречь в (11) значениями ν_1, ν'_1, μ_1 и μ'_1, при которых определитель системы $\Delta = \nu_1\mu'_1 - \nu'_1\mu_1$ равен нулю, а также значениями $\nu_1 = \nu'_1$. Нетрудно видеть, что система уравнений (11) при сделанных допущениях будет равносильна одному уравнению

$$\nu'_1\alpha = \nu_1\alpha_1 + (\nu'_1 - \nu_1) n + \Delta D_2$$

или сравнению

$$\nu'_1\alpha \equiv \nu_1\alpha_1 + (\nu'_1 - \nu_1) n \pmod{|\Delta|}, \tag{12}$$

в котором кроме условий для ν_1, ν'_1, μ_1 и μ'_1 из (11) появляются ограничения геометрического характера для α и α_1.

Если $|\Delta|$ имеет достаточное понижение относительно n, например, такое, при котором последовательность $\{\alpha\}$ равномерно распределена в арифметических прогрессиях по mod $|\Delta|$ в среднем, то V_1 удается асимптотически рассчитать. Вычисление сумм

V_2 и V_3 является, вообще говоря, более простой задачей, чем вычисление V_1. Пусть асимптотический расчет показывает, что суммы V_1, V_2 и V_3 совпадают с допустимой погрешностью. Тогда V'', а следовательно, и дисперсия V' будут не слишком велики. В результате из (6) и (7) получаем асимптотическую формулу для числа решений уравнения (4). Собирая числа решений всех уравнений вида (4), находим асимптотическую формулу для числа решений уравнения (3).

Можно внести некоторые видоизменения в уравнения вида (4). Например, если требуется просуммировать значения какой-нибудь теоретико-числовой функции $F(\alpha)$ по всем решениям уравнения (4), то это уравнение нужно заменить суммой

$$\sum_{\alpha+\nu_1 D_1'+\mu_1 D_2'=n} F(\alpha)$$

с очевидными коррективами в последующих формулах, содержащих α.

Рассмотрим теперь модификацию предыдущей схемы, основанную на использовании «когерентных» чисел. Эта модификация может быть полезной в случае, когда n не имеет малых простых делителей.

Вместо одного уравнения (3) возьмем много уравнений вида

$$\alpha+\beta+\gamma=n_i, \tag{13}$$

где n_i — квазипростые числа, т. е. числа, не имеющие малых простых делителей. Числа $n_i \in [n, n+n/(\ln n)\, C_1]$, $i=1, 2, \ldots, s$, $n_1=n$; $C_1>0$ — большая константа.

Пусть Q_i — число решений уравнения (13); $Q_1=Q$ — число решений уравнения (3).

Каждое уравнение (13) сводится при данном i к серии уравнений вида

$$\alpha+\nu_1 D_1'+\mu_1 D_2'=n_i. \tag{14}$$

При подсчете дисперсии уравнения (14) сравниваем число решений этого уравнения при произвольном i с числом решений уравнения при $i=1$. Если дисперсия будет не очень большой, то отсюда можно вывести, что количества решений уравнений (13) будут совпадать с допустимой погрешностью. Числа n_i в связи с обнаруженным свойством уравнений (13) назовем когерентными числами.

Таким образом,

$$Q=Q_i+\text{доп. погрешность}$$

при $i=1, 2, \ldots, s$.
Отсюда следует

$$Q=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} Q_i+\text{доп. погрешность}. \tag{15}$$

Сумма в правой части равенства (15) выражает суммарное количество решений всех уравнений (13), т. е. совпадает с числом решений одного уравнения

$$\alpha+\beta+\gamma=n_i$$

с четырьмя переменными, α, β, γ и n_i. Поскольку квазипростые числа хорошо распределены в арифметических прогрессиях, асимптотический расчет указанной выше суммы обычно не представляет труда. В результате из (15) выводим асимптотическую формулу для числа решений уравнения (3).

Схема с использованием когерентных чисел удобна тем, что не требует конструирования ожидаемых чисел решений исследуемых уравнений. В то же время эта схема применима только в том случае, когда n в уравнении (3) будет квазипростым числом.

В данной работе мы отдаем предпочтение более удобной схеме в ущерб ее общности. Поэтому, иллюстрируя в последующих параграфах наш метод на примере тернарной проблемы Гольдбаха, ограничимся рассмотрением чисел n, не имеющих малых простых делителей.

§ 2. Леммы о простых числах

В дальнейшем нам придется использовать некоторые свойства простых чисел, выражаемые следующими леммами.

Лемма 1 (см [7]). *Пусть $F(x, z)$ — количество натуральных чисел $\leqslant x$ и имеющих только простые делители $\leqslant z$. Пусть, далее, $\ln x\leqslant z\leqslant x^{0.01}$; $\alpha=\ln z/\ln x$. Тогда*

$$F(x, z)=O\left(x\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{\alpha}\right)\right). \tag{16}$$

Оценка (16) является следствием теоремы А. И. Виноградова [7] о числах с малыми простыми делителями. Эта оценка может быть доказана вполне элементарно.

Лемма 2 (см. [8]). *Пусть p и p' — простые числа, $p<n$; n — большое число. Тогда для любого $r<n/2$ число решений уравнения*

$$p+p'r=n$$

есть величина порядка

$$O\left(\frac{n}{r}\frac{\ln\ln n}{\ln^2(n/r)}\right). \tag{17}$$

Элементарное доказательство оценки (17) с помощью метода Бруна содержится в работе [8]. В частности, если $p'>n^{1/(\ln\ln n)^2}$, получаем оценку

$$O\left(\frac{n}{r}\frac{(\ln\ln n)^5}{\ln^2 n}\right).$$

Лемма 3. *Пусть* $\pi'(n)$ — *количество квазипростых чисел* $\leqslant n$, *таких, которые не содержат в каноническом разложении простых чисел* $p \leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$. *Тогда*

$$\pi'(n) = O\left(\frac{n}{\ln n}(\ln\ln n)^2\right). \tag{18}$$

Оценка (18) является следствием леммы 1.5.1 из монографии [2]. Эта оценка доказывается элементарно.

Лемма 4 (см. [9]).

1) *Пусть* $C > 0$ — *любая константа*, $q \leqslant (\ln x)^C$, $\pi(x, q, l)$ — *количество простых чисел* $p \equiv l \pmod q$ *и не превосходящих* x, $(l, q) = 1$; *тогда*

$$\pi(x, q, l) = \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\left(1 + O\left(\frac{1}{(\ln x)^C}\right)\right); \tag{19}$$

2) *пусть при тех же условиях*

$$\Theta(x, q, l) = \sum_{p \equiv l \pmod q} \ln p,$$

тогда

$$\Theta(x, q, l) = \frac{1}{\varphi(q)}\, x\left(1 + O\left(\frac{1}{(\ln x)^C}\right)\right). \tag{20}$$

Оценки (19) и (20), составляющие содержание теоремы Зигеля—Вальфиша, не могут быть получены известными в настоящее время элементарными средствами.

Лемма 5 (см. [10]).

1) *Пусть* $C > 0$ — *любая константа; тогда существует положительная константа* $B = B(C)$, *такая, что*

$$\sum_{q \leqslant X} \sum_{\substack{l=1 \\ (l, q)=1}}^{q-1} \left(\pi(x, q, l) - \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right)^2 = O\left(\frac{x^2}{(\ln x)^C}\right), \tag{21}$$

где $X = x/(\ln x)^B$;

2) *имеет место аналогичная оценка:*

$$\sum_{q \leqslant X} \sum_{\substack{l=1 \\ (l, q)=1}}^{q-1} \left(\Theta(x, q, l) - \frac{1}{\varphi(q)}\, x\right)^2 = O\left(\frac{x^2}{(\ln x)^C}\right). \tag{22}$$

Оценки (21) и (22), составляющие содержание теоремы о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях в среднем (см. [4, 10, 11]), по-видимому, могут быть выведены элементарными средствами. Разумеется, при этом должна быть использована неэлементарная теорема Зигеля—Вальфиша, оценки которой входят составной частью в оценки леммы 5. Поскольку в этой лемме усреднение ведется и по модулям и по начальным членам прогрессий, мы будем называть ее теоремой о двойном усреднении.

§ 3. Тернарная проблема Гольдбаха

Тернарная проблема Гольдбаха состоит в утверждении, что всякое нечетное число, большее 7, можно представить в виде суммы трех простых нечетных чисел. В 1937 г. И. М. Виноградов вывел асимптотическую формулу для числа $Q(n)$ решений уравнения

$$p + p_1 + p_2 = n, \tag{23}$$

где p, p_1 и p_2 — простые нечетные числа, n — заданное достаточно большое нечетное число.

Т е о р е м а В и н о г р а д о в а (см. [1, 12]).

$$Q(n) = \frac{n^2}{2\ln^3 n}\sigma(n) + O\left(\frac{n^2}{\ln^4 n}\ln\ln n\right), \tag{24}$$

где

$$\sigma(n) = \prod_{(p,\ n)=1}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod_{p\mid n}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Мы покажем, что теорему Виноградова можно доказать на основе общей схемы решения тернарных задач, изложенной в § 1. При этом ограничимся случаем, когда в уравнении (24) n будет квазипростым числом. Особый ряд $\delta(n)$ для таких n будет равен, с допустимой погрешностью, произведению

$$\prod_p\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right),$$

не зависящему от n. Остаточный член достаточно получить в виде $O((n^2/\ln n)^{4-\varepsilon})$.

Итак, нашей целью является доказательство с помощью метода из § 1 следующего частного случая теоремы Виноградова.

Т е о р е м а А. *Пусть n — квазипростое число, такое, которое не содержит в каноническом разложении простых чисел $\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$. Тогда*

$$Q(n) = \frac{1}{2}\prod_p\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right)\frac{n^2}{\ln^3 n} + O(n^2/(\ln n)^{4-\varepsilon}). \tag{25}$$

При изложении доказательства формулы (25) методом когерентных чисел мы будем опускать некоторые не очень сложные, но громоздкие вычисления.

Рассмотрим s уравнений вида

$$p + p_1 + p_2 = n_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s), \tag{26}$$

где s — количество квазипростых чисел,

$$n_i \in \left[n,\ n+\frac{n}{(\ln n)^{C_1}}\right],\quad n_1=n.$$

Обозначим через $Q_i(n)$ число решений уравнения (26) при $i=1, 2, \ldots, s$; $Q_1(n)=Q(n)$.

Основная лемма. *Имеет место равномерная по $i=1, 2, \ldots, s$ оценка*

$$Q(n)=Q_i(n)+O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^{4-\varepsilon}}\right). \tag{27}$$

Выведем теорему А из основной леммы. Суммируя (27) по $i=1, 2, \ldots, s$, находим, что

$$Q(n)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} Q_i(n)+O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^{4-\varepsilon}}\right). \tag{28}$$

По лемме 1,

$$s=\sum_{d\in[n,\ n+n/(\ln n)^{C_1}]}\mu(d)+O\left(\frac{n}{(\ln n)^{C}}\right),$$

где $d\leqslant n^{1/\ln\ln n}$ пробегает числа, содержащие только простые множители $\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$; $C>C_1>0$ — большие константы. В силу той же леммы

$$s=\prod_{p\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{n}{(\ln n)^{C_1}}+O\left(\frac{n}{(\ln n)^{C}}\right). \tag{29}$$

Можно считать, что в (29) $C>2C_1$.

Сумма

$$\sum_{i=1}^{s} Q_i(n)=\tilde{Q}(n)$$

выражает число решений уравнения

$$p+p_1+p_2=n_i, \tag{30}$$

в котором имеются четыре переменные: p, p_1, p_2 и n_i. С допустимой погрешностью можем считать, что

$$p,\ p_1,\ p_2>\frac{n}{(\ln n)^{C}}.$$

Тогда

$$\frac{\ln p}{\ln n}=1+O\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right).$$

Аналогичные равенства справедливы для p_1 и p_2. Поэтому число решений уравнения (30) выражается формулой

$$\tilde{Q}(n)=\tilde{Q}_1(n)\frac{1}{\ln^3 n}\left(1+O\left(\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)\right), \tag{31}$$

где

$$\tilde{Q}_1(n)=\sum_{p+p_1+p_2=n;}\ln p\ln p_1\ln p_2.$$

Применяя лемму 1, найдем

$$\tilde{Q}_1(n)=\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\mu(d)\sum_{\substack{p+p_1+p_2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d)\\ n\leqslant p+p_1+p_2\leqslant n+n/(\ln n)^{C_1}}}\ln p\ln p_1\ln p_2, \tag{32}$$

где d пробегает числа, содержащие только простые множители $\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$.

В (32) с допустимой погрешностью можем считать, что p_1+p_2 изменяется на интервале $(n/(\ln n)^{C_1},\ n+n/(\ln n)^{C_1})$. Этот интервал разобьем справа налево на частичные интервалы $(p_0)=(p_0-p_0',\ p_0]$, где $p_0'=p_0/(\ln n)^{3C_1}$. Количество таких интервалов будет $O((\ln n)^{3C_1+1})$. Последний интервал может быть неполным, что даст допустимую погрешность. Неравенства $n-(p_1+p_2)\leqslant p\leqslant n+n/(\ln n)^{C_1}-(p_1+p_2)$ мы перепишем в измененном виде:

$$n-p_0\leqslant p\leqslant n+\frac{n}{(\ln n)^{C_1}}-p_0.$$

Тем самым мы освободимся от зависимости между p_1+p_2 и p (с допустимой погрешностью).

В результате $\tilde{Q}_1(n)$ представляется в следующем виде:

$$\tilde{Q}_1(n)=\tilde{S}_1(n)+\tilde{S}_2(n)+O\left(n^3/(\ln n)^{2C_1-3}\right), \tag{33}$$

где

$$\tilde{S}_1(n)=\sum_{(p_0)}\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\mu(d)\sum_{(l,d)=1}\sum_{\substack{p_1+p_2\equiv l\ (\mathrm{mod}\ d)\\ p_1+p_2\in(p_0)}}\ln p_1\ln p_2\times$$

$$\times\left(\sum_{\substack{p\equiv -l\ (\mathrm{mod}\ d)\\ n-p_0\leqslant p\leqslant n-p_0+n/(\ln n)^{C_1}}}\ln p-\frac{1}{\varphi(d)}\frac{n}{(\ln n)^{C_1}}\right)$$

и

$$\tilde{S}_2(n)=\sum_{(p_0)}\sum_{d\leqslant n^{1/\ln\ln n}}\mu(d)\times$$

$$\times\sum_{(l,d)=1}\sum_{\substack{p_1+p_2\equiv l\ (\mathrm{mod}\ d)\\ p_1+p_2\in(p_0)}}\ln p_1\ln p_2\frac{1}{\varphi(d)}\frac{n}{(\ln n)^{C_1}}.$$

Оцениваем сумму $\tilde{S}_1(n)$:

$$\tilde{S}_1(n) \leqslant n \sum_{(p_0)} p_0' \ln^2 n T(n),$$

где

$$T(n) = \sum_{d \leqslant n^{1/\ln \ln n}} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{(l,\,d)=1} \left| \sum_{\substack{p \equiv l \pmod d \\ n-p_0 \leqslant p \leqslant n-p_0+n/(\ln n)^{C_1}}} \ln p - \frac{1}{\varphi(d)} \frac{n}{(\ln n)^{C_1}} \right| \cdot$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского и лемму 5, 2), выводим оценку

$$\tilde{S}_1(n) = O\left(n^2/(\ln n)^{2C_1-3}\right). \tag{34}$$

Сумму $S_2(n)$ приводим сначала к первоначальной области изменения p_1+p_2, а именно: $n/(\ln n)^{C_1} \leqslant p_1+p_2 \leqslant n+n/(\ln n)^{C_1}$, $(p_1+p_2, d)=1$. Затем освобождаемся от условия взаимной простоты чисел p_1+p_2 и d. Получим

$$\tilde{S}_2(n) = \frac{n}{(\ln n)^{C_1}} \sum_{d \leqslant n^{1/\ln \ln n}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \sum_{\delta \mid d} \mu(\delta) \times$$
$$\times \sum_{\substack{p_1+p_2 \equiv 0 \pmod \delta \\ n/(\ln n)^{C_1} \leqslant p_1+p_2 \leqslant n+n/(\ln n)^{C_1}}} \ln p_1 \ln p_2.$$

Модули $\delta > (\ln n)^{2C_1}$ вносят в $\tilde{S}_2(n)$ допустимую погрешность. Часть суммы $\tilde{S}_2(n)$, соответствующая модулям $\delta \leqslant (\ln n)^{2C_1}$, вычисляется с помощью теоремы Зигеля—Вальфиша (см. лемму 4, 2)) и теоремы о простых числах. После применения этих теорем ограничение, наложенное на δ, можно снять с допустимой погрешностью. В итоге получаем оценку

$$\tilde{S}_2(n) = \frac{n^2}{2} \frac{n}{(\ln n)^{C_1}} \sum_{d \leqslant n^{1/\ln \ln n}} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \sum_{\delta \mid d} \frac{\mu(\delta)}{\varphi(\delta)} + O\left(n^3/(\ln n)^{2C_1-3}\right). \tag{35}$$

Поскольку числа d состоят из простых множителей $\leqslant n^{1/(\ln \ln n)^2}$ мы можем отбросить в (35) условие $d \leqslant n^{1/\ln \ln n}$.

Теперь из (33)—(35) выводим формулу

$$\tilde{Q}_1(n) = \prod_{p \leqslant n^{1/(\ln \ln n)^2}} \left(1 - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{n^2}{2} \frac{n}{(\ln n)^{C_1}} +$$
$$+ O\left(n^3/(\ln n)^{2C_1-3}\right). \tag{36}$$

Наконец, из (28), (29), (31) и (36), принимая во внимание, что $\tilde{Q}(n) = \sum_{i=1}^{8} Q_i(n)$, выводим асимптотическую формулу (25). Тем самым доказательство теоремы А завершено.

Остается доказать основную лемму. Именно здесь мы используем двойные суммы и идею И. М. Виноградова по их сглаживанию.

§ 4. Доказательство основной леммы

Итак, нам надлежит сравнить $Q_i(n)$ при любом i ($i=1, 2, \ldots, s$) с $Q_1(n)=Q(n)$. Полагая, что $n/(\ln n)^C < p \leqslant n$, имеем

$$Q_i(n) = Q'_i(n) \frac{1}{\ln n}\left(1 + O\left(\frac{\ln \ln n}{\ln n}\right)\right), \tag{37}$$

где

$$Q'_i(n) = \sum_{p+p_1+p_2=n_i} \ln p.$$

При этом можем считать, что p_1, $p_2 > \sqrt{n}$.

Применяя элементарное решето, будем «отсеивать» простые числа не из множества всех натуральных чисел, а из множества квазипростых чисел $\leqslant n_i$. Получим

$$Q'_i(n) = \sum_{p+d_1t_1+d_2t_2=n_i} \mu(d_1)\mu(d_2)\ln p, \tag{38}$$

где d_1, d_2, t_1 и t_2 — квазипростые числа, такие, которые не содержат в своих канонических разложениях простых чисел $\leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}$. Кроме того, простые делители чисел d_1 и d_2 будут $\leqslant \sqrt{n_i}$ или, с допустимой погрешностью, $\leqslant \sqrt{n}$.

Примем также во внимание, что возможны два случая:

I) $d_1 = 1$ или $d_2 = 1$,

II) $d_1 > 1$ и $d_2 > 1$.

В результате сумму (38) представляем в следующем виде:

$$Q'_i(n) = 2A_i(n) - B_i(n) + C_i(n) + O\left(\frac{n^2}{(\ln n)^{C_1}}\right), \tag{39}$$

где

$$A_i(n) = \sum_{p+p_1+t_2=n_i} \ln p,$$

$$B_i(n) = \sum_{p+t_1+t_2=n_i} \ln p,$$

$$C_i(n) = \sum_{\substack{p+d_1t_1+d_2t_2=n_i \\ d_1>1,\ d_2>1}} \mu(d_1)\mu(d_2)\ln p.$$

Суммы $A_i(n)$ и $B_i(n)$ вполне аналогичны сумме из (31), вычисление которой строится на хороших арифметических свойствах последовательности квазипростых чисел n_i. В (39) n_i рассматривается при фиксированном значении i.

Однако в каждой из указанных выше сумм имеется переменная, пробегающая квазипростые значения. В сумме $B_i(n)$ таких переменных две (t_1 и t_2). Поэтому асимптотический расчет сумм $A_i(n)$ и $B_i(n)$ в принципе проводится так же, как и расчет суммы $\tilde{Q}_1(n)$. Например, применяя последовательно элементарное решето, леммы 1, 4 и 5, находим

$$A_i(n) = \prod_{p \leqslant n^{1/(\ln\ln n)^2}} \left(1 - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}\right) \int_2^n \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\, dx + \\ + O\left(n^2/(\ln n)^{C_1/2}\right), \tag{40}$$

где $i=1, 2, \ldots, s$ и главный член не зависит от i. Оценка (40) равномерна по i. Следовательно, имеет место равномерная по $i= =1, 2, \ldots, s$ оценка

$$A_i(n) = A_1(n) + O\left(n^2/(\ln n)^{C_1/2}\right). \tag{41}$$

Аналогичным способом получаем оценку

$$B_i(n) = B_1(n) + O\left(n^2/(\ln n)^{C_1/2}\right). \tag{42}$$

Асимптотический расчет суммы $C_i(n)$ является центральным пунктом доказательства, поэтому мы остановимся на нем подробнее. Наличие в сумме $C_i(n)$ множителей $\mu(d_1)$ и $\mu(d_2)$ позволяет считать числа d_1 и d_2 бесквадратными. Эти числа однозначно представляются в виде

$$d_1 = \nu_1 d_1' \quad \text{и} \quad d_2 = \nu_2 d_2',$$

где ν_1 — наименьший простой делитель числа d_1; μ_1 — такой же делитель числа d_2.

Значения ν_1 и μ_1, по крайней мере одно из которых принадлежит интервалу $(\sqrt{n}/(\ln n)^C,\ \sqrt{n}]$, вносят в $C_i(n)$ вклад, легко оцениваемый с помощью лемм 2 и 3. Этот вклад будет величиной порядка $O(n^2/(\ln n)^{3-\varepsilon})$.

Остальные числа ν_1 и μ_1 удовлетворяют неравенствам

$$n^{1/(\ln\ln n)^2} \leqslant \nu_1, \quad \mu_1 \leqslant \sqrt{n}/(\ln n)^C. \tag{43}$$

Интервалы изменения ν_1 и μ_1 разобьем справа налево соответственно на частичные интервалы вида

$$(\nu_0) = (\nu_0 - \nu_0',\ \nu_0], \quad (\mu_0) = (\mu_0 - \mu_0',\ \mu_0],$$

где $\nu_0' = \nu_0/(\ln n)^K$, $\mu_0' = \mu_0/(\ln n)^K$. Последние интервалы указанных разбиений могут быть неполными. Числа ν_1 и μ_1, принадлежащие неполным интервалам, будут вносить в $C_i(n)$ допустимую погрешность.

Положим

$$f_1(D_1') = \sum_{d_1' t_1 = D_1'} \mu(d_1'), \quad f_2(D_2') = \sum_{d_2' t_2 = D_2'} \mu(d_2'). \tag{44}$$

Очевидно, что $f_1(D_1') \leqslant \tau(D_1')$ и $f_2(D_2') \leqslant \tau(D_2')$.

Вариация условий, наложенных на D_1' и D_2', позволяет освободиться (с допустимой погрешностью) от зависимости ν_1 от D_1' и μ_1 от D_2'. В результате получим

$$C_i(n) = \sum_{(\nu_0)} \sum_{(\mu_0)} S_i(n) + O\left(\frac{n^2}{\ln^{3-\varepsilon} n}\right), \tag{45}$$

где

$$S_i(n) = \sum_{p+\nu_1 D_1' + \mu_1 D_2' = n_i} f_1(D_1') f_2(D_2') \ln p. \tag{46}$$

В (46) выполняются следующие условия: p пробегает простые числа; $\nu_1 \in (\nu_0)$, $\mu_1 \in (\mu_0)$, $D_1' \leqslant n/\nu_0$, $D_2' \leqslant n/\mu_0$; числа ν_1 и μ_1 простые; $f_1(D_1')$ и $f_2(D_2')$ определены в (44); простые делители из d_1' будут больше ν_0, простые делители из d_2' больше μ_0.

К сумме (46) применима общая схема решения тернарных аддитивных задач, изложенная в § 1. Нужно только положить $\alpha = p$, $F(\alpha) = \ln p$,

$$A(n, D_1, D_2) = \sum_{p+\nu_1 D_1 + \mu_1 D_2 = n_i} \ln p,$$

$$S = S_1(n), \quad T = S_i(n).$$

Тогда

$$V = S_1(n) - S_i(n),$$

$$V^2 \leqslant \frac{n}{\nu_0} \frac{n}{\mu_0} \ln^6 n V'',$$

$$V'' = \sum\nolimits_1 - 2\sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3,$$

где

$$\sum\nolimits_k = \sum_{D_1 \leqslant n/\nu_0} \sum_{D_2 \leqslant n/\mu_0} \sum_{p+\nu_1 D_1 + \mu_1 D_2 = n_i} \ln p \sum_{p_1 + \nu_1' D_1 + \mu_1' D_2 = n_j} \ln p_1,$$

причем пара (n_i, n_j) при $k = 1$, 2 и 3 будет совпадать соответственно с парой (n, n), (n, n_i), (n_i, n_i).

Следуя рассуждениям § 1 (см. (11) и (12)), вычисление суммы $\sum_k$ мы сводим, с допустимой погрешностью, к вычислению сумм вида

$$\sum\nolimits_k' = \sum_{(D_0)} \sum_{(p_0)} \sum_{D_0,\, p_0}. \tag{47}$$

Суммирования в (47) ведутся по частичным интервалам $(D_0) = (D_0 - D_0', D_0]$ с $D_0' = D_0/(\ln n)^{K_1}$ и $(p_0) = (p_0 - p_0', p_0]$ с $p_0' = p_0/(\ln n)^{K_2}$. Сами частичные интервалы получаются путем разбиения интервалов изменения переменных $D_2 \leqslant n/\mu_0$ и затем $p_1 < n - \mu_0 D_0$.

Далее,

$$\sum_{D_0,\, p_0} = \sum\nolimits^+ + \sum\nolimits^-, \tag{48}$$

где

$$\sum^{+}=\sum_{\nu_1' p\equiv\nu_1 p_1+\nu_1' n_i-\nu_1 n_j \pmod\Delta}\ln p\ln p_1 \tag{49}$$

с $\Delta=\nu_1\mu_1'-\nu_1'\mu_1>0$, с условиями изменения для ν_1, ν_1', μ_1 и μ_1' из (46), $\nu_1\neq\nu_1'$, наконец, с условиями геометрического характера для чисел p_1 и p: $p_1\in(p_0)$, $p_0+(D_0-D_0')\Delta/\nu_0\leqslant p\leqslant p_0+D_0\Delta/\nu_0$. Сумма $\sum^{-}$ аналогична сумме $\sum^{+}$ и соответствует значениям $\Delta<0$.

Из (43) и определения Δ следует, что

$$|\Delta|<\nu_0\mu_0\leqslant n/(\ln n)^{2C}.$$

Для того чтобы применить к (48) лемму 5, необходимо сначала устранить зависимость интервала изменения p от модуля Δ. Для этого интервал изменения Δ, $1\leqslant\Delta\leqslant\nu_0\mu_0$, разбиваем на частичные интервалы вида $(\Delta_0)=(\Delta_0-\Delta_0',\Delta_0]$, где $\Delta_0'=\Delta_0/(\ln n)^{K_3}$. Затем берем, с допустимой погрешностью, интервал изменения p с варьированными границами:

$$p_0+\frac{(D_0-D_0')\,\Delta_0}{\nu_0}\leqslant p\leqslant p_0+\frac{D_0\Delta_0}{\nu_0}.$$

Заметим, что константа C достаточно большая по сравнению с K_3, а K_3 достаточно большая по сравнению с K_2, K_1 и K.

Теперь мы можем выполнить асимптотический расчет суммы (49), подобно тому как был выполнен такой расчет для суммы (33). С помощью лемм 4 и 5 мы выводим из (49) асимптотическую формулу

$$\sum^{+}=\frac{D_0'}{\nu_0}p_0'\Bigl(\sum_{\nu\in(\nu_0)}1\Bigr)^2\Bigl(\sum_{\mu\in(\mu_0)}1\Bigr)^2\sum_{\delta\leqslant(\ln n)^C}\frac{\mu(\delta)}{\varphi(\delta)}\times$$
$$\times\sum_{d\mid\delta}\frac{\mu(d)}{\varphi(d)}\sum_{d_1\leqslant(\ln n)^C}\frac{\mu^2(d_1)}{\varphi(d_1)\varphi([\delta,d_1])}+O\bigl(n^2\nu_0\mu_0/(\ln n)^{C/3}\bigr). \tag{50}$$

Мы видим, что главный член в (50) не зависит от выбора пары (n_i,n_j), что обеспечивает в конечном счете совпадение сумм $\sum_1$, $\sum_2$ и $\sum_3$ с допустимой погрешностью и, следовательно, достаточную относительную малость дисперсии V. Собирая все полученные нами оценки, находим

$$C_i(n)=C_1(n)+O\left(\frac{n^2}{\ln^{3-\varepsilon}n}\right). \tag{51}$$

Из (37), (39), (41), (42) и (51) получаем

$$Q_i(n)=Q(n)+O\left(\frac{n^2}{\ln^{4-\varepsilon}n}\right),$$

где $i=1,2,\ldots,s$ и $Q_1(n)=Q(n)$.

Тем самым основная лемма доказана.

§ 5. Комментарии

Рассмотренная в § 1 схема решения тернарных аддитивных задач, по-видимому, может быть применена для разработки нового элементарного метода решения проблемы Варинга.

Для доказательства разрешимости уравнения

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_m^k = n \tag{52}$$

с $m = O(k \ln k)$ следует перейти от (52) к уравнению

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_r^k + \nu_1^k (y_1^k + y_2^k + \ldots + y_r^k) + \mu_1^k (z_1^k + z_2^k + \ldots + z_r^k) = n,$$

где $3r = m$, ν_1 и μ_1 простые, числа $D_1' = y_1^k + \ldots + y_r^k$ и $D_2' = z_1^k + \ldots + z_r^k$ не имеют повторений. Чисел D_1' и D_2' достаточно много (см. [1]).

Представляет интерес решение «полутернарных» задач, к которым, например, относится задача о представлении числа n в виде

$$p + \nu_1^k p_1 + \mu_1^k p_2 = n, \tag{53}$$

где p, p_1, p_2, ν и μ простые, $k \geqslant 1$ фиксированное, $\nu_1^k \leqslant n^\alpha$, $p_1 \leqslant n^{1-\alpha}$, $\mu_1^k \leqslant n^\beta$, $p_2 \leqslant n^{1-\beta}$, $0 < \alpha$, $\beta < 1$.

Уравнение (53), вероятно, может быть решено по схеме из § 1 но не вкладывается в схему кругового метода.

Таким образом, возникает вопрос об установлении границ применимости разработанного в § 1 метода, являющегося фактически элементарным вариантом метода И. М. Виноградова и в то же время имеющего, как нам думается, нетривиальные пересечения с известными методами. Рассмотренное в § 2—4 решение проблемы Гольдбаха для чисел n без малых простых делителей может быть проведено для всех достаточно больших нечетных n. Для этого требуется только удачно сконструировать ожидаемое число решений уравнения (5) применительно к проблеме Гольдбаха. При этом было бы важно найти полностью элементарное доказательство теоремы о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях в среднем (см. лемму 5). В этом случае решение проблемы Гольдбаха и некоторых других аддитивных задач с простыми числами было бы полностью элементарным, кроме использования неэлементарной теоремы Зигеля—Вальфиша.

Литература

1. Виноградов И. М. Избранные труды. М., 1952. 436 с.
2. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л., 1961. 208 с.
3. Бредихин Б. М. Дисперсионный метод и бинарные аддитивные проблемы определенного типа. — Успехи мат. наук, 1965, т. 20, вып. 2, с. 89—130.
4. Барбан М. Б. Метод «большого решета» и его применения в теории чисел. — Успехи мат. наук, 1966, т. 21, вып. 1, с. 51—102.

5. Виноградов И. М. Элементарное доказательство одной теоремы теории простых чисел. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953, т. 17, № 1, с. 3—12.
6. Бредихин Б. М., Линник Ю. В. Применение теорем о простых числах в диофантовых задачах особого типа. — Мат. заметки, 1972, т. 12, № 3, с. 243—250.
7. Виноградов А. И. О числах с малыми простыми делителями. — ДАН СССР, 1956, т. 109, № 4, с. 683—686.
8. Hooley C. On the representation of a number as the sum of two squares and a prime. — Acta Math., 1957, vol. 97, № 3—4, p. 189—210.
9. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. М.—Л., 1947. 203 с.
10. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М., 1971. 199 с.
11. Montgomery H. L. Topics in multiplicative number theory. Berlin—Heidelberg—New York, 1971. 178 p.
12. Хуа Ло-ген. Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел. М., 1964. 188 с.

А. И. Виноградов

ПЛОТНОСТНОЙ АСПЕКТ В РАБОТАХ Ю. В. ЛИННИКА

Вся современная плотностная техника теории L-рядов берет начало в работах Юрия Владимировича Линника. Его работы по этой тематике можно разделить на три цикла: [1]

1) t-аспект [29, 30, 32—34, 36, 54, 56, 59, 60, 64, 67];
2) d-аспект [24—28, 31];
3) большое решето [8, 10].

Здесь мы расположили эти три цикла не в порядке их появления, а в порядке возрастания их важности с современной точки зрения.

Метод доказательства плотностных теорем в t-аспекте был у Ю. В. Линника традиционным. Он имел хорошую модель — плотностные теоремы для дзета-функции Римана, доказанные его предшественниками. Нетрадиционным было применение этих теорем в аддитивной теории чисел. До Ю. В. Линника плотностная техника t-аспекта была успешно применена только в задаче о расстоянии между соседними простыми, т. е. в мультипликативной теории чисел.[2] Он был первым, кто увидел, что плотностная техника L-рядов в t-аспекте может быть хорошим заменителем расширенной гипотезы Римана (РГР) в аддитивных задачах с простыми числами. Тернарная проблема Гольдбаха сначала была решена условно на основе РГР Харди и Литтлвудом в 20-х годах нашего века. В 30-х годах И. М. Виноградов заменил РГР в схеме кругового метода Харди—Литтлвуда своими оценками тригонометрических сумм с простыми числами и получил безусловное решение тернарной проблемы.

---

[1]) Работы Ю. В. Линника здесь цитируются по библиографии его работ (см.: Ю. В. Линник. Избранные труды. Теория чисел. Эргодический метод и L-функции. Л., «Наука», 1979, с. 8—28). Библиография работ других авторов приведена в конце данного обзора и цитируется с прибавлением буквы Д.

[2]) Пионером здесь был Г. Хогейзель (1930 г.).

После этого специалисты некоторое время считали, что первоначальный подход Харди—Литтлвуда к этой проблеме безнадежен, так как не было никакой возможности доказать РГР. Ю. В. Линник первый увидел, что на самом деле в схеме Харди—Литтлвуда вполне достаточно плотностных теорем в t-аспекте вместо РГР. Так им было получено новое доказательство теоремы Виноградова—Гольдбаха в духе начальных замыслов Харди—Литтлвуда (см. [33]).

Теперь становится понятным, почему почти все остальные работы Ю. В. Линника по плотностному методу в t-аспекте связаны с бинарной проблемой Гольдбаха. Получив в руки новый мощный метод исследования аддитивных задач, Юрий Владимирович решил атаковать бинарную проблему. Его усилия в этом направлении привели, в частности, к работам [54, 59]. Из этих работ видно, что круговой метод вместе с РГР чуть-чуть не дотягивает до бинарной задачи. Не хватает последовательности логарифмической плотности. В духе идей Юрия Владимировича по этой теме недавно появились интересные современные работы [Д1, Д2].

Дальнейшие размышления Ю. В. Линника над трудностями решения бинарной задачи породили остальные работы этой серии [56, 60, 64, 67]. В них он доказал, что каждое четное целое число представимо суммой двух простых и ограниченного количества степеней двойки:

$$N = p_1 + p_2 + 2^{\nu_1} + \ldots + 2^{\nu_k}.$$

Здесь Юрий Владимирович продемонстрировал виртуозное владение круговым методом. Достаточно сказать, что третья, понижающая сумма порождена последовательностью логарифмической плотности, т. е. из кругового метода выжато все, что он способен дать. Первой в этой группе работ является статья [56]. В ней задача решается условно, т. е. в предположении РГР; затем пускается в ход плотностной метод для обхода РГР (см. [67]). В наши дни на эту тему появилась важная статья Галлахера [Д3], в которой работы Юрия Владимировича по двум простым и степеням двойки переосмыслены с современной точки зрения большого решета, техника упрощена, а результат усилен.

Что касается техники d-аспекта в работах Ю. В. Линника, то традиционной ее никак не назовешь. Фактически вся плотностная техника d-аспекта создавалась им на пустом месте. Все началось с гипотезы И. М. Виноградова о наименьшем невычете. По времени она была первой серьезной проблемой, размышления над которой привели Юрия Владимировича к пониманию особой важности d-аспекта в задачах распределения простых чисел в арифметических прогрессиях. После написания заметки [8] и примыкающей к ней заметки [10] (к ним мы еще вернемся) он начал обдумывать вопрос о наименьшем простом в арифметической прогрессии. Хорошо известно, что граница для наименьшего простого легко следует из

РГР и равна квадрату разности прогрессии, точнее ($(k, l)=1$),

$$p_{\min}(k, l) = \min_{p \equiv l \pmod{k}} p < c(\varepsilon) k^{2+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Естественно встает вопрос, какова будет эта граница без РГР. Чтобы ответить на него, Ю. В. Линник создал плотностную технику L-рядов в d-аспекте [24—28, 31]. В этих работах впервые появилась его знаменитая идея нагруженной суммы в нуле L-ряда, которая в наше время революционизировала всю плотностную технику L-рядов (см. [Д4]).

Кроме решения самой проблемы плотности в d-аспекте перед Ю. В. Линником встали две конкретные технические трудности: получить плотностную оценку в d-аспекте без логарифмического довеска и обойти зигелевский нуль. Тот, кто занимался плотностными оценками, знает, насколько трудно избавиться в них от логарифмических довесков. Юрий Владимирович блестяще справился с этой трудностью с помощью идеи нагруженной суммы в нулях L-функций [27]. Вторую трудность, связанную с зигелевским нулем, он обошел с помощью эффекта Дойринга—Хейльбронна (см. [28]).

В результате Юрий Владимирович доказал знаменитую оценку

$$p_{\min}(k, l) < k^C,$$

где C — абсолютная константа. Этот результат уже сравним с тем, который дает РГР; там $C=2$. Постоянная C вошла в литературу как константа Линника.

Насколько интенсивно работал Юрий Владимирович в то время, можно судить по датам выхода работ этого цикла. Все они [24—28, 31], исключительные по глубине, новизне и трудности, были написаны приблизительно за один год. Этот цикл работ продолжали развивать и улучшать многие авторы как у нас в Советском Союзе, так и за рубежом (К. А. Родосский, М. Ютила и т. д.).[3] К настоящему времени постоянная Линника имеет оценку $C \leqslant 168$ (см. [Д6]).[4]

Третий цикл работ — по большому решету — формально содержит две заметки [8, 10], но фактически к этому циклу примыкают и работы А. Реньи [Д7, Д8], выполненные под руководством Ю. В. Линника.[5] Несмотря на малое число, работы этого цикла намного превзошли работы первых двух циклов по тому резонансу, который они приобрели к настоящему времени. Последние 15 лет плотностные методы бурно развивались под знаком идей большого решета.

---

[3]) В книге К. Прахара [Д5] приведено упрощение доказательства Ю. В. Линника, принадлежащее К. А. Родосскому.

[4]) Недавно М. Ютила получил новый результат $C \leqslant 80$ (см.: Math. scand., 1977, vol. 41, № 1, p. 45—62, а С. Грэхем довел его до $C \leqslant 36$.

[5]) А. Реньи был аспирантом Юрия Владимировича в период выполнения этих работ.

Заметки [8, 10] были написаны Юрием Владимировичем под впечатлением от гипотезы И. М. Виноградова о наименьшем невычете. К этой гипотезе Ю. В. Линник возвращался на протяжении всей своей жизни, однако решить проблему до конца ему не удалось. Тем не менее в работе [10] он получил важный результат: число ε-исключительных p (т. е. таких p, для которых наименьший невычет $N(p) > p^{\varepsilon}$) на отрезке $[N^{\varepsilon}, N]$ не превосходит величины $C(\varepsilon)$, не зависящей от N. Доказательство этого результата опирается на важнейшую идею метода большого решета, содержащуюся в заметке [8], где она еще выглядит как обычное решето, но с выбросом все большего числа вычетов по мере роста простых чисел, участвующих в процессе высеивания. Затем эта идея начинает у Юрия Владимировича трансформироваться, и в работах А. Реньи [Д7, Д8] она уже выглядит вполне современно.

После этих работ наступают годы относительного затишья в этом направлении. Но в начале 60-х годов оно снова начинает оживать, и наконец в 1965 г. появляется ныне знаменитая работа Э. Бомбьери [Д9], после которой начинается бурный расцвет этого направления. Среди целого потока статей и книг по большому решету, вызванных работой Э. Бомбьери, следует особо отметить работу Г. Монтгомери [Д10], в которой t- и d-аспекты работ Ю. В. Линника объединяются в одно целое. Позднее эти идеи общности двух аспектов Монтгомери развил и подробно изложил в известной монографии [Д4].

Сейчас уже с полным правом можно сказать, что работы Юрия Владимировича Линника по L-рядам во многом определили лицо современной теории чисел.

Дополнительная литература

1. Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exceptional set in Goldbach's problem. — Acta arithm., 1975, vol. 27, p. 353—370.
2. Wang Yuan. On Linnik's method concerning the Goldbach number. — Sci. Sinica, 1977, vol. 20, № 1, p. 16—30.
3. Gallagher P. X. Primes and powers of 2. — Invent. math., 1975, vol. 29, № 2, p. 125—142.
4. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел. М., 1974. 160 с.
5. Прахар К. Распределение простых чисел. М., 1967. 511 с.
6. Chen Jing-run. On the least prime in an arithmetical progression and two theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions. — Sci. Sinica, 1977, vol. 20, № 5, p. 529—562.
7. Реньи А. О представлении четного числа в виде суммы простого и почти простого. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, т. 12, № 1, с. 57—78.
8. Rényi A. On the large sieve of Yu. V. Linnik. — Compos. math., 1950, vol. 8, № 1, p. 68—75.
9. Бомбьери Э. О большом решете. — Математика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1966, т. 10, № 5, с. 103—121.
10. Монтгомери Г. Нули L-функций. — Математика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1970, т. 14, № 5, с. 133—140.

Б. М. Бредихин

ДИСПЕРСИОННЫЙ МЕТОД Ю. В. ЛИННИКА В АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Введение

Для современной теории чисел характерно наличие разнообразных методов решения теоретико-числовых задач. Возникающее в связи с этим своеобразное «соревнование» методов по широте и простоте их применимости, бесспорно, благотворно влияет на их развитие, на выявление их связей и общих принципов. В аналитической теории чисел существуют мощные методы для решения аддитивных проблем: круговой метод Харди—Литтлвуда—Виноградова в форме метода тригонометрических сумм, созданного И. М. Виноградовым [Д1], метод большого решета и дисперсионный метод, принадлежащие Ю. В. Линнику (см. [8, 130]). Сильные результаты дает плотностной метод в сочетании с другими методами, в частности с методом большого решета (см. [Д2, Д3]). Анализ методов И. М. Виноградова и Ю. В. Линника показывает, что фундаментом их является идея И. М. Виноградова о сглаживании двойных сумм путем перехода к суммированию по сплошному интервалу. Для дисперсионного метода, которому посвящается данный обзор, существенно еще использование аналогов элементарных теоретико-вероятностных понятий, примененных П. Л. Чебышевым [Д4] в его выводе закона больших чисел.

Для нахождения асимптотики числа решений $Q(n)$ некоторого аддитивного уравнения с помощью дисперсионного метода сопоставляются истинные $Q_i(n)$ и ожидаемые («средние») $S_i(n)$ количества решений вспомогательных уравнений, к которым сводится данное уравнение. Если подсчет дисперсии показывает, что $Q_i(n)$ «в среднем» мало отличаются от $S_i(n)$, то

$$Q(n) = \sum S_i(n)$$

с допустимой погрешностью.

Предшественниками Ю. В. Линника по использованию дисперсии можно считать П. Турана и А. Реньи. Изучая отклонение функции $\omega(m)$, выражающей количество различных простых делителей m, от своего «среднего значения» $\ln \ln n$ при изменении m от 1 до n, П. Туран [Д5] вычислил в 1934 г. «дисперсию» для $\omega(m)$: $\sum_{m=1}^{n} (\omega(m) - \ln \ln n)^2 \leqslant cn \ln \ln n$. А. Реньи [Д6] рассматривал некоторые неравенства в методе большого решета тоже как оценки своеобразных дисперсий. Подробнее об этом мы скажем позднее. Выдающаяся заслуга Ю. В. Линника состоит в том, что он применил подобные соображения при исследовании аддитивных уравнений, соединив в систематической форме понятие дисперсии с идеей сглаживания.

Статьи Ю. В. Линника по дисперсионному методу, а также монография [130], включенные в его «Избранные труды», достаточно подробно характеризуют сущность самого метода. В то же время они показывают его вклад в решение с помощью дисперсионного метода задач, которые ранее были недоступны другим методам аналитической теории чисел. Имеется обзорная статья автора [Д7], посвященная дисперсионному методу. В обзорах работ Ю. В. Линника, принадлежащих А. И. Виноградову, И. А. Ибрагимову [Д8] и А. В. Малышеву [Д9], также раскрывается роль дисперсионного метода в теории чисел. Поэтому в данном обзоре мы рассмотрим весьма кратко основополагающие результаты и идеи Ю. В. Линника, относящиеся к дисперсионному методу. Основное внимание мы уделим усовершенствованиям и дальнейшему развитию дисперсионного метода, его связям, прямым и косвенным, с другими методами, а также перспективам этого метода. Подробный обзор статей Ю. В. Линника по дисперсионному методу, не вошедших в «Избранные труды», дается в [Д10].

§ 1. Бинарные проблемы

Первоначально дисперсионный метод был разработан и применен Ю. В. Линником для решения некоторых бинарных уравнений (бинарных проблем) определенного и неопределенного типа:

$$\alpha+\beta=n, \tag{1}$$

$$\alpha-\beta=l. \tag{2}$$

В уравнениях (1) и (2) α и β пробегают достаточно густые и хорошо распределенные в арифметических прогрессиях последовательности натуральных чисел, l — заданное целое число, отличное от нуля, n — достаточно большое натуральное число, $\beta<n$.

В серии работ 1958—1961 гг. Ю. В. Линник рассмотрел ряд известных бинарных аддитивных проблем, которые до этого могли быть решены только на основе эвристических или гипотетических соображений. Им были решены следующие проблемы:

аддитивная проблема делителей [101], [132]: $\alpha=x_1x_2...x_k$, $\beta=xy$, $x_1, \ldots, x_k$, x, y натуральные, $k\geqslant 2$ — константа;

проблема делителей Титчмарша ([132], см. также [130]): $\alpha=p$ простое, $\beta=xy$, x, y натуральные;

проблема Харди—Литтлвуда ([113, 118, 128, 129], см. также [130, 117]): $\alpha=p$ простое, $\beta=x^2+y^2$, x и y целые;

аналоги проблемы Харди—Литтлвуда ([107, 123]), например: $\alpha=p_1p_2$, p_1 и p_2 — простые с дополнительными ограничениями, $\beta=x^2+y^2$.

Позднее, в 1966 г., Ю. В. Линником совместно с автором (см. [184—186]) была найдена асимптотика для числа решений обобщенного уравнения Харди—Литтлвуда: $\alpha=p$ простое, $\beta=\varphi(x, y)$ — бинарная квадратичная форма (см. § 3).

Дисперсионный метод в основе своей вполне элементарен. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим простейшую схему дисперсионного метода. Пусть уравнение (1) сводится к серии уравнений вида

$$\nu D' + \beta = n, \tag{3}$$

где ν и D' независимо и без повторений пробегают некоторые значения из прямоугольной области: $\nu \in (\nu_0)$, $D' \in (D_0)$ (числа ν простые, на D' могут быть наложены разнообразные условия). Обозначим через F полное число решений уравнения (3), а через $A(n, D')$ — ожидаемое число решений этого уравнения при фиксированном D'. Тогда мы можем предполагать, что полное ожидаемое число решений уравнения (3) будет представляться суммой $S = \sum_{D' \in (D_0)} A(n, D')$.

Положим $V = F - S$. Очевидно,

$$|V| \leqslant \sum_{D' \in (D_0)} \left| \sum_{\nu \in (\nu_0)} \left(\sum_{\nu D' + \beta = n} 1 - \frac{1}{L_0} A(n, D') \right) \right|, \tag{4}$$

где

$$L_0 = \sum_{\nu \in (\nu_0)} 1.$$

Сумма (4) — двойная сумма по переменным D' и ν. Для оценки этой суммы используем идею И. М. Виноградова по сглаживанию двойных сумм.

Применяя неравенство Коши—Буняковского, находим, что

$$V^2 \leqslant V' \sum_{D' \in (D_0)} 1, \tag{5}$$

где

$$V' = \sum_{D' \in (D_0)} \left(\sum_{\nu D' + \beta = n} 1 - A(n, D') \right)^2. \tag{6}$$

Величина V' называется дисперсией числа решений уравнения (3).

Распространим суммирование в (6) на все $D \in (D_0)$. Тем самым мы освобождаемся от всех обременительных условий, наложенных на D' в (3). В то же время дисперсия может только возрасти. Поэтому

$$V' \leqslant \sum_{D \in (D_0)} \left(\sum_{\nu D + \beta = n} 1 - A(n, D) \right)^2 = \sum\nolimits_1 - 2\sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3.$$

Суммы Σ_1, Σ_2 и Σ_3 в задачах, рассматриваемых Ю. В. Линником, удается асимптотически вычислить. В результате дисперсия оказывается относительно малой и из (4) и (5) получается асимптотика для числа решений уравнения (3). Собирая числа решений всех уравнений вида (3), получим асимптотическую формулу для числа решений уравнения (1). Аналогичная схема применима и к уравнению (2).

Главную трудность при оценке дисперсии представляет вычисление суммы Σ_1. Асимптотический расчет Σ_1 связан с решением линейных сравнений, модуль которых может быть больше длины интервалов суммирования переменных. Поэтому применяется метод И. М. Виноградова по подсчету для некоторых функций количества их дробных частей, попадающих в заданный сегмент. Если Ю. В. Линнику приходилось при этом использовать оценки тригонометрических сумм, полученных А. Вейлем средствами алгебраической геометрии, то в настоящее время после работ С. А. Степанова [Д11], развившего элементарный метод в теории решения сравнений по простому модулю, достаточно элементарных оценок. Асимптотика для сумм Σ_2 и Σ_3 находится путем элементарного суммирования. Единственной неэлементарной частью всех указанных выше вычислений является применение теоремы Зигеля—Вальфиша при рассмотрении простых чисел ν в прогрессиях с медленно растущим модулем.

Сложность и неэлементарность дисперсионного метода в бинарных аддитивных задачах проистекает не за счет дисперсионной части этого метода. Поясним суть дела на примере проблемы делителей Титчмарша. С помощью элементарного решета уравнение $p-xy=l$ сводится к уравнениям

$$x_1'x_2' \ldots x_k' - xy = l, \tag{7}$$

где x_i' не имеют малых простых делителей. При $k \geqslant 7$ такие уравнения приводятся к виду $\nu D'-xy=l$ с $\nu \leqslant n^{1/7}$, что обеспечивает их решение с помощью дисперсионного метода. Если же $k \leqslant 6$, то решение уравнений (7) сводится в основном к нахождению асимптотики чисел $x_1x_2\ldots x_k$ в прогрессиях с быстро растущим модулем — для индивидуальных модулей или «в среднем» по всем модулям. А это уже требует глубоких аналитических средств, относящихся к L-функциям Дирихле и разработанных Ю. В. Линником в работах [129, 128] (см. также [117]). Указанные работы Ю. В. Линника оказали большое влияние на дальнейшую разработку теории L-рядов и связанных с нею методов аналитической теории чисел. Аналогичное положение складывается и при решении с помощью дисперсионного метода проблемы Харди—Литтлвуда.

Что касается аддитивной проблемы делителей, то здесь дело обстоит значительно проще. Решение этой проблемы сразу сводится к уравнениям вида (3) или вида $\nu D'-xy=l$ с $\nu \leqslant n^{1/7}$ (за вычетом остатка, оцениваемого элементарно). Поэтому аддитивная проблема делителей решается с помощью дисперсионного метода элементарно (с оговоркой относительно применения неэлементарной теоремы Зигеля—Вальфиша). В дальнейшем, говоря об элементарности метода, мы будем подразумевать сделанную оговорку.

§ 2. Тернарные проблемы

В 1971—1972 гг. Ю. В. Линник обнаружил, что схема дисперсионного метода для бинарных уравнений обобщается на некоторые тернарные уравнения (тернарные проблемы) типа

$$\alpha+\beta+\gamma=n, \tag{8}$$

где α, β и γ пробегают какие-либо последовательности натуральных чисел, по крайней мере две из которых достаточно густые и хорошо распределенные в арифметических прогрессиях, n — достаточно большое натуральное число.

В работе Ю. В. Линника и автора [239] изложена схема исследования уравнения (8), вполне аналогичная той, которая описана в предыдущем параграфе для бинарных уравнений. Центральной частью метода становится исследование кратных сумм вида

$$V=\sum_{D_1'\in(D_1)}\sum_{D_2'\in(D_2)}\left|\sum_{\nu\in(\nu_0)}\sum_{\mu\in(\mu_0)}\left(\sum_{\alpha+\nu D_1'+\mu D_2'=n}1-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{L_1L_2}A\,(n,\ D_1',\ D_2')\right)\right|, \tag{9}$$

где $L_1=\sum_{\nu\in(\nu_0)}1$, $L_2=\sum_{\mu\in(\mu_0)}1$ (ν и μ простые).

Оценка суммы (9) и соответствующей ей дисперсии.

$$V'=\sum_{D_1'\in(D_1)}\sum_{D_2'\in(D_2)}\left(\sum_{\alpha+\nu D_1'+\mu D_2'=n}1-A\,(n,\ D_1',\ D_2')\right)^2$$

осуществляется с помощью идеи сглаживания И. М. Виноградова. Сглаживание осуществляется по двум переменным, D_1' и D_2'. В данном случае фактически мы имеем дело с двумерным дисперсионным методом в отличие от одномерного, рассмотренного в § 1.

Двумерный дисперсионный метод применяется в работе [239] для разработки нового, в основном элементарного доказательства классической теоремы Виноградова—Гольдбаха о представлении всех достаточно больших нечетных чисел суммами трех простых. Неэлементарность метода связана с применением при оценке дисперсии теоремы (см. [Д12]) о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях «в среднем». Эта теорема о среднем включает в себя составной частью и неэлементарную теорему Зигеля—Вальфиша.

В работе [239] намечена программа по дальнейшей элементаризации и по расширению сферы применимости разработанного там метода, который начинает рассматриваться в качестве элементарной модификации метода И. М. Виноградова. В дальнейшем метод работы [239] будем называть методом элементарного сглаживания (или просто методом сглаживания).

§ 3. Развитие метода

Дисперсионный метод Ю. В. Линника нашел развитие и усовершенствование в исследованиях других математиков. В работах автора была придана законченность результатам Ю. В. Линника по проблеме Титчмарша [Д13, Д14], по проблеме Харди—Литтлвуда [Д15, Д16], по аддитивной проблеме делителей [Д17]. В сам дисперсионный метод удалось внести некоторые усовершенствования. Во-первых, вместо использования соображений чебышевского типа (при оценке дисперсии) стало применяться при оценке двойных сумм вида (4) неравенство Коши—Буняковского (см. § 1). Во-вторых, вместо громоздкой конструкции ожидаемого числа решений $A\ (n, D')$ уравнения (3), которая была связана с арифметической структурой n, автор применил простой эвристический способ нахождения $A\ (n, D')$. Предполагая, что простые числа $\nu \in (\nu_0)$ идеально хорошо распределены в арифметических прогрессиях с большим модулем $x \leqslant \sqrt{n}\ n_1^{-1}$, где $n_1 = \exp\ (\ln^{\varepsilon_0} n)$, мы находим для $A\ (n,\ D')$ выражение

$$A\ (n,\ D') = L_0 \sum_{x \leqslant \sqrt{n}\, n_1^{-1},\ (x,\ nD')=1} 1. \tag{10}$$

Формула (10) существенно облегчает расчет сумм Σ_2 и Σ_3 при оценке дисперсии V'. Наконец, автору удалось несколько улучшить остаточный член в проблемах типа Харди—Литтлвуда за счет уточнения недисперсионной части рассуждений, опирающихся на оценки К. Хооли решетного типа (см. [Д16]).

В работах [Д18, Д19] (см. также [Д7]) были начаты исследования по обобщенной проблеме Харди—Литтлвуда по схеме, изложенной в монографии Ю. В. Линника [130]. Для числа решений обобщенного уравнения Харди—Литтлвуда определенного типа и его неопределенного аналога были получены достаточно точные оценки снизу, из которых, в частности, следовало существование бесконечного множества простых чисел p вида

$$p = \varphi\ (x,\ y) + l, \tag{11}$$

где $\varphi\ (x,\ y)$ — заданная примитивная бинарная квадратичная форма с дискриминантом, отличным от полного квадрата; $0 < \varphi\ (x,\ y) < n$; l — фиксированное целое число. Трудность получения асимптотики была часто алгебраической: уравнение $\varphi\ (x,\ y) = m$ мы умеем решать в роде, а переход к индивидуальной форме при решении обобщенного уравнения Харди—Литтлвуда осуществляется с потерей некоторого процента асимптотики.

В последующих совместных работах Ю. В. Линника и автора (см. § 1) эта трудность была преодолена с помощью добавления к дисперсионному методу элементарных эргодических соображений. Оказалось, что для чисел $m \leqslant n$ с определенной структурой разложения m на простые идеалы квадратичного поля, соответствующего форме $\varphi(x, y)$, имеет место равномерная распределенность решений уравнения $\varphi(x, y)=m$ в роде по классам форм рода. А этого уже достаточно для получения асимптотики для обобщенного уравнения Харди—Литтлвуда.

Существенное улучшение остаточного члена в асимптотической формуле для обобщенного уравнения Харди—Литтлвуда с помощью аналитических средств получил А. И. Виноградов [Д20].

Мы еще встретимся с аналогичным положением, когда дисперсионный метод иногда проигрывает в силе оценок по сравнению с некоторыми другими аналитическими методами. Видимо, альтернатива такова: либо бóльшая элементарность и арифметичность метода, но худшие оценки, либо меньшая элементарность, но более сильные оценки. В связи с этим возникает вопрос о возможности сближения результатов (в идеале до совпадения).

Целью ряда других работ являлась задача расширения сферы применимости дисперсионного метода, уточнение или обобщение отдельных результатов. А. А. Полянский [Д21] применил к уравнению Харди—Литтлвуда дисперсионный метод в комбинации с весьма простыми унимодулярными преобразованиями квадратичных форм. В работе [Д22] для уравнения $p_1p_2+x^2+y^2=n$, рассматривавшегося Ю. В. Линником, он снимает ограничения на переменные p_1 и p_2, а также улучшает остаточный член в асимптотической формуле для числа решений этого уравнения. Далее, им были исследованы уравнения типа Харди—Литтлвуда с растущими параметрами (см. [Д23—Д25]). Решение обобщенного уравнения Харди—Литтлвуда в секторах дал Г. Бабаев [Д26], комбинируя дисперсионный метод с рядами Гекке.

Аналоги аддитивной проблемы делителей рассматривались Дж. Пергелем [Д27], который перенес дисперсионный метод на поле гауссовых чисел, и Т. М. Федуловой [Д28], которая вывела с помощью дисперсионного метода асимптотику для суммы

$$S(n)=\sum_{x_1x_2\ldots x_k\leqslant n} 2^{\nu(n-x_1x_2\ldots x_k)},$$

где $\nu(m)$ — число различных простых делителей m, $k\geqslant 2$ фиксированное, x_i — натуральные числа.

Обобщение проблемы делителей Титчмарша рассмотрел А. К. Каршиев [Д29], который нашел с помощью дисперсионного метода асимптотику для суммы

$$\sum_{p_1\leqslant n^{\alpha_1}} \cdots \sum_{p_k\leqslant n^{\alpha_k}} \tau(p_1p_2\ldots p_k-l),$$

где p_i простые, $\Sigma\alpha_i=1$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_k<1/7$, $l\neq 0$. В работах Т. М. Федуловой содержится исследование аналогичных сумм для обобщений проблем Титчмарша и Харди—Литтлвуда в «гиперболической» области изменения переменных p_i (см. [Д30, Д31]).

Л. И. Уфимцева ([Д32, Д33]) вывела асимптотику для сумм вида

$$\sum_{m\leqslant n} \tau_k^r(m+l)\,\tau(m) \quad \text{и} \quad \sum_{m\leqslant n} \tau_k^r(m)\,\tau(n-m) \tag{12}$$

при любых натуральных $k \geqslant 2$ и $r \geqslant 1$, где

$$\tau(m) = \sum_{xy=m} 1, \quad \tau_k(m) = \sum_{x_1\ldots x_k=m} 1.$$

Суммы (12) ранее были рассмотрены А. И. Виноградовым [Д34] с помощью плотностного метода. Дисперсионный метод позволил получить более элементарными средствами оценки остаточных членов, уточняющие соответствующие теоремы А. И. Виноградова.

Л. И. Уфимцева (совместно с автором) рассмотрела в работе [Д35] диофантово уравнение

$$\Phi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k) + \varphi(x,\ y) = n, \tag{13}$$

где $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — положительно определенный полином, $\varphi(x, y)$ — заданная положительная квадратичная форма, $f(m)$ — число решений уравнения $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k)=m$. Для числа решений уравнения (13) находится асимптотика при условии, что $f(m)$ принадлежит классу мультипликативных функций, хорошо распределенных (в некотором смысле) на простых числах. Доказательства основаны на дисперсионном методе, элементарных эргодических соображениях и оценках метода решета.

Л. Ф. Кондакова [Д36], комбинируя дисперсионный метод с аналитическим методом А. И. Виноградова [Д20], нашла число представлений

$$n = \psi(x,\ y) + \varphi(u,\ v),$$

где $\psi(x, y)$ и $\varphi(u, v)$ — положительно определенные квадратичные формы, причем значение $\psi(x, y)$ может иметь только два простых множителя. В дальнейшем [Д37] она усилила этот результат уже без использования дисперсионного метода, а с помощью варианта метода большого решета, основанного на комбинации результатов работ А. Ф. Лаврика, Г. Монтгомери и Э. Бомбьери. Вообще в последние годы ряд аддитивных задач, рассмотренных выше, стал предметом новых исследований. Они были либо передоказаны, либо усилены с помощью плотностного метода, основанного на большом решете; применялись и другие решетные методы. Мы уже говорили о естественности такой ситуации.

После появления работы [239], кратко описанной в § 2, усилия ряда математиков были направлены на реализацию изложенной в этой работе пограммы исследований. В работе [Д38] метод сглаживания был усовершенствован в двух направлениях. Во-первых, указан эвристический принцип для тернарных задач с простыми числами. Сущность этого принципа заключается в следующем. Пусть дано уравнение

$$p+\alpha+\beta=n, \tag{14}$$

где p пробегает простые числа.

Введем в рассмотрение уравнение

$$\nu+\alpha+\beta=n, \tag{15}$$

где ν пробегает квазипростые числа, такие, которые не содержат в каноническом разложении простых чисел $\leqslant \exp(\ln n/(\ln\ln n)^2)$. Пусть $Q(n)$ и $Q'(n)$ — соответственно числа решений уравнений (14) и (15). При переходе от уравнения (14) к уравнению (15) область значений переменной p расширяется до области значений переменной ν. Поэтому мы можем ожидать, что $Q(n)$ будет совпадать с какой-то степенью точности с $K(n)\,Q'(n)$, где $K(n)\sim \sim\pi(n)/\pi'(n)$, $\pi(n)=\sum\limits_{p\leqslant n}1$, $\pi'(n)=\sum\limits_{\nu\leqslant n}1$.

Можно взять

$$K(n)=\frac{1}{\ln n}\cdot\prod_{p\leqslant\exp(\ln n/(\ln\ln n)^2)}\left(1+\frac{1}{p-1}\right).$$

Положим

$$V=Q(n)-K(n)\,Q'(n).$$

Рассчитав асимптотику для $Q'(n)$ и показав с помощью метода сглаживания, что V имеет меньший порядок по сравнению с $K(n)\times \times Q'(n)$, получим асимптотику для $Q(n)$. Во-вторых, в работе [Д38] осуществлена полная элементаризация доказательств, которые сводятся к элементарной теории сравнений и к элементарной теории простых чисел (кроме использования неэлементарной теоремы Зигеля—Вальфиша). Подробное развитие указанных усовершенствований дано в работах [Д39—Д41].

Н. А. Яковлева применила метод сглаживания [Д42] для нового доказательства результатов А. Ф. Лаврика [Д43], дающих для почти всех четных чисел обоснование известных гипотетических формул Харди—Литтлвуда [Д44], выражающих количество их представлений в виде суммы и разности двух простых чисел. Количество возможных исключительных четных чисел $\leqslant x$ оценивается как величина порядка $O(x/(\ln x)^C)$, где $C>0$ — большая константа. Отметим, что в этой проблеме аналитические методы дают более сильные результаты. Например, недавний результат, принадлежащий Г. Монтгомери и Р. Вогану [Д45], дает оценку для количества возможных исключений как величину порядка $O(x^{1-\gamma})$, $0<\gamma<1$. Однако их метод не является элементарным. Он комбинирует сведения о нулях L-функции Дирихле в окрестности прямой $\sigma=1$ и в полуплоскости $\sigma>1/2$, доставляемые соответственно методом тригонометрических сумм И. М. Виноградова и плотностными теоремами. Кроме того, метод Монтгомери и Вогана приводит только к оценке снизу для числа представлений неисключительных чисел. Таким образом, и в данном случае, применяя метод сглаживания, мы выигрываем в элементарности и арифметичности оценок, но проигрываем в их силе.

В работах [Д38, Д46, Д47] рассмотрен один тип «полутернарных» аддитивных задач вида

$$p + p_1^k p_2 + p_3^l p_4 = n, \tag{16}$$

где p, p_1, p_2, p_3 и p_4 пробегают простые числа, k и $l > 1$ — фиксированные натуральные числа, $p_1^k \leqslant n^\alpha$, $p_2 \leqslant n^{1-\alpha}$, $p_3^l \leqslant n^\beta$, $p_4 \leqslant \leqslant n^{1-\beta}$, $0 < \alpha + \beta < 1/2$. Для числа решений уравнения (16) найдена с помощью метода сглаживания асимптотика. Интересно заметить, что уравнение (16), по-видимому, не берется круговым методом.

Недавно автор [Д48] применил метод сглаживания в нелинейных аддитивных задачах смешанного типа

$$p + a + x^k = n, \tag{17}$$

где p пробегает простые числа, α пробегает последовательность $\{\alpha\}$, определяемую условием

$$\sum_{\alpha \in \{\alpha\},\, \alpha \leqslant n} 1 \geqslant \frac{n}{(\ln n)^C},$$

$k \geqslant 2$ — натуральное число, x пробегает натуральные числа. Нахождение асимптотики для числа решений уравнения (17) осуществляется с помощью эвристического принципа и комбинации метода сглаживания с элементарной модификацией метода линеаризации Г. Вейля [Д49]. В результате автор и Т. И. Гришина [Д50] нашли новый, отличный от метода Ю. В. Линника [21], полностью элементарный вариант метода сглаживания для решения классической проблемы Варинга о представлении числа N в виде

$$N = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n, \tag{18}$$

где x_i — целые неотрицательные, k и n — фиксированные натуральные числа, $N > N_0$.

При этом для наименьшего числа $k = G(n)$, для которого уравнение (18) разрешимо, получена известная оценка И. М. Виноградова [Д50]: $G(n) = O(n \ln n)$.

§ 4. Дисперсионный метод и большое решето

Составление некоторых неравенств большого решета, разработанного в первоначальном виде Ю. В. Линником [8] в 1941 г., основано на эвристических соображениях статистического характера. Эти соображения аналогичны тем, которые применяются в дисперсионном методе при составлении дисперсии для числа решений исследуемого аддитивного уравнения. В этом уже обнаруживается большое сходство дисперсионного метода и метода большого решета. Однако еще более глубокое сходство имеется в самом характере неравенств большого решета. Пусть, например, задана последовательность целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_Z$, не превосходящих N, простое число p и вычет l, $0 \leqslant l \leqslant p-1$. Положим

$$Q(p, l) = \sum_{n_i \equiv l (\mathrm{mod}\, p),\ n_i \leqslant N} 1.$$

В различных усовершенствованиях метода большого решета обычно рассматриваются вслед за А. Реньи [Д6] оценки величины $Q(p, l)$ в среднем. Один из лучших результатов принадлежит Э. Бомбьери [Д3]:

$$\sum_{p \leqslant \sqrt{N}} p \sum_{l=0}^{p-1} \left[Q(p, l) - \frac{Z}{p} \right]^2 \leqslant cNZ. \tag{19}$$

Сам А. Реньи рассматривал двойную сумму (19) как своеобразный род взвешенной дисперсии.

Менее очевиден дисперсионный характер основного неравенства метода большого решета в форме Э. Бомбьери [Д3]. Одно из важнейших применений этого неравенства в аналитической теории — получение плотностных результатов, с помощью которых выводятся теоремы о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях в среднем: двойное усреднение — по модулю и начальному члену и однократное — по модулю (в теореме А. И. Виноградова—Э. Бомбьери). Возможны и другие аналитические доказательства этих теорем без использования большого решета, например, применение результатов А. Ф. Лаврика в теореме о двойном усреднении и использовании метода А. И. Виноградова в теореме об однократном усреднении (см. [Д12]). Теорема о двойном усреднении имеет много арифметических приложений, в частности, она была использована в доказательстве теоремы Гольдбаха—Виноградова с помощью метода сглаживания (см. § 2).

Теорема о двойном усреднении уже носит ярко выраженный дисперсионный характер, что видно из следующего варианта формулировки этой теоремы.[1] Пусть $C > 0$ — любая константа. Тогда

---

[1] Теорему о двойном усреднении впервые доказал М. Б. Барбан (см.: Об аналогах проблемы делителей Титчмарша. — Вестник ЛГУ, 1963, № 19. Сер. мат., мех., астрон., вып. 4, с. 5—13), а позднее — Г. Дэвенпорт и Г. Халберстам (H. Davenport, H. Halberstam. Primes in arithmetic progressions. — Michigan Math. J., 1966, vol. 13, p. 485—489). Из новейших исследований по этой теореме см. серию работ К. Хооли (C. Hooley. On the Barban—Davenport—Halberstam theorem. I—VII), опубликованных в 1975—1977 гг. (РЖМат., 1975, 11А182, 12А137, 12А138; 1976, 5А116, 12А139; 1977, 5А72; 1978, 4А112). (*Прим. ред.*).

существует константа $B=B(C)$, такая, что

$$V=\sum_{D\leqslant Q}\sum_{\substack{l=1\\(l,D)=1}}^{D-1}\left(\pi(x,\ D,\ l)-\frac{1}{\varphi(D)}\int_2^x\frac{dt}{\ln t}\right)^2=O\left(\frac{x^2}{\ln^C x}\right), \qquad (20)$$

где

$$Q=\frac{x}{(\ln x)^B},\quad \pi(x,\ D,\ l)=\sum_{p\equiv l\ (\mathrm{mod}\ D)}1,$$

p пробегает простые числа, не превосходящие x.

Для применения теоремы о двойном усреднении к тернарным задачам типа проблемы Гольдбаха—Виноградова достаточно иметь оценку (20) для $Q\leqslant\sqrt{x}/(\ln x)^B$. Элементарное доказательство неравенства (20) для этого случая с помощью метода сглаживания (с прежней оговоркой относительно применения теоремы Зигеля—Вальфиша) дано в работах [Д39, Д41]. Распространение этого доказательства до $Q\leqslant x/(\ln x)^B$ может быть получено, как указано Б. Г. Матикайненом, с помощью результатов его работы [Д52], основанных на элементарном методе И. М. Виноградова [Д53].

Таким образом, ряд важных формулировок и результатов метода большого решета имеют дисперсионный характер и могут быть получены методом сглаживания.

§ 5. Перспективы метода

Мы видели, что дисперсионный метод базируется на двух фундаментальных идеях: на идее И. М. Виноградова по сглаживанию сумм и на идее Ю. В. Линника по составлению дисперсии для уравнений. Можно надеяться, что дальнейшее развитие этого метода как элементарного метода аддитивной теории чисел позволит достаточно четко обрисовать границы его применимости. Пока ясно (см. § 2), что метод сглаживания применим к ряду известных бинарных аддитивных задач, к которым неприменим круговой метод Харди—Литтлвуда—Виноградова. Но ко многим из них применим метод большого решета в сочетании с плотностным методом. Представляет интерес выяснение общих границ применимости этих методов, степени их силы и элементарности.

В настоящее время выяснилось (см. § 3), что метод сглаживания применим и к таким классическим тернарным задачам, к которым круговой метод Харди—Литтлвуда—Виноградова также применим: проблема Гольдбаха, проблема Варинга и некоторые другие задачи. Здесь нас прежде всего интересует элементарность метода сглаживания.

При решении проблемы Гольдбаха методом сглаживания неэлементарность рассуждений сохраняется в том месте, где используется теорема Зигеля—Вальфиша о простых числах в арифметических прогрессиях с модулем $D\leqslant(\ln x)^C$. Элементарные доказательства асимптотического закона распределения простых чисел в арифметических прогрессиях разработаны для фиксированных модулей D, но они неизвестны для растущих модулей. Представляет большой интерес нахождение элементарного эквивалента теоремы Зигеля-Вальфиша, хотя бы в усредненной по модулям D форме. Этого было бы уже достаточно для полностью элементарного доказательства теоремы Виноградова—Гольдбаха.

Решение проблемы Варинга с надлежащей оценкой классической функции $G(n)$ в этой проблеме полностью элементарно. Представляется возможным распространение метода сглаживания на другие задачи варинговского типа. Особенно важным продвижением в методе сглаживания было бы усиление оценки $G(n)$ до предельной: $G(n)=O(n)$. Интересны исследования по переносу метода сглаживания на алгебраические поля (см. [Д54]).

Расширение сферы применимости метода сглаживания Виноградова—Линника поможет полнее реализовать план Ю. В. Линника [239] о возвращении классических задач аддитивной теории чисел в их «отчий дом» — элементарную теорию сравнений и элементарную теорию простых чисел.[2)]

Дополнительная литература

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М., 1971. 160 с.
2. Прахар К. Распределение простых чисел. М., 1967. 511 с.
3. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. М., 1971. 199 с.
4. Чебышев П. Л. Полн. собр. соч., т. II. М.—Л., 1947. 520 с.
5. Turan P. On a theorem of Hardy and Ramanujan. — J. London Math. Soc., 1934, vol. 9, № 4, p. 274—276.
6. Реньи А. О представлении четных чисел в виде суммы простого и почти простого числа. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, т. 12, № 1, с. 57—78.
7. Бредихин Б. М. Дисперсионный метод и бинарные аддитивные проблемы определенного типа. — Успехи мат. наук, 1965, т. 20, вып. 2, с. 89—130.
8. Виноградов А. И., Ибрагимов И. А. Краткий очерк научной, педагогической и общественной деятельности Ю. В. Линника. — В кн.: Академик Ю. В. Линник. Л., 1975, с. 10—18.
9. Malyshev A. V. Yu. V. Linnik's works in number theorie. — Acta arithm., 1975, vol. 27, p. 3—10.

[2)] Недавно Г. Иванец нашел еще одно замечательное применение идей дисперсионного метода (см.: H. Iwaniec. Almost-primes represented by quadratic polynomials. — Invent. math., 1978, vol. 47, № 2, p. 171—188). Сочетая дисперсионный метод с результатами по решету, он доказал теорему: пусть P_2 — число, имеющее не более двух простых множителей, считая кратности. Тогда при достаточно большом x справедлива оценка

$$|\{n \leqslant x;\ n^2+1=P_2\}| > C\frac{x}{\ln x},$$

причем для постоянной C дается явное выражение. (*Прим. ред.*).

10. Бредихин Б. М., Малышев А. В., Фоменко О. М. Обзор работ Ю. В. Линника по теории чисел, не вошедших в сборники «Избранные труды. Теория чисел. Эргодический метод и L-функции» и «Избранные труды. Теория чисел. L-функции и дисперсионный метод». — В наст. томе, с. 352—371.
11. Степанов С. А. Уравнения над конечными полями. — Мат. заметки, 1977, т. 21, № 2, с. 271—279.
12. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел. М., 1974. 160 с.
13. Бредихин Б. М. Бинарные аддитивные проблемы с простыми числами. — ДАН СССР, 1962, т. 142, № 4, с. 766—768.
14. Бредихин Б. М. Бинарные аддитивные проблемы неопределенного типа. I. Проблема делителей для сдвинутых простых чисел. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т. 27, № 2, с. 439—462.
15. Бредихин Б. М. Бинарные аддитивные проблемы неопределенного типа. II. Аналог проблемы Харди—Литтлвуда. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т. 27, № 3, с. 577—612.
16. Бредихин Б. М. Улучшение остаточного члена в проблемах типа Харди—Литтлвуда. — Вестник ЛГУ, 1962, № 19. Сер. мат., мех., астрон., вып. 4, с. 133—137.
17. Бредихин Б. М. Бинарные аддитивные проблемы неопределенного типа. III. Аддитивная проблема делителей. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т. 27, № 4, с. 777—794.
18. Бредихин Б. М. Применения дисперсионного метода в бинарных аддитивных проблемах. — ДАН СССР, 1963, т. 149, № 1, с. 9—11.
19. Бредихин Б. М. Бинарные аддитивные проблемы неопределенного типа. IV. Аналог обобщенной проблемы Харди—Литтлвуда. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, № 6, с. 1409—1440.
20. Виноградов А. И. Общее уравнение Харди—Литтлвуда. — Мат. заметки, 1967, т. 1, № 2, с. 189—197.
21. Полянский А. А. Решение проблемы Харди—Литтлвуда и ее неопределенного аналога в секторах и контурах. — ДАН СССР, 1966, т. 168, № 1, с. 25—27.
22. Полянский А. А. Об одном уравнении Харди—Литтлвуда. — ДАН СССР, 1968, т. 180, № 1, с. 29—31.
23. Полянский А. А. Об одной аддитивной задаче. — Волжск. мат. сб., 1968, вып. 6, с. 217—219.
24. Полянский А. А. Геометрические и эргодические свойства решений уравнений Харди—Литтлвуда. — Волжск. мат. сб., 1968, вып. 6, с. 213—216.
25. Полянский А. А. Общее уравнение типа Харди—Литтлвуда. — Волжск. мат. сб., 1969, вып. 7, с. 126—127.
26. Бабаев Г. Решение обобщенной задачи Харди—Литтлвуда в секторах. — ДАН СССР, 1967, т. 175, № 2, с. 263—265.
27. Pergel J. Generalization of Linnik's asymptotic formula for the additive problem of divisors to Gaussian numbers. — Studia sci. math. hung., 1967, vol. 2, № 1—2, p. 133—151.
28. Федулова Т. М. Решение некоторых аддитивных задач. — Волжск. мат. сб., 1969, вып. 7, с. 184—189.
29. Каршиев А. К. Обобщенная проблема делителей Титчмарша. — Науч. тр. Бухарск. гос. пед. ин-та, 1969, вып. 18 (4), с. 36—61.
30. Федулова Т. М. Применение дисперсионного метода в аддитивных задачах с ограниченным набором простых чисел. — ДАН СССР, 1970, т. 191, № 2, с. 290—292.
31. Федулова Т. М. Некоторое обобщение проблемы Харди—Литтлвуда. — В кн.: Исследования по теории чисел. Вып. 1. Куйбышев, 1971, с. 35—43.
32. Уфимцева Л. И. Доказательство теоремы А. И. Виноградова с помощью дисперсионного метода. — Волжск. мат. сб., 1971, вып. 8, с. 200—205.

33. Уфимцева Л. И. Обобщение аддитивной проблемы делителей. — В кн.: Исследования по теории чисел. Вып. 1. Куйбышев, 1971, с. 19—34.
34. Виноградов А. И. О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1965, т. 29, № 4, с. 903—934.
35. Бредихин Б. М., Уфимцева Л. И. Бинарные аддитивные задачи и мультипликативные функции. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1972, т. 128, с. 66—75.
36. Кондакова Л. Ф. Об одной аддитивной задаче смешанного типа. — В кн.: Исследования по теории чисел. Вып. 1. Куйбышев, 1971, с. 3—18.
37. Кондакова Л. Ф. Применение большого решета к решению аддитивных задач. — Мат. заметки, 1971, т. 10, № 1, с. 73—81.
38. Бредихин Б. М. Усовершенствование нового метода в тернарных и полутернарных задачах с простыми числами. — ДАН СССР, 1974, т. 217, № 1, с. 14—16.
39. Бредихин Б. М. К тернарной проблеме Гольдбаха. — В кн.: Исследования по теории чисел. Вып. 6. Саратов, 1975, с. 5—18.
40. Бредихин Б. М., Яковлева Н. А. Примнение дисперсионного метода в проблеме Гольдбаха. — Acta arithm., 1975, vol. 27, p. 253—263.
41. Бредихин Б. М., Яковлева Н. А. Обоснование эвристического принципа в аддитивных задачах с простыми числами. — Мат. заметки, 1975, т. 17, № 4, с. 659—668.
42. Яковлева Н. А. Решение некоторых аддитивных задач с простыми числами для почти всех n методом элементарного сглаживания. — Науч. тр. Куйбышев. гос. пед. ин-та, 1975, т. 158, с. 58—67.
43. Лаврик А. Ф. К бинарным гипотезам теории простых чисел по методу Виноградова. — ДАН СССР, 1960, т. 132, № 5, с. 1013—1015.
44. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of partitio numerorum. III. On the expression of a number as a sum of primes. — Acta Math., 1923, vol. 44, p. 1—70.
45. Montgomery H. L., Vaughan R. C. The exceptional set in Goldbach's problem. — Acta arithm., 1975, vol. 27, p. 353—370.
46. Федулова Т. М. О тернарных уравнениях с ограниченным набором простых чисел. — В кн.: Исследования по теории чисел. Вып. 6. Саратов, 1975, с. 144—149.
47. Бредихин Б. М., Федулова Т. М. Полутернарные задачи с простыми числами. — Науч. тр. Куйбышев. гос. пед. ин-та, 1975, т. 158, с. 5—13.
48. Бредихин Б. М. Метод сглаживания в нелинейных аддитивных задачах. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1976, т. 142 с. 88—100.
49. Weyl H. Über die Gleichverteilung der Zahlen mod Eins. — Math. Ann., 1916, Bd 77, S. 313—352.
50. Бредихин Б. М., Гришина Т. И. Элементарная оценка $G(n)$ в проблеме Варинга. — Мат. заметки, 1978, т. 24, № 1, с. 7—18.
51. Виноградов И. М. О верхней границе $G(n)$ в проблеме Варинга. — Изв. АН СССР. Отд-ние мат., ест. наук, 1934, № 10, с. 1455—1469.
52. Матикайнен Б. Г. Применение элементарного метода И. М. Виноградова в аддитивной проблеме делителей. — Науч. тр. Куйбышев. гос. пед. ин-та, 1975, т. 158, с. 35—41.
53. Виноградов И. М. Элементарное доказательство одной теоремы теории простых чисел. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953, т. 17, № 1, с. 3—12.
54. Полянский А. А. К проблеме Гольдбаха в алгебраических полях. — Науч. тр. Куйбышев. гос. пед. ин-та, 1975, т. 158, с. 42—49.

Б. М. Бредихин, А. В. Малышев, О. М. Фоменко

ОБЗОР РАБОТ Ю. В. ЛИННИКА ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИКИ «ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. ЭРГОДИЧЕСКИЙ МЕТОД И L-ФУНКЦИИ» И «ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. L-ФУНКЦИИ И ДИСПЕРСИОННЫЙ МЕТОД»

К теории чисел относятся следующие работы Ю. В. Линника: [1—17, 19—36, 39, 42, 44, 48, 51—56, 59, 60, 62, 64—67, 69, 73, 75, 76, 79, 80, 84, 88—91, 100, 101, 104, 107—109, 113, 114, 117—120, 123, 125, 128—132, 136, 140, 149, 154, 156, 163, 171, 172, 184—187, 195, 199, 205, 213, 227, 230, 233, 239]. Из них работы [7, 9, 11—16, 42, 44, 48, 51, 52, 54—56, 60, 64, 66, 73, 84, 88—90, 108, 109, 117, 119, 120, 130, 136, 140, 149, 163, 171, 184, 199, 205, 213, 227, 233] не вошли в «Избранные труды». Коротко рассмотрим их содержание, условно разбив на пять разделов.

§ 1. Эргодический метод

[7] «Представление больших чисел положительными тернарными квадратичными формами». Автореферат диссертации, полностью опубликованной в виде статьи [6].

[12] «О разложении больших чисел на семь кубов». Предварительное сообщение о работе [22].

[44] «Кватернионы и числа Кэли; некоторые приложения арифметики кватернионов». Обзор делится на две части — «Введение» и «Арифметика обыкновенных кватернионов и некоторые ее приложения» (гл. I—III). Во «Введении» излагаются элементы алгебры гамильтоновых кватернионов над полем вещественных чисел, дается описание с их помощью поворотов в четырехмерном и трехмерном евклидовом пространстве. Излагаются также элементы алгебры Кэли и описание с ее помощью композиции квадратичных форм. Основная часть «Введения» (с. 54—65) — по существу перепечатка (с небольшими редакционными усовершенствованиями) работы Ю. В. Линника [1].

Гл. I—III содержат арифметику обыкновенных (гамильтоновых) кватернионов, причем (по Гурвицу) кватернион $A=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ называется целым, если α, β, γ, $\delta \in \mathbf{Z}$ или если 2α, 2β, 2γ, $2\delta \in \mathbf{Z}$ и $2\alpha\equiv 2\beta\equiv 2\gamma\equiv 2\delta\equiv 1 \pmod 2$.

В гл. I излагаются простейшие свойства делимости целых кватернионов, известные еще Гурвицу.

Гл. II посвящена развитой Ю. В. Линником [4—6] «теории лучей». Основные результаты этой теории сформулированы в [4—6] даже для обобщенных кватернионов (эрмитионов), однако их доказательства, как правило, или намечены, или вовсе отсутствуют. Усовершенствованное изложение «теории лучей» (при другом определении целых кватернионов) см. в монографии [Д1].

В конце гл. I находится количество целых кватернионов данной нормы и дается новое доказательство теоремы Якоби о количестве представлений числа суммой четырех квадратов (идейно близкое к доказательствам А. Гурвица и Б. А. Венкова).

В гл. III излагается «теория поворотов», принадлежащая Б. А. Венкову и доказывается (по Б. А. Венкову) теорема Гаусса о числе представлений чисел суммой трех квадратов. В конце гл. III сформулирован простейший результат статьи [6] и дан беглый набросок идеи его доказательства.

Обзор [44] послужил толчком для послевоенного развития эргодического метода (см. обзор А. В. Малышева [Д2]), в частности для написания обзора [66] как второй части [44]. Редколлегия с большим сожалением была вынуждена отказаться от включения этого обзора в «Избранные труды» из-за отсутствия места.

[66] (совместно с А. В. Малышевым) «Приложения арифметики кватернионов к теории тернарных квадратичных форм и к разложению чисел на кубы». В этом обзоре Ю. В. Линнику принадлежат гл. II и IV. В гл. II доказывается следующая теорема о представлении чисел тернарными квадратичными формами, взаимными к «удобным» (определение «удобных» форм см. в статье [6] или в обзоре [Д2]). *Пусть* r — *нечетное число и* $F(x, y, z)$ — *форма инвариантов* $[1, r]$, *взаимная к «удобной»; пусть* $q > 2$ — *простое число; тогда найдутся такие числа* m_0, $\varkappa$, $\varkappa' > 0$, *зависящие только от* r *и* q, *что всякое целое число* m, *удовлетворяющее условиям:* а) $(m, qr)=1$; б) $m > m_0$; в) $m \equiv F(x_0, y_0, z_0) \pmod 8$, *где* $(x_0, y_0, z_0)=1$; г) $(-rm/q)=1$, *примитивно представимо формой* F, *причем число примитивных представлений* $r(F, m)$ *оценивается неравенствами*

$$\varkappa h(-rm) < r(F, m) < \varkappa' h(-rm),$$

где $h(-D)$ — *число классов собственно примитивных бинарных квадратичных форм определителя* D.

В гл. IV излагается теорема Ю. В. Линника [22] о представлении больших чисел суммой 7 кубов неотрицательных целых чисел. Доказана также следующая теорема о представимости суммой 6 кубов. *Пусть задано целое число* $C_0 > 0$; *можно указать постоянную* $K_0 = K_0(C_0)$ *так, что для любых постоянных* $K_0 < K_1 < K_2$ *если целое число* N *удовлетворяет следующим условиям:* а) N *имеет четный делитель*

$$\frac{\sqrt[3]{N}}{K_2} < \nu < \frac{\sqrt[3]{N}}{K_1};$$

б) $N > N_0(K_0, K_1, K_2)$; в) N *не делится на* 2^{C_0}, *то число* N *представимо в виде суммы* 6 *кубов неотрицательных целых чисел.*

[73] «Применение теории цепей Маркова в арифметике кватернионов». В связи с работой [Д3] Ю. В. Линник дает теоретико-вероятностную интерпретацию некоторых задач арифметики кватернионов и решает их с помощью теорем теории вероятностей.

Рассмотрения ведутся на примере следующей леммы, используемой в [Д3]. *Количество примитивных кватернионов*

$$B_\alpha = R_{\alpha 1} R_{\alpha 2} \cdot \ldots \cdot R_{\alpha s}, \quad N(R_{\alpha\beta}) = r,$$

где r — нечетное число, $R_{\alpha\beta}$ — примарные кватернионы и где данный примитивный примарный кватернион R нормы r встречается в качестве $R_{\alpha\beta}$ менее $(1-\varepsilon_0)\, s/\sigma_r$ раз, не превосходит

$$c(\varepsilon_0)\, W r^{-s\eta_0(\varepsilon_0)}; \tag{1}$$

здесь

$$\sigma_r = r \prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad W = r^s \prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad c(\varepsilon_0) > 0$$

зависят только от ε_0. Для доказательства леммы Ю. В. Линник интерпретирует задачу схемой испытаний, связанных в цепь Маркова. Эту схему он исследует теоретико-вероятностными методами, получая оценку (1). В заключение указывается, что подобная методика применима во многих вопросах аналитической арифметики кватернионов и эрмитионов.

[89] «Цепи Маркова в аналитической арифметике кватернионов и матриц». Продолжение работы [73]. Предлагается значительно более простая теоретико-вероятностная интерпретация для решения тех же задач арифметики кватернионов (а также арифметики матриц 2-го порядка — см. [75]). Рассмотрения ведутся на примере той же леммы из [Д3], что и в [73].

[84] «Некоторые применения геометрии Лобачевского к теории характеров Дирихле. (Резюме доклада)». Краткие тезисы доклада, полностью опубликованного в [104].

[90] «An application of the theory of matrices and of Lobatschevskian geometry to the theory of Dirichlet's real characters». Сформулировано (по существу без доказательств) пять теорем.

Теорема 1. *Пусть* $\psi(D)$ — *монотонно возрастающая (сколь угодно медленно) до* $+\infty$ *положительная функция;* $\chi(n)$ — *неглавный вещественный характер* (mod D). *Если число нулей L-функции*

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-s}$$

в области

$$|s-1| \leqslant \frac{\psi(D)}{\ln D}, \quad \operatorname{Re} s < 1,$$

есть $o(\psi(D))$, *то наименьший невычет* (mod D) *есть* $O(D^\varepsilon)$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 0$ — *малая постоянная,* $\alpha < 0.01$; $D > 0$ — *нечетное число. Пусть* $\sum$ — *выпуклая фигура с кусочно-гладкой границей, лежащая на части гиперболоида*

$$ac - b^2 = D, \quad 2|b| \leqslant a \leqslant c \leqslant (\ln D)^2 a \tag{1}$$

и видная из начала координат под телесным углом $\Lambda(\Sigma)$. Пусть

$$\left(\frac{-D}{p}\right)=1, \tag{2}$$

где $p>2$ — фиксированное простое число. Тогда если

$$\Lambda(\Sigma)>(\ln D)^{-\alpha}, \tag{3}$$

то для числа $H(\Sigma)$ целых точек (a, b, c) с условием о. н. д. $(a, 2b, c)=1$ *справедлива асимптотика*

$$H(\Sigma)=\frac{9}{2\pi}\Lambda(\Sigma)\,h(-D)\,(1+\eta(p, D)), \tag{4}$$

где $\eta(p, D)\to\infty$ при $D\to\infty$ и фиксированном p.

Теорема 3. *Пусть $h(-D, \gamma\sqrt{D})$ — число собственно примитивных приведенных $(2|b|\leqslant a\leqslant c)$ целочисленных бинарных квадратичных форм определителя D с условием*

$$a\leqslant\gamma\sqrt{D}, \tag{5}$$

где $1\geqslant\gamma\geqslant(\ln D)^{-\alpha}$, $0<\alpha<0.01$ фиксировано. Тогда

$$h(-D, \gamma\sqrt{D})=\frac{3\gamma}{\pi}h(-D)\,(1+\eta(p, D)), \tag{6}$$

где $\eta(p, D)\to 0$ при $D\to\infty$ и фиксированном p, удовлетворяющем (2), равномерно по $\gamma\geqslant(\ln D)^{-\alpha}$. Для $1\leqslant\gamma\leqslant\sqrt{4/3}$

$$h(-D, \gamma\sqrt{D})=f(\gamma)\,h(-D)\,(1+\eta(p, D)), \tag{7}$$

где

$$f(\gamma)=\frac{6}{\pi}\arcsin\sqrt{1-\gamma^{-2}}+\frac{3\gamma}{\pi}\left(1-2\sqrt{1-\gamma^{-2}}\right). \tag{8}$$

Теорема 4. *Пусть $-D<0$ — нечетный фундаментальный дискриминант и $\chi(n)=(-D/n)$ — характер Кронекера. Пусть*

$$\left(\frac{-D}{p}\right)=1,\quad L(s, \chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s},\quad \zeta(s)\,L(s, \chi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}. \tag{9}$$

Тогда для $\gamma\geqslant(\ln D)^{-\alpha}$

$$\sum_{n\leqslant\gamma\sqrt{D}}a_n=\gamma\sqrt{D}\,L(1, \chi)\,(1+\eta(p, D)), \tag{10}$$

где $\eta(p, D)\to\infty$ при $D\to\infty$ и фиксированном p равномерно по $\gamma\geqslant(\ln D)^{-\alpha}$.

Теорема 5. *Пусть $-D<0$ — нечетный фундаментальный дискриминант; K — постоянная. Рассмотрим все нечетные простые числа, не превосходящие K:*

$$3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ p_r\leqslant K. \tag{11}$$

Пусть для некоторой постоянной $\rho > 0$, не менее чем для $100 \cdot \rho\%$ простых чисел (11), *выполняется условие*

$$\left(\frac{-D}{p_i}\right) = 1. \tag{12}$$

Тогда функция $L(s, \chi)$, *определенная в* (9), *не имеет нулей в области*

$$\sigma > 1 - \frac{\psi_1(K)}{\ln D}, \quad \psi_2(K) \geqslant |t| \geqslant 1, \tag{13}$$

где $\psi_1(K)$, $\psi_2(K) \to \infty$ *при* $K \to \infty$.

Теоремы 2—4 в более слабых предположениях $\Lambda(\Sigma) > \varkappa$, $c < \varkappa a$, $\gamma > \varkappa$, где $\varkappa > 0$ — постоянная, сформулированы в работах [79, 104] (доказательство теоремы 2 см. в [75]). Однако доказательств теорем в полном объеме опубликовано не было. Более того, аналогичное предложение для сферы сформулировано Ю. В. Линником в монографии [199] как гипотеза, так что теоремы 2—4 еще нуждаются в корректном доказательстве. Теоремы 1 и 5 относятся скорее к теории L-функций.

[136] (совместно с Б. Ф. Скубенко) «К асимптотике целочисленных матриц третьего порядка». Предварительное сообщение о работе [156], изложенной также в гл. VIII монографии [198]. Результат был обобщен на матрицы n-го порядка Б. Ф. Скубенко [Д4].

[198] «Эргодические свойства алгебраических полей». Известная монография Ю. В. Линника, написанная на основе работ [44, 66, 89, 91, 75, Д5, 104, 156, 108]. Переведена на английский язык. Состоит из «Введения» и 11 глав.

Во «Введении» указывается на отличие «эргодического» метода Ю. В. Линника от классической эргодической теории. В гл. I приводятся некоторые сведения из классической эргодической теории и из теории вероятностей.

В гл. II излагаются без доказательств элементы арифметики кватернионов и матриц 2-го порядка (см. [44, Д1, 75]).

В гл. III, IV излагаются исследования Ю. В. Линника [91] о целых точках на поверхности сферы. Гл. III посвящена «ключевой лемме» метода (см. обзор [Д2]).

В гл. V даются результаты работы автора [75] и в гл. VI — результаты Б. Ф. Скубенко [Д5] о целых точках на поверхности гиперболоида

$$ac - b^2 = D, \quad |D| \to \infty,$$

интерпретируемые как результаты о распределении приведенных бинарных квадратичных форм определителя D (или идеалов квадратичных полей).

В гл. VII приводится программа Ю. В. Линника [104] (ср. обзор [Д6]) о применении его метода к общим алгебраическим числовым полям и к матрицам n-го порядка. В гл. VIII излагается теорема статьи [156] о распределении матриц 3-го порядка, являющаяся вспомогательным средством для осуществления указанной программы (см. также [Д4]).

В гл. IX сделан ряд дополнительных замечаний: 1) о матрицах с алгебраическими коэффициентами; 2) о связи с расширенной гипотезой Римана (ср. [Д1], гл. V, § 5); 3) об «элементарном эргодическом методе», связанном с дисперсионным методом Ю. В. Линника (ср. [185]).

В гл. X, стоящей особняком, излагается работа И. П. Кубилюса и Ю. В. Линника [108] об арифметическом моделировании броуновского движения.

Наконец, в гл. XI предлагается ряд нерешенных проблем.

[213] «Application of the method of D. Burgess to the investigation of integer points on large spheres». По существу попытка дать новое доказательство «ключевой леммы» метода (ср. обзор [Д2]) на основе работы [187]. Содержит серьезную ошибку: переход от оценки (5. 10) к оценке (5. 11) статьи некорректен. Идея Ю. В. Линника о доказательстве «ключевой леммы» на основе [187] была реализована в работе [Д7].

Дальнейшее развитие описанных исследований рассмотрено в обзоре [Д2].

§ 2. Оценки тригонометрических сумм. Теория L-функций

[9] «Новые оценки сумм Weyl'я по методу И. М. Виноградова». Оценке сумм Вейля методом И. М. Виноградова Ю. В. Линник посвятил несколько своих ранних работ [9, 11, 13, 23]. Самый сильный результат содержится в работе [23] (предварительное сообщение дано в заметке [13]). Сходная, но более слабая оценка (вместо n^2 надо взять $n^{14/6}$) получена в более ранней работе [11], краткое изложение результатов которой Ю. В. Линник поместил в заметке [9].

[11] «Новые оценки сумм Вейля по методу И. М. Виноградова». См. изложение работы [9].

[13] «О суммах Weyl'я». См. изложение работы [9].

[14] «Об одной условной теореме J. E. Littlewood». Пусть $\Delta > 0$ пробегает все значения, при которых $-\Delta$ является дискриминантом квадратичного поля, и пусть

$$L_{-\Delta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n^s} \ (\mathrm{Re}\, s > 0).$$

Дж. И. Литтлвуд [Д8] на основе расширенной гипотезы Римана для всех рядов $L_{-\Delta}(s)$ показал, что

$$L_{-\Delta}(1) = \Omega(\ln\ln\Delta), \quad L_{-\Delta}^{-1}(1) = \Omega(\ln\ln\Delta).$$

Первую из этих оценок вскоре безусловно доказали Р. Пэли [Д9] и Э. Ландау [Д10]. В заметке [14] Ю. В. Линник безусловно доказал следующий несколько более слабый результат, чем вторая оценка Литтлвуда:

$$L_{-\Delta}^{-1}(1) = \Omega\left(\sqrt{\ln \ln \Delta}\right).$$

Этот результат одновременно с Ю. В. Линником получил А. З. Вальфиш. Безусловно, вторую оценку Литтлвуда впервые доказал С. Човла. По поводу этих, а также более новых результатов отсылаем к обзору М. Б. Барбана [Д11].

[48] «Замечание о произведении трех простых чисел». Доказывается, что на всяком отрезке $[x, x+x^{1/2}M]$, где $M=e^{(\ln x)^{0.99}}$, присутствует произведение трех простых чисел. Результат следует из соответствующего асимптотического соотношения, которое здесь не приводится.

[54] «Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарных задач с простыми числами». В этой заметке Ю. В. Линник анонсировал ряд условных результатов, относящихся к бинарным задачам с простыми числами — проблеме Гольдбаха и задаче близнецов. Все результаты заметки [54], относящиеся к проблеме Гольдбаха, доказаны в работе [59], вошедшей в настоящий том.

Непосредственным продолжением работ [54] и [59] является статья Ван Юаня [Д12]. Наряду с другими результатами в ней содержится (в предположении плотностной гипотезы для ζ-функции Римана) доказательство разрешимости в простых числах p, p' неравенства

$$|N - p - p'| \leqslant c(\varepsilon)(\ln N)^{148/13+\varepsilon},$$

где $N > 0$ — любое заданное число. Это несколько слабее соответствующего результата в [59], при доказательстве которого была допущена неточность. Усиление некоторых результатов из [54, 59] получили недавно Г. Монтгомери и Р. Воган [Д13].

[55] (совместно с И. П. Кубилюсом) «О разложении произведения трех чисел на сумму двух квадратов». В этой короткой работе рассматривается разложение произведений весьма общего типа $w=uvp=k^2+l^2$ на два квадрата с возможно более малым l и дается асимптотический закон, действующий вплоть до $l \leqslant e^{\ln^{4/5} w}$. Тематически работа [55] связана с другой работой И. П. Кубилюса и Ю. В. Линника [88], в которой совершенно элементарно доказывается, что существует бесконечное множество пар простых чисел p_1, p_2 с условием, что $p_1p_2=k^2+l^2$, $0 < l \leqslant \ln p_1p_2$. Отметим, что аналогичный результат для случая одного простого доказан лишь в предположении гипотезы Римана для Z-функций Гекке гауссова поля.

[56] «Простые числа и степени двойки». Работа посвящена выводу асимптотической формулы для числа представлений $Q_k(N)$ большого четного числа N в виде

$$N = p_1 + p_2 + 2^{x_1} + \ldots + 2^{x_k}$$

при достаточно большом k; p_1, p_2 здесь и ниже означают простые числа. При этом принимается справедливость расширенной гипотезы Римана для всех рядов Дирихле $L(s, \chi)$, так что полученная асимптотическая формула является условной.

В работе [67], включенной в настоящий том, получены аналогичные результаты для уравнения более общего вида

$$N = p_1 + p_2 + g^{x_1} + \dots + g^{x_k},$$

$g \geqslant 2$ фиксировано, N — большое число одной четности с kg, однако вместо гипотезы Римана привлекаются лишь плотностные теоремы, так что полученные результаты являются уже безусловными. Предварительные результаты работы [67] анонсированы в [60]. В работе [67] приведена (без доказательства) также теорема II, в которой фигурирует постоянная K_0. Оценка $K_0 < 500$ приведена без доказательства в статье [64]. В связи с этими результатами см. также статью А. И. Виноградова [Д14]. Недавно круг вопросов, связанный со сложением простого (и сумм двух простых) и степеней двойки рассмотрел П. Галлахер [Д15], внесший в методы Ю. В. Линника упрощения и усовершенствования.

[60] «Простые числа и степени одного и того же числа». См. изложение работы [56].

[64] «О суммах двух простых чисел». (Резюме доклада). См. изложение работы [56].

[109] «Некоторые замечания об оценках тригонометрических сумм». В работе рассматривается система сравнений, часто встречающаяся в диофантовом анализе:

$$\begin{aligned} x_1^n + \dots + x_g^n &\equiv N_n \pmod{p^\lambda}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + \dots + x_g &\equiv N_1 \pmod{p^\lambda}, \end{aligned}$$

где p — простое число.

Основной результат: указанная система сравнений разрешима при $g \geqslant c_0 n^2 \ln n$ и любых правых частях $N_n, \dots, N_1$ для $p > n$, $\lambda \geqslant 1$. Как сообщил А. А. Карацуба, в работе [109] имеется ошибка, однако сформулированный результат верен и содержится как частный случай в более общем утверждении [Д16], доказанном иным методом.

[117] «Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Харди—Литтлвуда». Техника решения Ю. В. Линником проблемы Харди—Литтлвуда состоит в сведении уравнения

$$n = p + x^2 + y^2 \tag{1}$$

к серии уравнений

$$n = x_1 x_2 \dots x_k + x^2 + y^2 \tag{2}$$

для всех $k \geqslant 1$, причем x_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, пробегают все целые значения $\geqslant 2$ (см. [118, 129], формула (1. 4)).

При $k \geqslant 6$ уравнение (2) можно трактовать дисперсионным методом, который приводит и к асимптотике для числа решений. Для $k \leqslant 4$ уравнение (2) решается с должной асимптотикой применением теоремы о k-м моменте ($k \leqslant 4$) L-рядов $L(s, \chi)$ на половинной прямой $\operatorname{Re} s=1/2$ (см. лемму 6 работы [118, 129]), которая является следствием укороченного функционального уравнения в D-аспекте (D — модуль характера χ). Наибольшие трудности доставил Ю. В. Линнику случай $k=5$ уравнения (2). Он оказался между дисперсионным методом и теорией L-рядов того времени. Фактически случай $k=5$ требовал решения проблемы 5-го момента для L-рядов на половинной прямой, усредненного по всем модулям и всем характерам. Ю. В. Линник устранил эту трудность двумя путями.

Первый по времени и более простой по технике исполнения изложен в работе [118, 129]. Суть его состоит в простом отказе от уравнения (2) для случая $k=5$. Дело в том, что число решений уравнения (1) равно знакопеременной сумме чисел решений уравнений (2), и в эту сумму число решений (2) для $k=5$ входит с положительным знаком. Поэтому если его выбросить, то получится нетривиальная оценка снизу для числа решений (1), которая решает первую половину проблемы Харди—Литтлвуда, т. е. говорят, что уравнение (1) действительно разрешимо.

Второй путь, очень трудный в техническом отношении, изложен в работе [117]. Суть его сводится к прямому решению проблемы 5-го момента для L-рядов на половинной прямой. Кратко суть дела такова. По техническим причинам четные моменты для L-рядов изучать легче, чем нечетные. Поэтому Ю. В. Линник в работе [117] рассматривает проблему 6-го момента. Она содержит в себе как следствие и проблему 5-го момента. Схема рассуждений в [117] выглядит следующим образом. Хорошо известно, что 6-й момент для L-рядов, усредненный по всем характерам данного модуля D, сводится к нахождению числа решений сравнения

$$x_1x_2x_3 \equiv y_1y_2y_3 \pmod{D}, \tag{3}$$

где $x_i, y_i \leqslant \sqrt{D}$. Найти число решений этого сравнения не представляется возможным до сих пор. Суть трудности — в малом пробеге переменных x_i, y_i. Сравнение (3) решается только в том случае, когда длина пробега переменных x_i, y_i сравнима по порядку с модулем D. Ю. В. Линник заметил, что усреднение 6-го момента по всем $D \leqslant X$ позволяет свести (3) к уравнению

$$x_1x_2x_3 - y_1y_2y_3 = Dd, \tag{4}$$

где $d, x_i, y_i \leqslant \sqrt{X}, D \leqslant X$, которое можно переписать как сравнение

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \equiv y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \pmod{d} \tag{5}$$

для любого $d \leqslant \sqrt{X}$. Но интервалы изменения x_i, y_i в (5) уже сравнимы с модулем d, и поэтому для (5) можно получить асимптотику для числа решений, а вместе с ней решить проблему 6-го момента для L-рядов, усредненного по всем модулям и характерам.

Переход от сравнения (3) с большим модулем к сравнению (5) с малым модулем является идейным стержнем всей работы [117], хотя этот переход и запрятан там в технике кругового метода для уравнения (4). Но искушенный читатель заметит, что когда Ю. В. Линник разбивает единичный интервал дугами Фарея и устраивает из правой части уравнения (4) понижающую сумму по переменной D, он вынужден решать сравнение (5) в тех рациональных точках ряда Фарея, знаменатели которых делят d. Эти «особые точки» ряда Фарея в сумме дают главный член асимптотики для числа решений (4).

Основной результат работы [117] — асимптотическая формула в проблеме Харди—Литтлвуда (1) и стержневой технический результат этой работы — теорема о k-х моментах ($k \leqslant 6$) L-рядов ([117], лемма 1) анонсированы в заметке [128], помещенной в настоящем томе.

Появление в 1965 г. известной работы Э. Бомбьери по большому решету [Д17] позволило получать результаты о моментах L-рядов на половинной прямой значительно проще; более того, стало возможным трактовать не только 6-й, но и 8-й момент. В связи с этим отсылаем читателя к статье М. Хаксли [Д18], содержащей также сравнительный обзор методов, применяемых при оценке моментов для L-рядов на половинной прямой.

Работа [117] в силу своей сложности не была своевременно понята специалистами. Сложность, а также наличие теперь более простых подходов к проблеме моментов для L-рядов явились, вероятно, причиной того факта, что работу [117] специалисты обходят молчанием до сих пор.[1] Эти же причины, а главное, большой объем работы [117] не позволили включить ее в настоящие «Избранные труды». Тем не менее мы считаем, что эта работа и теперь не потеряла интереса для специалистов.

В заключение отметим, что другой способ получения асимптотики в проблеме Харди—Литтлвуда теперь — возвращение к рассуждениям основополагающей работы К. Хооли [Д20], решившего проблему на основе расширенной гипотезы Римана (РГР). Для этого РГР надо заменить теоремой Бомбьери, что делается довольно просто; см. [Д21].

Наконец, отметим одну важную задачу, касающуюся уравнения Харди—Литтлвуда (1). Речь идет о получении асимптотики числа решений уравнения (1) с условием, что сумма двух квадратов заменена числом, представимым суммой двух квадратов без учета количества представлений; иначе говоря, речь идет об асимптотике суммы

$$\sum_{p<n} b\,(n-p), \quad n \to \infty,$$

[1] Например, в цитированной выше статье М. Хаксли [Д18] и в известной монографии Г. Монтгомери [Д19] работа [117] не упоминается.

где $b(a)=1$, если $a=x^2+y^2$; 0 — в противном случае. На первый взгляд различие небольшое, но оно принципиальное. В такой форме уравнение Харди—Литтлвуда становится чисто бинарной задачей, именно поэтому ее асимптотику хотел получить сам Ю. В. Линник, но задача оказалась трудной. В 1969 г. Ю. В. Линник заметил, что получение такой асимптотики стало бы важным шагом в проблеме Харди—Литтлвуда после работы К. Хооли [Д20] и его работ на эту тему [118, 129, 117]. Недавно Г. Иванец [Д22] доказал, что

$$\sum_{p<n} b(n-p) = C \prod_{\substack{p\mid n \\ p\equiv -1 \pmod 4}} \left(1+\frac{p}{p^2-p-1}\right)\frac{n}{\ln^{3/2} n} \times$$
$$\times (1+O(\varepsilon^{\gamma})) + \theta E(n,\ n^{1-\varepsilon});$$

здесь C — абсолютная постоянная, выражение для которой дается, $\varepsilon > \ln\ln n/\ln n$, O-константа является абсолютной,

$$|\theta| \leqslant 1,\quad E(X,\ Q) = \sum_{q<Q} \max_{(l,q)=1} \left|\pi(X,\ q,\ l) - \frac{\operatorname{Li} X}{\varphi(q)}\right|.$$

По хорошо известной гипотезе Халберстама—Рихерта,

$$E(n,\ n^{1-\varepsilon}) = O(n/\ln^A n)$$

для любого фиксированного $A>0$.

Отметим, что из рассуждений работы [Д23] следует, что

$$n\ln^{-3/2} n \ll \sum_{p<n} b(n-p) \ll n\ln^{-3/2} n.$$

[163] (совместно с М. Б. Барбаном и Н. Г. Чудаковым) «О распределении простых чисел в коротких прогрессиях $\operatorname{mod} p^n$». В заметке анонсируются результаты, подробное доказательство которых дано в [172]. Продолжая эти работы, П. Галлахер [Д24] доказал, что показатель 8/3 в них можно понизить до 5/2. См. также [Д25].

§ 3. Дисперсионный метод

[119] «Дисперсионный метод для решения некоторых бинарных аддитивных задач и асимптотическая формула в проблеме Харди—Литтлвуда», (Резюме доклада). В резюме доклада на Ленинградском математическом обществе (27.10.59) говорится об общих принципах дисперсионного метода Ю. В. Линника (ср. [123] и [130], введение). Сообщается, что в асимптотической формуле заметки [113] содержится неточность (в настоящих «Избранных трудах» она исправлена по [119]). Говорится, что в доказательстве этой формулы важную роль играет оценка шестых моментов L-рядов (см. [128, 117] и изложение статьи [117] в § 2 настоящего обзора).

[130] «Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах». Известная монография Ю. В. Линника, посвященная систематическому изложению разработанного им метода, основой которого является сочетание теоретико-вероятностных концепций с глубокими чисто арифметическими соображениями, в частности с результатами И. М. Виноградова, А. Вейля, К. Хооли и самого Ю. В. Линника. Подробно рассматривается решение ряда бинарных аддитивных проблем, не поддававшихся трактовке уже известными методами (некоторые из них не выводились даже из расширенной гипотезы Римана). Монография суммирует работы [101, 107, 118 и 129, 123, 125, 113, 117, 119, 128, 132] (правда, некоторые результаты этих работ, в частности работы [117], приводятся без доказательства). Более поздние работы [184—186, 205, 227, 233, 239], также относящиеся к дисперсионному методу, в монографию [130], естественно, не вошли. Книга состоит из «Введения» и 10 глав.

«Введение» содержит классификацию аддитивных задач, краткое изложение схемы классического кругового метода Харди—Литтлвуда—Виноградова в форме метода тригонометрических сумм И. М. Виноградова применительно к тернарным задачам. Рассматриваются различные схемы дисперсионного метода, понятия ковариации и когерентных чисел, с помощью которых указанный метод существенно упрощается. Показывается, как некоторые задачи, кажущиеся бинарными, вкладываются в схему решения тернарных задач.

Для бинарных уравнений, не поддающихся трактовке обычными методами, например для уравнения

$$n = p + \varphi(x, y), \tag{1}$$

где p — простое число, $\varphi(x, y)$ — заданная квадратичная форма, дается оригинальный и перспективный метод сведения к серии уравнений вида

$$n = x_1 x_2' \ldots x_k' + \varphi(x, y), \tag{2}$$

где x_i' — «квазипростые» числа (не имеют малых простых делителей). Уравнения (2) в свою очередь могут быть сведены к уравнениям вида

$$n = \nu D' + \varphi(x, y), \tag{3}$$

решаемым с помощью дисперсионного метода.

Ю. В. Линник высказывает во «Введении» ряд предположений. Первое из них относится к возможности элементарного решения уравнения

$$n = \varphi(x, y, z, t), \tag{4}$$

где $\varphi(x, y, z, t)$ — положительная кватернарная форма, $n > n_0$ (с необходимыми условиями представимости n в виде (4)). Это предположение в дальнейшем было обосновано в заметке [171].

Второе предположение состоит в утверждении, что нахождение должной асимптотики для числа решений уравнения

$$n = p + \mathscr{P}_k, \tag{5}$$

где p — простое число, $\mathscr{P}_k$ — «почти-простое» число, т. е. имеет $\leqslant k$ простых делителей ($k \geqslant k_0$), облегчило бы путь к решению бинарной проблемы Гольдбаха. Это высказывание Ю. В. Линника приобретает особо важное значение в связи с теоремой Чена о разрешимости уравнения (5) при $k=2$. Наконец, высказывается предположение о применимости дисперсионного метода к исследованию систем бинарных уравнений. Последнее предположение может стать программой интересных исследований по дальнейшему расширению сферы применимости дисперсионного метода.

В гл. 1 и 2 рассматриваются вспомогательные для дисперсионного метода леммы, а также леммы, доставляющие асимптотику для числа решений основных уравнений дисперсионного метода в проблемах Титчмарша и Харди—Литтлвуда.

В гл. 3 дается обзор работ А. Ингама, Т. Эстермана, Э. Титчмарша и К. Хооли по аддитивной проблеме делителей. Выводится асимптотическая формула для выражения

$$\sum_{m \leqslant n} \tau(m+l)\, \tau_k(m)$$

в случае $l=1$. Сведения о дальнейших исследованиях по аддитивной проблеме делителей приведены в обзоре [Д26]. В этой же главе Ю. В. Линник обсуждает до сих пор еще не решенную проблему о нахождении асимптотики или хотя бы достаточно хорошей оценки снизу для числа решений уравнения

$$x_1 x_2 \ldots x_{k_1} + y_1 y_2 \ldots y_{k_2} = n, \tag{6}$$

где $k_1 = k_2 = k > 2$ — любое заданное натуральное число, x_i и y_i — натуральные числа. Устанавливается связь этой задачи с известной гипотезой И. М. Виноградова об оценке наименьшего положительного квадратичного невычета по простому модулю. Можно надеяться, что исследование уравнения (6) позволит продвинуться в решении некоторых классических проблем теории характеров Дирихле.

В гл. 4 в качестве обобщения известной теоремы Клостермана рассматривается уравнение вида

$$N(a) + N(b) = n, \tag{7}$$

где целые идеалы a и b принадлежат данным классам идеалов в полях алгебраических чисел, одно из которых является квадратичным. Ограничиваясь приведением уравнения (7) к виду, удобному для применения дисперсионного метода, Ю. В. Линник связывает вопрос о решении соответствующего основного уравнения дисперсионного метода с задачей о распределении простых чисел p, являющихся нормами идеалов заданного класса в арифметических прогрессиях с разностью, которая может возрастать, как некоторая степень логарифма длины интервала, в котором лежат числа p. Решение и дальнейшая специализация этих задач содержатся в работах А. И. Виноградова [Д27] и Л. Ф. Кондаковой [Д28, Д29].

В гл. 5 дана схема вывода асимптотики для числа решений уравнения

$$\varphi(x, y) + 2dD'\nu^2 = n, \tag{8}$$

где $\varphi(x, y)$ — положительная примитивная бинарная квадратичная форма с дискриминантом, свободным от нечетных квадратов, d — заданное число, простые числа D' и ν пробегают некоторую прямоугольную область значений. Интерес Ю. В. Линника к уравнению (8) и к более общим уравнениям такого типа определяется тем, что они не могут быть решены с помощью расширенной гипотезы Римана. Исследование подобных уравнений далеко еще не закончено.

Результаты гл. 6—9 являются итогом серии работ Ю. В. Линника, посвященных решению классических проблем Титчмарша, Харди—Литтлвуда и аналогичных задач, включая соображения, относящиеся к получению оценок снизу для числа решений обобщенного уравнения Харди—Литтлвуда. Сведения об этих работах, а также об их дальнейшем развитии имеются в обзоре [Д26].

Особое место, на наш взгляд, занимает проблематика, бегло затронутая Ю. В. Линником в гл. 10. Здесь намечен в самых общих чертах метод вложения бинарных проблем типа $n=p+p'$, $n=p+x^2$, где p, p' — простые числа, x — целое число, в бинарные проблемы с большим числом переменных. Дальнейшее углубление этих соображений Ю. В. Линника в сочетании с новейшими результатами по бинарным задачам указанного типа может оказаться плодотворным на пути их полного решения.

[184] (совместно с Б. М. Бредихиным) «Асимптотика в общей проблеме Харди—Литтлвуда». Кратко излагается метод нахождения асимптотики для числа решений уравнения

$$p + \varphi(x, y) = n,$$

где p пробегает простые числа, $\varphi(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$ — заданная положительная квадратичная форма с дискриминантом, отличным от полного квадрата. Подробное изложение дано в работе [185], помещенной в настоящем томе. Г. Иванец [Д30], пользуясь методом К. Хооли [Д20], с привлечением теоремы Э. Бомбьери [Д17], доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p + F(x, y) = n,$$

где $F(x, y)=ax^2+bxy+cy^2+ex+fy+q \in \mathbf{Z}[x, y]$; при этом дискриминанты $d=b^2-4ac$, $D=af^2-bef+ce^2+dg$ взаимно-просты и квадратичная форма $\varphi(x, y)=ax^2+bxy+cy^2$ положительно определена, если $d<0$.

[205] (совместно с Б. М. Бредихиным и Н. Г. Чудаковым) «Über binäre additive Probleme gemischter Art». Получена асимптотическая формула для числа решений уравнения

$$N(\mathfrak{p}) + \varphi(x, y) = n, \quad n \to \infty,$$

где $\mathfrak{p}$ — простой идеал из заданного класса поля $Q(\sqrt{-D})$, $D > 0$, $\varphi(x, y)$ — положительная бинарная квадратичная форма определителя $D_1 > 0$, принадлежащая одноклассному роду. Последнее ограничение снято Л. Ф. Кондаковой [Д28, Д29].

[227] (совместно с Б. М. Бредихиным) «Применение теорем о простых числах в диофантовых задачах особого типа». В работе рассматривается диофантово уравнение

$$n = \frac{\nu_1\varphi_1 - \nu_2\varphi_2}{\nu_1 - \nu_2} \quad (\nu_1 \neq \nu_2), \tag{1}$$

где ν_1 и ν_2 принадлежат заданной последовательности (ν), φ_1 и φ_2 принадлежат заданной последовательности (φ); здесь n — заданное натуральное число, (ν) и (φ) — строго возрастающие последовательности натуральных чисел, φ_1 и $\varphi_2 < n$. В работе доказывается разрешимость уравнения (1) и для числа решений этого уравнения выводятся достаточно хорошие оценки снизу при дополнительных ограничениях на плотность чисел ν и на распределенность чисел φ в арифметических прогрессиях. В частности, рассматривается уравнение

$$n = \frac{p_1 p - p_2 p'}{p_1 - p_2} \quad (p_1 \neq p_2), \tag{2}$$

где простые числа p_1 и p_2 принадлежат интервалу (z, z'), простые числа p и p' меньше n. Один из результатов, относящихся к (2): пусть $z = \ln n$, $z' = \ln^{c_0} n$, где $c_0 > e$. Тогда всякое достаточно большое натуральное число n представимо в виде (2). Для числа $Q_1(n)$ таких представлений имеет место оценка

$$Q_1(n) > (\ln c_0)(\ln c_0 - 1)\frac{n}{\ln n}(1 + o(1)).$$

Рассматривается также несколько более общее уравнение

$$n = \frac{p_1^r p - p_2^r p'}{p_1^r - p_2^r} \quad (p_1 \neq p_2), \tag{3}$$

где $r \geqslant 1$ — фиксированное натуральное число.

[233] (совместно с Б. М. Бредихиным) «Remarks on some new applications of the dispersion method». Предварительное сообщение о работе [227]. Доказательств не приводится. Проблематика работ [233, 227] развивалась М. Б. Степановой [Д31].

Дальнейшее развитие дисперсионного метода рассмотрено в обзоре [Д26].

§ 4. Элементарные методы в теории чисел. Метод Шнирельмана

[15] «Пример одной последовательности, не образующей бинарного базиса». Говорят, что последовательность $F=\{M_j\}$ целых положительных чисел образует бинарный базис, если сумма $F+F$ представляет все целые положительные числа, начиная с некоторого. Ю. В. Линник отмечает, что свойства F, которые обеспечивают способность суммы $F+F+F$ представлять все достаточно большие целые числа, а суммы $F+F$ представлять почти все целые числа (кроме, быть может, последовательности нулевой плотности), не могут, вообще говоря, сделать F бинарным базисом. В подтверждение этого в заметке [15] строится последовательность $F=\{M_j\}$ с указанными выше свойствами, которая тем не менее не образует бинарного базиса.

[16] «On Erdös's theorem on the addition of numerical sequences». По поводу используемых ниже определений см. книгу [140], гл. 1, § 3.

Хорошо известный результат Эрдеша гласит: всякий базис есть существенная компонента. В работе [16] показывается, что обратное, вообще говоря, неверно; точнее, строится пример существенной компоненты, не являющейся базисом. Этот пример не элементарен. Штор и Вирзинг (ссылка дана в книге [140]) построили более простой пример; о новых результатах см. в [Д32].

[52] «Одна задача по элементарным методам теории простых чисел». Формулируется задача, решение которой привело бы к элементарному доказательству известной теоремы Зигеля

$$\lim_{D\to\infty}\frac{\ln h(-D)}{\ln D}=\frac{1}{2};$$

здесь $h(-D)$ — число классов положительных бинарных квадратичных форм дискриминанта $-D$. Вскоре Ю. В. Линник доказал вариант этой задачи и тем самым получил элементарное доказательство теоремы Зигеля (см. статью [53], вошедшую в настоящий том, и гл. 11 книги [140]).

[88] (совместно с И. П. Кубилюсом) «Одна элементарная теорема теории простых чисел». См. изложение работы [55] в § 2.

[140] (совместно с А. О. Гельфондом) «Элементарные методы в аналитической теории чисел». Известная монография, переведенная на английский и французский языки. Ограничимся рассмотрением лишь тех глав этой книги, которые написаны Ю. В. Линником.

Гл. 1. Аддитивные свойства последовательностей (плотность Шнирельмана, неравенство Шнирельмана). Теорема Манна (по Артину и Шерку). Теорема Эрдеша (базис есть существенная компонента). См. также изложение работ [15, 16].

Гл. 2. Элементарное решение проблемы Варинга (изложение работы [21], вошедшей в настоящие «Избранные труды», с упрощениями А. Я. Хинчина). Элементарное решение проблемы Гильберта—Камке по Г. В. Емельянову [Д33].

Гл. 4. Элементарный вывод закона распределения простых гауссовых чисел по И. В. Чулановскому [Д34].

Гл. 7. Элементарный метод доказательства равномерной распределенности дробных долей $\{\alpha p\}$, $\{\alpha f(n)\}$, где α иррационально, а p пробегает последовательность простых чисел, $f(n)$ — целочисленный многочлен степени $k \geqslant 1$, n пробегает последовательность целых чисел (по работам И. М. Виноградова 1953 и 1925 гг.).

Гл. 8. Элементарный метод для счета числа целых точек в контурах общего вида (по работе И. М. Виноградова 1917 г.).

Гл. 9. Распределение степенных вычетов и невычетов степени $l > 1$ для большого простого модуля $p \equiv 1 \pmod{l}$ (гипотезы И. М. Виноградова; результаты И. М. Виноградова, Д. Берджесса и других авторов).

Гл. 11. Элементарное доказательство теоремы Зигеля (по работе [53], вошедшей в настоящий том). См. изложение работы [52].

[171] (совместно с А. В. Малышевым) «Элементарное доказательство теоремы Клостермана—Тартаковского о представлении чисел положительными кватернарными квадратичными формами». Дается краткий набросок элементарного доказательства следующей известной теоремы. *Пусть $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — целочисленная положительная квадратичная форма определителя d; пусть $m > 0$ — целое число, для которого разрешимо сравнение*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv m \pmod{8dm},$$

причем $m = m_1 m_2$, где $(m_1, 2d) = 1$, $|m_2| \leqslant c$. Тогда найдется такое $m_0 = m_0(d, c)$, что при $m \geqslant m_0$ уравнение

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = m$$

разрешимо в целых числах x_1, x_2, x_3, x_4.

§ 5. Работы по различным разделам теории чисел

[42] «Об одном приложении теории трансцендентных чисел к теории бинарных квадратичных форм». (Резюме доклада). Проблема одноклассности мнимых квадратичных полей редуцируется к эффективизации оценки модуля линейной формы от трех логарифмов алгебраических чисел. Результаты целиком покрываются известной работой [39], вошедшей в настоящий том. Работа [39] явилась необходимым звеном в полном решении проблемы одноклассности по Бейкеру [Д35, Д36].

[51] (совместно с Н. Г. Чудаковым) «Об одном классе вполне мультипликативных функций». К. А. Родосский и Н. Г. Чудаков [Д37] ввели класс функций, названных обобщенными характерами, — это вполне мультипликативные функции $h(n)$, обладающие следующими свойствами: 1) $|h(n)| = 0$ или 1; 2) сумматор-

ная функция $S(x)=\sum_{n\leqslant x} h(n)$ ограничена для всех $x\geqslant 1$. В работе [51] показывается, что если вполне мультипликативная функция $h(n)$ подчинена условию 1) и имеет конечную базу (база — совокупность тех простых p, для которых $h(p)\neq 0$), состоящую более чем из одного элемента, то $\sup_{0\leqslant x<\infty} |S(x)|=\infty$. Отметим, что ситуация меняется, если база состоит лишь из одного простого числа. Действительно, как легко видеть, в этом случае $h(n)$ является обобщенным характером. В связи с этим и другими результатами, относящимися к обобщенным характерам, отсылаем читателя к обзору Ю. В. Линника [253].

[108] (совместно с И. П. Кубилюсом) «Арифметическое моделирование броуновского движения». Предлагается некоторая арифметическая конструкция для моделирования траектории броуновского движения, что имеет применения в методе Монте-Карло. Пусть $P>1$ — нечетное бесквадратное число; m — целое число; h, s, t — вещественные числа, $h>0$, $0\leqslant s<t$. Рассмотрим сумму

$$S_P(m,\ s,\ t;\ h)=\frac{1}{\sqrt{h}}\sum_{hs<n\leqslant ht}\left(\frac{m+n}{P}\right),$$

где (a/P) — символ Якоби.

Теорема 1. *Если P пробегает любую возрастающую бесконечную последовательность бесквадратных нечетных чисел, причем для любого фиксированного $c\geqslant 0$*

$$\prod_{p\mid P}\left(1-\frac{c}{p}\right)\to 1,\quad P\to\infty, \tag{1}$$

и если

$$h=h(P)\to\infty,\quad \frac{\ln h}{\ln P}\to 0,\quad P\to\infty, \tag{2}$$

то при $P\to\infty$

$$\frac{1}{P}N_P\{S_P(m,\ s,\ t;\ h)<x\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2(t-s)}\,du, \tag{3}$$

где $N_P\{\ldots\}$ — число P с указанным в $\{\ldots\}$ условием. При этом для любого набора $(s_1,\ t_1),\ \ldots,\ (s_k,\ t_k)$ непересекающихся интервалов

$$\frac{1}{P}N_P\{S_P(m,\ s_1,\ t_1;\ h)<x_1;\ \ldots;\ S_P(m, s_k,\ t_k;\ h)<x_k\}\to$$
$$\to\prod_{j=1}^{k}\lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}N_P\{S_P(m,\ s_j,\ t_j;\ h)<x_j\}. \tag{4}$$

Аналогичный результат имеет место и для примитивных характеров $\chi_P(a)$ с основным модулем P степени $g>2$.

Теорема 2. *Пусть*

$$T_P(m,\ s,\ t;\ h,\ \chi)=\sqrt{\frac{2}{h}}\sum_{hs<n\leqslant ht}{}'\ \chi_P(m+n)=U_P+iV_P.$$

Тогда в условиях теоремы 1 *справедливы формулы* (3) *и* (4), *где* S_P *заменено на* U_P *или на* V_P.

Статья [108] воспроизводится в гл. X монографии [198].

[120] (совместно с И. П. Кубилюсом, Р. В. Уждавинисом) «Некоторые новые результаты по вероятностной теории чисел и моделирование броуновского движения». (Тезисы). Краткие тезисы доклада, состоящего из двух частей: 1) теории распределения значений аддитивных арифметических функций; 2) построения арифметической модели траектории броуновского движения. Вторая часть доклада опубликована в развернутом виде в работе [108] (см. выше).

[149] (совместно с И. П. Кубилюсом) «Новые применения теории вероятностей к теории чисел». Краткие (несколько строк) тезисы обзорного доклада. Сообщается, что в докладе излагаются некоторые результаты из работ:

1) Ю. В. Линник. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л., 1961;

2) И. П. Кубилюс. Вероятностные методы в теории чисел. Вильнюс, 1959;

3) М. Б. Барбан. Арифметические функции на «редких» множествах. — Труды Ин-та мат. АН УзССР, 1961, вып. 22, с. 21—35.

Дополнительная литература

1. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1962, т. 65. 212 с.
2. Малышев А. В. Дискретный эргодический метод Ю. В. Линника и его дальнейшее развитие. — В кн.: Ю. В. Линник. Избранные труды. Теория чисел. Эргодический метод и L-функции. Л. 1979, с. 418—430.
3. Малышев А. В. Асимптотический закон для представления чисел некоторыми положительными тернарными квадратичными формами. — ДАН СССР, 1953, т. 93, № 5, с. 771—774.
4. Скубенко Б. Ф. К распределению целочисленных матриц и вычислению объема фундаментальной области унимодулярной группы матриц. — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1965, т. 80, с. 129—144.
5. Скубенко Б. Ф. Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболоиде и эргодические теоремы. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, т. 26, № 5, с. 721—752.
6. Malyshev A. V. Yu. V. Linnik's ergodic method in number theory. — Acta arithm., 1975, vol. 27, p. 555—598.
7. Малышев А. В. Новый вариант эргодического метода Ю. В. Линника в теории чисел. — Записки науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1975, т. 50, с. 179—186.
8. Littlewood J. E. On the class-number of the corpus $P(\sqrt{-k})$. — Proc. London Math. Soc., 1928, vol. 27, p. 358—372.
9. Paley R. E. A. C. A theorem on characters. — J. London Math. Soc., 1932, vol. 7, part 1, № 25, p. 28—32.

10. L a n d a u E. Der Paleysche Satz über Charaktere. — Math. Z., 1932, Bd 37, № 1, S. 28—32.
11. Б а р б а н М. Б. Метод «большого решета» и его применения в теории чисел. — Успехи мат. наук, 1966, т. 21, вып. 1, с. 51—102.
12. W a n g Y u a n. On Linnik's method concerning the Goldbach number. — Sci. Sinica, 1977, vol. 20, № 1, p. 16—30.
13. M o n t g o m e r y H. L., V a u g h a n R. C. The exceptional set in Goldbach's problem. — Acta arithm., 1975, vol. 27, p. 353—370.
14. В и н о г р а д о в А. И. Об одной «почти бинарной» задаче. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1956, т. 20, № 6, с. 713—750.
15. G a l l a g h e r P. X. Primes and powers of 2. — Invent. math., 1975, vol. 29, № 2, p. 125—142.
16. К а р а ц у б а А. А. Об одной системе сравнений. — Мат. заметки, 1976, т. 19, № 3, с. 389—392.
17. B o m b i e r i E. On the large sieve. — Mathematika, 1965, vol. 12, N 2, p. 201—225.
18. H u x l e y M. N. The large sieve inequality for algebraic number fields. II. Means of moments of Hecke zeta-functions. — Proc. London Math. Soc., 1970, vol. 21, № 1, p. 108—128.
19. M o n t g o m e r y H. L. Topics in multiplicative number theory. — Lect. Notes Math., 1971, vol. 227. 178 p.
20. H o o l e y C. On the representations of a number as the sum of two squares and a prime. — Acta Math., 1957, vol. 97, № 3—4, p. 189—210.
21. H o o l e y C. Applications of sieve methods to the theory of numbers. Cambridge, 1976. 122 p. (Cambridge Tracts in Math. № 70).
22. I w a n i e c H. The half dimensional sieve. — Acta arithm., 1976, vol. 29, № 1, p. 69—95.
23. I w a n i e c H. Primes of the type $\varphi(x, y)+A$ where φ is a quadratic form. — Acta arithm., 1972, vol. 21, p. 203—234.
24. Gallagher P. X. Primes in progressions to prime-power modulus. — Invent. math., 1972, vol. 16, № 3, p. 191—201.
25. I w a n i e c H. On zeros of Dirichlet's L-series. — Invent. math., 1974, vol. 23, N 2, p. 97—104.
26. Б р е д и х и н Б. М. Дисперсионный метод Ю. В. Линника в аддитивной теории чисел. — В наст. томе, с. 337—351.
27. В и н о г р а д о в А. И. Обобщение формулы Клостермана. — ДАН СССР, 1962, т. 146, № 4, с. 754—756.
28. К о н д а к о в а Л. Ф. Об одной аддитивной задаче смешанного типа. — В кн.: Исследования по теории чисел. Вып. 1. Куйбышев, 1971, с. 3—18.
29. К о н д а к о в а Л. Ф. Применение большого решета к решению аддитивных задач. — Мат. заметки, 1971, т. 10, № 1, с. 73—81.
30. I w a n i e c H. The generalized Hardy—Littlewood's problem involving a quadratic polynomial with coprime discriminants. — Acta arithm., 1975, vol. 27, p. 421—446.
31. С т е п а н о в а М. Б. О некоторых диофантовых уравнениях специального вида с простыми числами. — Науч. тр. Куйбышев. гос. пед. ин-та, 1975, т. 158, с. 50—52.
32. E r d ö s P. Problems and results on combinatorial number theory. II. — J. Indian Math. Soc., 1976, vol. 40, № 1—4, p. 285—298.
33. Е м е л ь я н о в Г. В. Об одной системе диофантовых уравнений. — Учен. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук, 1950, вып. 19, с. 3—39.
34. Ч у л а н о в с к и й И. В. Элементарное доказательство закона распределения простых чисел гауссова поля. — Вестник ЛГУ, 1956, № 13. Сер. мат., мех., астрон., вып. 3, с. 43—62.
35. B a k e r A. Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. — Mathematika, 1966, vol. 13, № 2, p. 204—216.
36. B a k e r A. Effective methods in Diophantine problems. — Proceedings Sympos. Pure Math., 1971, vol. 20, p. 195—205.
37. Р о д о с с к и й К. А., Ч у д а к о в Н. Г. Об обобщенном характере. — ДАН СССР, 1950, т. 73, № 6, с. 1137—1139.

СОДЕРЖАНИЕ

II. Теория L-функций
Аналитическая теория чисел (продолжение)

III. Дисперсионный метод

Приложение

Юрий Владимирович Линник

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

Теория чисел
L-функции и дисперсионный метод

Утверждено к печати
Ордена Ленина Математическим институтом им. В. А. Стеклова
АН СССР

Редактор издательства *М. В. Хотимская*
Художник *Д. С. Данилов*
Технический редактор *Г. А. Бессонова*
Корректоры *О. М. Бобылева, Н. П. Кизим*
и *Т. Г. Эдельман*

ИБ № 8821

Сдано в набор 28.05.79. Подписано к печати 24.03.80. М-10676. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Печ. л. $23^1/_2+1$ вкл. ($^1/_8$ печ. л.). Усл. печ. л. 23.63. Уч.-изд. л. 23.89. Тираж 1400. Изд. № 7354. Тип. зак. 410. Цена 3 р. 90 к.

Ленинградское отделение издательства «Наука»
199164, Ленинград, В-164, Менделеевская линия, 1

Ордена Трудового Красного Знамени Первая типография
издательства «Наука». 199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12

КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА «НАУКА»
МОЖНО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ЗАКАЗАТЬ
В МАГАЗИНАХ КОНТОРЫ «АКАДЕМКНИГА»

Для получения книг почтой
заказы просим направлять по адресу:

117192, Москва В-192, Мичуринский пр., 12
магазин «Книга — почтой»
Центральной конторы «Академкнига»;

197110, Ленинград П-110, Петрозаводская ул., 7
магазин «Книга — почтой»
Северо-Западной конторы «Академкнига»

или в ближайший магазин «Академкнига»,
имеющий отдел «Книга — почтой»:

480091, **Алма-Ата**, ул. Фурманова, 91/97 («Книга — почтой»);
370005, **Баку**, ул. Джапаридзе, 13;
320005, **Днепропетровск**, пр. Гагарина, 24 («Книга — почтой»);
734001, **Душанбе**, пр. Ленина, 95 («Книга — почтой»);
335009, **Ереван**, ул. Туманяна, 31;
664033, **Иркутск**, ул. Лермонтова, 289;
252030, **Киев**, ул. Ленина, 42;
252030, **Киев**, ул. Пирогова, 2;
252142, **Киев**, пр. Вернадского, 79;
252030, **Киев**, ул. Пирогова, 4 («Книга — почтой»);
277001, **Кишинев**, ул. Пирогова, 28 («Книга — почтой»);
343900, **Краматорск (Донецкой обл.)**, ул. Марата, 1;
660049, **Красноярск**, пр. Мира, 84;
443002, **Куйбышев**, пр. Ленина, 2 («Книга — почтой»);

192104, **Ленинград**, Д-120, Литейный пр., 57;
199164, **Ленинград**, Таможенный пер., 2;
199034, **Ленинград**, В. О., 9 линия, 16;
220012, **Минск**, Ленинский пр., 72 («Книга — почтой»);
103009, **Москва**, ул. Горького, 8;
117312, **Москва**, ул. Вавилова, 55/7;
630076, **Новосибирск**, Красный пр., 51;
630090, **Новосибирск, Академгородок**, Морской пр., 22 («Книга — почтой»);
142292, **Пущино (Московской обл.)**, «Академкнига»;
620151, **Свердловск**, ул. Мамина-Сибиряка, 137 («Книга — почтой»);
700029, **Ташкент**, ул. Ленина, 73;
700100, **Ташкент**, ул. Шота Руставели, 43;
700187, **Ташкент**, ул. Дружбы народов, 6 («Книга — почтой»);
634050, **Томск**, наб. реки Ушайки, 18;
450059, **Уфа**, ул. Р. Зорге, 10 («Книга — почтой»);
450025, **Уфа**, Коммунистическая ул., 49;
720001, **Фрунзе**, бульв. Дзержинского, 42 («Книга — почтой»);
310003, **Харьков**, ул. Чернышевского, 87 («Книга — почтой»).